МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1982

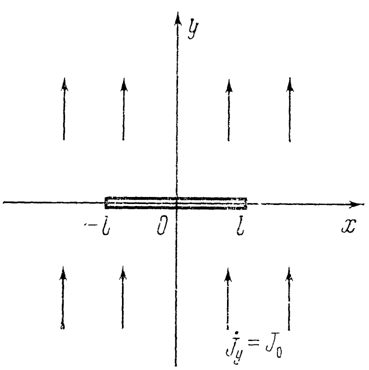
УДК 539.3

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ И ТЕРМОУПРУГОЕ ПОЛЕ В ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКЕ С РАЗРЕЗОМ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

КУДРЯВЦЕВ Б. А., ПАРТОН В. З., РУБИНСКИЙ Б. Д.

Исследуется нестационарный процесс концентрации электромагнитного и теплового поля в неограниченной пластинке из проводящего материала, через которую пропускается постоянный ток и мгновенно возникает прямолинейная трещина конечной длины, расположенная перпендикулярно вектору плотности тока. Предполагается, что трещина свободна от механических нагрузок, а нормальная составляющая вектора плотности электрического поля равна нулю на ее берегах. Для малых временных интервалов получено приближенное аналитическое выражение для вектора напряженности магнитного поля, температуры и термоупругих напряжений.

1. Как известно, в электропроводных телах прохождение электрического тока сопровождается выделением джоулева тепла и действием пондеромоторных сил. При определении температурных полей и механических напряжений можно использовать приближенную схему решения задачи, при которой не учитываются пондеромоторные силы, механоэлектрические эффекты и связанность полей деформаций и температуры [1]. Тогда из уравнений электродинамики определяется электромагнитное поле и обусловленное им распределение тепловых источников, позволяющее затем найти температурное поле из решения соответствующего уравнения теплопроводности. На заключительном этапе, с учетом определенного температурного поля, исследуется напряженно-деформируемое состояние на основе уравнений квазистатической задачи термоупругости.



Следуя этой схеме, рассмотрим неограниченную тонкую пластинку $-\infty<x$, $y<\infty$, $|z|<h$ ($2h$ — толщина пластинки), через которую пропускается постоянный ток с вектором плотности $\mathbf{j}_0=\{0, J_0, 0\}$, $J_0=\text{const}$. Тогда электромагнитное поле в пластинке будет $\mathbf{H}_0=\{J_0z, 0, 0\}$, $E_0=j_0/\sigma$, где σ — проводимость материала.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ в пластинке образуется трещина конечной длины, расположенная на участке $y=0$, $|x|<l$ (фигура). Для определения возмущенного электромагнитного поля используем уравнение Максвелла, пренебрегая при этом токами смещения, механоэлектрическими и термоэлектрическими эффектами, поляризацией и намагничиванием. Предполагая, что векторы напряженности электрического и магнитного полей для пластинки с трещиной имеют вид

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_0+\mathbf{H}^*, \quad \mathbf{E}=\mathbf{E}_0+\mathbf{E}^*$$

$$\mathbf{H}^*=\{0, 0, H_z^*(x, y, t)\}, \quad \mathbf{E}^*=\{E_x^*(x, y, t), \ E_y^*(x, y, t), 0\} \qquad (1.1)$$

запишем уравнения Максвелла для проводящей среды:

$$\partial E_x^*/\partial x+\partial E_y^*/\partial y=0, \quad \partial E_y^*/\partial x-\partial E_x^*/\partial y=-\mu_a(\partial H_z^*/\partial t) \tag{1.2}$$

$$\partial H_z^*/\partial y=\sigma E_x^*=j_x, \quad J_0-\partial H_z^*/\partial x=\sigma E_y^*=j_y \tag{1.3}$$

где μ_a — магнитная проницаемость, $\mathbf{j}=\{j_x, j_y, 0\}$ — вектор плотности тока.

С учетом (1.3) первое из уравнений (1.2) удовлетворяется тождественно, а из второго уравнения (1.2) находим

$$\partial^2 H_z^*/\partial x^2+\partial^2 H_z^*/\partial y^2=\sigma\mu_a(\partial H_z^*/\partial t) \tag{1.4}$$

причем функция H_z^* должна удовлетворять нулевому начальному условию $H_z^*(x, y, 0)=0$.

Если считать трещину непроводящей в направлении, перпендикулярном ее плоскости, то функция $H_z^*(x, y, t)$ при $y=0$ должна удовлетворять граничным условиям вида

$$-J_0+\left.\frac{\partial H_z^*}{\partial x}\right|_{y=0}=0 \quad (|x|<l) \tag{1.5}$$

$$\left.\frac{\partial H_z^*}{\partial y}\right|_{y=0}=0 \quad (|x|>l) \tag{1.6}$$

Заметим, что равенство (1.6) вытекает из условия симметрии электромагнитного поля в окрестности трещины и соответствует нулевому значению компоненты j_x вектора плотности тока в области $y=0$, $|x|>l$.

Таким образом, возмущенное электромагнитное поле определяется при помощи функции $H_z^*(x, y, t)$, удовлетворяющей уравнению (1.4), граничным условиям (1.5), (1.6) и нулевому начальному условию.

Применяя к уравнению (1.5) и условиям (1.5), (1.6) преобразование Лапласа, получим

$$\partial^2 H_z'^*/\partial x^2+\partial^2 H_z'^*/\partial y^2-k^2 H_z'^*=0 \tag{1.7}$$

$$\left.\frac{\partial H'^*}{\partial x}\right|_{y=0}=\frac{J_0}{p} \quad (|x|<l), \qquad \left.\frac{\partial H_z'^*}{\partial y}\right|_{y=0}=0 \quad (|x|>l) \tag{1.8}$$

$$H_z'^*(x, y, p)=\int_0^\infty H_z^*(x, y, t)e^{-pt}\,dt, \qquad k^2=p\sigma\mu_a$$

С учетом симметрии магнитного поля решение уравнения (1.7) представим в виде

$$H_z'^*(x, y, p)=\int_0^\infty A(\lambda)\exp\left(-y\sqrt{\lambda^2+k^2}\right)\sin\lambda x\,d\lambda \,(y>0, \quad x>0) \tag{1.9}$$

Тогда условия (1.8) приводят к парным интегральным уравнениям относительно функции $A(\lambda)$:

$$\int_0^\infty A(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda=\frac{J_0}{p}x \qquad (0\leqslant x<l) \tag{1.10}$$

$$\int_0^\infty \sqrt{\lambda^2+k^2}\,A(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda=0 \qquad (l<x<\infty) \tag{1.11}$$

2. Ниже предлагается приближенный метод определения электромагнитного поля для малых времен (при $t=0$), позволяющий получить достаточно простое аналитическое выражение для функции $H_z^*(x, y, t)$, которое точно удовлетворяет уравнению (1.4), условию (1.5) и приближенно — условию (1.6). Решение парных уравнений (1.10), (1.11) будем искать в виде

$$A(\lambda)=\frac{2J_0}{\pi p}\left[\frac{\sin\lambda l}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}\int\limits_l^\infty g'(\xi)\cos\lambda\xi\, a\xi\right] \tag{2.1}$$

где функция $g(\xi)$ такова, что $g(\infty)=0$, $g(l)=l$.

Подставляя (2.1) в (1.11), (1.12) и учитывая, что

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\sin\lambda l\sin\lambda x}{\lambda^2}d\lambda=\begin{cases}x & (0\leqslant x\leqslant l)\\ l & (l\leqslant x<\infty)\end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\sin\lambda x\cos\lambda x}{\lambda}d\lambda=\begin{cases}1 & (\xi<x)\\ 0 & (\xi>x)\end{cases}$$

убеждаемся, что равенство (1.10) выполняется тождественно, а условие (1.11) принимает вид

$$\int\limits_0^\infty\sqrt{\lambda^2+k^2}\left[\frac{\sin\lambda l}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}\int\limits_l^\infty g'(\xi)\cos\lambda\xi d\xi\right]\sin\lambda x d\lambda=0 \quad (x>l) \tag{2.2}$$

Воздействуем на (2.2) оператором

$$e^{k\eta}\int\limits_\eta^\infty\frac{e^{-kx}(\ldots)dx}{\sqrt{x-\eta}} \quad (\eta>l)$$

и воспользуемся значением интеграла [2]:

$$e^{k\eta}\int\limits_\eta^\infty\frac{e^{-kx}\sin\lambda x dx}{\sqrt{x-\eta}}=\frac{i\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{e^{-i\lambda\eta}}{\sqrt{k+i\lambda}}-\frac{e^{i\lambda\eta}}{\sqrt{k-i\lambda}}\right)$$

Тогда уравнение (2.2) можно записать в виде

$$\frac{d}{d\eta}e^{k\eta}\int\limits_0^\infty\left[\frac{\sin\lambda l}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}\int\limits_l^\infty g'(\xi)\cos\lambda\xi d\xi\right]\left(\frac{e^{-i\lambda\eta}}{\sqrt{k-i\lambda}}-\frac{e^{i\lambda\eta}}{\sqrt{k+i\lambda}}\right)d\lambda=0 \quad (\eta>l). \tag{2.3}$$

Для удобства дальнейших преобразований соотношения (2.3) рассмотрим разрывный интеграл [2]:

$$\int\limits_0^\infty\left(\frac{e^{-i\lambda\eta}}{\sqrt{k-i\lambda}}-\frac{e^{i\lambda\eta}}{\sqrt{k+i\lambda}}\right)\sin\lambda x d\lambda=i\sqrt{\pi}\begin{cases}Q_1 & (\eta>x)\\ Q_2 & (\eta<x)\end{cases}$$

$$Q_1=Q_2-\frac{e^{-k(\eta-x)}}{\sqrt{\eta-x}},\quad Q_2=\frac{e^{-k(\eta+x)}}{\sqrt{\eta+x}} \tag{2.4}$$

Дважды интегрируя по x равенство (2.4), получим

$$\int\limits_0^\infty\left(\frac{e^{-i\lambda\eta}}{\sqrt{k-i\lambda}}-\frac{e^{i\lambda\eta}}{\sqrt{k+i\lambda}}\right)\frac{\cos\lambda x}{\lambda}d\lambda=$$

$$=\frac{\pi i}{\sqrt{k}}\operatorname{Erfc}(\sqrt{k(\eta+\xi)})-\frac{\pi i}{\sqrt{k}}\begin{cases}\operatorname{Erf}(\sqrt{k(\eta-\xi)}) & (\xi<\eta)\\ 0 & (\xi>\eta)\end{cases} \tag{2.5}$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-i\lambda\eta}}{\sqrt{k-i\lambda}} - \frac{e^{i\lambda\eta}}{\sqrt{k+i\lambda}}\right)\frac{\sin\lambda l}{\lambda^2}\,d\lambda = \frac{\pi i l}{\sqrt{k}} - \frac{\pi i}{\sqrt{k}}\int_0^l [\operatorname{Erf}(\sqrt{k(\eta+\xi)}) +$$

$$+\operatorname{Erf}(\sqrt{k(\eta-\xi)})]\,d\xi \quad (\eta>l)$$

$$\tag{2.6}$$

$$\operatorname{Erfc}(z) = 1 - \operatorname{Erf}(z), \quad \operatorname{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\xi^2}d\xi$$

С учетом (2.5), (2.6) уравнение (2.3) принимает вид

$$\frac{d}{d\eta}e^{k\eta}\Bigg\{l - \int_0^l [\operatorname{Erf}(\sqrt{k(\eta+\xi)}) + \operatorname{Erf}(\sqrt{k(\eta-\xi)})]\,d\xi +$$

$$+\int_l^\infty g'(\xi)\operatorname{Erfc}(\sqrt{k(\eta+\xi)})\,d\xi - \int_l^\eta g'(\xi)\operatorname{Erf}(\sqrt{k(\eta-\xi)})\,d\xi\Bigg\} = 0 \quad (\eta>l)$$

$$\tag{2.7}$$

После интегрирования по частям в последнем интеграле левой части (2.7) находим

$$\int_l^\eta \frac{g(\xi)e^{k\xi}d\xi}{\sqrt{\eta-\xi}} = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\Bigg[C + le^{k\eta}\operatorname{Erf}(\sqrt{k(\eta-l)}) - e^{k\eta}\int_0^l \operatorname{Erf}(\sqrt{k(\eta-\xi)})\,d\xi +$$

$$\tag{2.8}$$

$$+e^{k\eta}\int_l^\infty g'(\xi)\operatorname{Erfc}(\sqrt{k(\eta+\xi)})\,d\xi + e^{k\eta}\int_0^l \operatorname{Erfc}(\sqrt{k(\eta+\xi)})\,d\xi\Bigg]$$

где C — некоторая постоянная, определяемая из условия $g(l)=l$.

Интегральное уравнение (2.8) допускает эффективное аналитическое решение при $kl\gg 1$. В этом случае можно принять $\operatorname{Erfc}(k^{1/2}(\eta+\xi)^{1/2})\cong 1$ при $\eta>l$, $0\leqslant\xi<\infty$, и тогда (2.8) принимает вид уравнения Абеля

$$\int_l \frac{g(\xi)e^{k\xi}d\xi}{\sqrt{\eta-\xi}} = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\Bigg[C + le^{k\eta}\operatorname{Erf}(\sqrt{k(\eta-l)}) - e^{k\eta}\int_0 \operatorname{Erf}(\sqrt{k(\eta-\xi)})\,d\xi\Bigg]$$

$$\tag{2.9}$$

Приближенное решение уравнения (2.9) для $kl\gg 1$ и при условии $g(l)=l$ будет

$$g(\xi) \approx \xi\operatorname{Erfc}(\sqrt{k(\xi-l)}) - \frac{\sqrt{\xi-l}}{\sqrt{\pi k}}\exp(-k(\xi-l)) \quad (\xi>l) \tag{2.10}$$

Подставляя (2.10) в (2.1), получим выражение для $A(\lambda)$, а затем по формуле (1.9) определим функцию $H'^*(x, y, p)$. Не останавливаясь на громоздких преобразованиях, связанных с вычислением интегралов, приведем окончательный результат

$$H_z'^*(x, y, p) = \frac{J_0}{p}\Bigg\{xe^{ky} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2k}\right)[e^{-ky}\operatorname{Erf}(\sqrt{k(r_2-y)}) -$$

$$-e^{ky}\operatorname{Erf}(\sqrt{k(r_2+y)})] \pm \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2k}\right)\times$$

$$\times[e^{-ky}\,\mathrm{Erf}(\sqrt{k(r_1-y)})\mp\mathrm{Erf}(\sqrt{k(r_1+y)})\,e^{ky}]+\frac{1}{2\sqrt{k\pi}}(\sqrt{r_2+y}-\sqrt{r_2-y})\,e^{-kr_2}-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{k\pi}}(\sqrt{r_1+y}\mp\sqrt{r_1-y})\,e^{-kr_1}\Big\} \qquad (2.11)$$

$$r_1=\sqrt{y^2+(l-x)^2},\quad r_2=\sqrt{y^2+(l+x)^2}$$

где верхние знаки соответствуют области $x<l$, а нижние — области $x>l$.

При помощи интегральных представлений для функций $\mathrm{Erfc}(z)$ и $\mathrm{Erf}(z)$ запишем (2.11) в виде, удобном для выполнения обратного преобразования Лапласа

$$H_z{}'^*(x,y,p)=\frac{J_0}{\sqrt{\pi p}}\Big\{x\sqrt{k}\int_y^\infty\frac{e^{-k\eta}d\eta}{\sqrt{\eta+y}}+\frac{\sqrt{k}}{2}\left(x+\frac{1}{2k}\right)\int_y^{r_2}e^{-k\eta}\left(\frac{1}{\sqrt{\eta-y}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{\eta+y}}\right)d\eta\pm\frac{\sqrt{k}}{2}\left(x-\frac{1}{2k}\right)\int_y^{r_1}e^{-k\eta}\left(\frac{1}{\sqrt{\eta-y}}\mp\frac{1}{\sqrt{\eta+y}}\right)d\eta+ \qquad (2.12)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{k}}(\sqrt{r_2+y}-\sqrt{r_2-y})\,e^{-kr_2}-\frac{1}{2\sqrt{k}}(\sqrt{r_1+y}\mp\sqrt{r_1-y})\,e^{-kr_1}\Big\}$$

С учетом соотношений [2]:

$$\frac{1}{p^{3/4}}e^{-\alpha\sqrt{p}}\risingdotseq\frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}\,t^{1/4}}e^{-3/8\,\alpha^2/t}D_{-1/2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2t}}\right)$$

$$\frac{1}{p^{5/4}}e^{-\alpha\sqrt{p}}\risingdotseq\frac{2^{3/4}}{\sqrt{\pi}}t^{1/4}e^{-\alpha^2/8t}D_{-3/2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2t}}\right)$$

где $D_{-\nu}(z)$ — функция параболического цилиндра, перейдем к оригиналу в выражении (2.12). В результате получим следующее приближенное представление для $H_z^*(x,y,t)$ при $t\to 0$:

$$(2.13)$$

$$H_z^*(x,y,t)=\frac{J_0 l}{\pi}\Big\{x_1 2^{-1/4}\tau^{-1/4}\int_{y_1}^\infty\frac{e^{-\eta^2/(8\tau)}}{\sqrt{\eta+y_1}}D_{-1/2}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2\tau}}\right)d\eta+2^{-3/4}\tau^{-1/4}\int_{y_1}^{\rho_2}e^{-\eta^2/(8\tau)}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{\eta-y_1}}-\frac{1}{\sqrt{\eta+y_1}}\right)\left[x_1D_{-1/2}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2\tau}}\right)+2^{-1/2}\tau D_{-3/2}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2\tau}}\right)\right]d\eta\pm$$

$$\pm2^{-3/4}\tau^{-1/4}\int_{y_1}^{\rho_1}e^{-\eta^2/(8\tau)}\left(\frac{1}{\sqrt{\eta-y_1}}\mp\frac{1}{\sqrt{\eta+y_1}}\right)\left[x_1D_{-1/2}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2\tau}}\right)-2^{-1/2}\tau D_{-3/2}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2\tau}}\right)\right]\times$$

$$\times d\eta+2^{-1/4}\tau^{1/4}(\sqrt{\rho_2+y_1}-\sqrt{\rho_2-y_1})\,e^{-\rho_2^2/(8\tau)}D_{-3/2}\left(\frac{\rho_2}{\sqrt{2\tau}}\right)-$$

$$-2^{-1/4}\tau^{1/4}(\sqrt{\rho_1+y_1}\mp\sqrt{\rho_1-y_1})\,e^{-\rho_1^2/(8\tau)}D_{-3/2}\left(\frac{\rho_1}{\sqrt{2\tau}}\right)\Big\}$$

$$x_1=x/l,\quad y_1=y/l,\quad \rho_1=r_1/l,\quad \rho_2=r_2/l,\quad \tau=t/(l^2\sigma\mu_a)$$

Отметим, что выражение (2.13) точно удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.4) и граничному условию (1.5) для любых $t>0$, но при этом условие (1.6) выполняется приближенно только при $t\to 0$. Действительно, на основании (2.11) имеем

$$\left.\frac{\partial H_z'^*(x,y,p)}{\partial y}\right|_{\substack{y=0\\x>0}}=\frac{J_0}{p}\left\{kx-\left(kx+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Erf}(\sqrt{k(x+l)})-\right.$$

$$\left.-\frac{x\sqrt{k}\exp[-k(x+l)]}{\sqrt{\pi(x+l)}}\right\}\approx 0 \quad \text{при} \quad kl\gg 1$$

В [3, 4] экспериментально исследовалась концентрация электромагнитного и теплового поля в проводящем образце с трещиной. При пропускании по образцу (прямоугольная пластинка с краевой трещиной) импульса тока большой интенсивности в вершине трещины наблюдалась концентрация электромагнитного поля и интенсивный разогрев материала, приводящий к росту радиуса кривизны в вершине трещины. При дальнейшем развитии процесса происходит мощный микроразрыв, в результате которого в кончике трещины образовался микрократер. Далее утверждалось, что в окрестности вершины непроводящей трещины наблюдается концентрация магнитного поля, которая может быть использована для получения в микрообъемах мегаэрстедных магнитных полей. Как следует из изложенного выше, в действительности имеет место концентрация электрического поля и в окрестности вершины трещины будут неограниченными компоненты $j_x=\sigma E_x$, $j_y=\sigma E_y$. Используя (2.13), можно показать, что компоненты вектора тока в окрестности вершины трещины имеют вид

$$j_x\cong-\frac{J_0}{\pi}\frac{\sin{}^1/_2\theta}{\sqrt{\rho}}\frac{2^{1/4}}{\tau^{1/4}}e^{-\gamma}D_{-1/2}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2\tau}}\right) \tag{2.14}$$

$$j_y\cong\frac{J_0}{\pi}\frac{\cos{}^1/_2\theta}{\sqrt{\rho}}\frac{2^{1/4}}{\tau^{1/4}}e^{-\gamma}D_{-1/2}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2\tau}}\right),\quad \rho=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}$$

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1-1},\quad \gamma=\rho^2/(8\tau)\quad (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

где ρ, θ — полярные координаты, связанные с вершиной трещины $x=l$.

Заметим, что асимптотические формулы (2.14) отличаются от соответствующих выражений, полученных в [5] для полубесконечного непроводящего разреза $y=0$, $x<0$, который мгновенно возникает в бесконечной пластинке с постоянным током. Для полубесконечного разреза асимптотические формулы для компонентов вектора плотности электрического тока в окрестности вершины $x=0$, $y=0$ имеют вид

$$j_x\cong-\frac{J_0}{\pi}\frac{\sin{}^1/_2\theta}{\sqrt{\rho}}\frac{\tau^{1/4}}{2^{1/4}}e^{-\gamma}D_{-3/2}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2\tau}}\right) \tag{2.15}$$

$$j_y\cong\frac{J_0}{\pi}\frac{\cos{}^1/_2\theta}{\sqrt{\rho}}\frac{\tau^{1/4}}{2^{1/4}}e^{-\gamma}D_{-3/2}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2\tau}}\right)\quad (\rho\to 0,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

и соответствуют автомодельному решению задачи.

Для сравнения асимптотик (2.14) и (2.15) при $\tau\to 0$ (ρ фиксировано) воспользуемся формулой [6]: $D_\nu(z)\sim z^\nu e^{-z^2/4}$ $(z\to\infty)$.

В результате получим для разреза конечной длины

$$j_x\cong-\frac{J_0}{2^{3/2}\pi}\sin{}^1/_2\theta\frac{4e^{-2\gamma}}{\rho}\approx-\frac{J_0\sin{}^1/_2\theta}{2^{3/2}\pi}\frac{4}{\rho}\left(1+\frac{\tau}{\rho}\right)e^{-2\gamma}$$

$$j_y\cong\frac{J_0}{2^{3/2}\pi}\cos\frac{1}{2}\theta\frac{4e^{-2\gamma}}{\rho}\approx\frac{J_0\cos{}^1/_2\theta}{2^{3/2}\pi}\frac{4}{\rho}\left(1+\frac{\tau}{\rho}\right)e^{-2\gamma}\quad(\tau\to 0) \tag{2.16}$$

для полубесконечного разреза

$$j_x \cong -\frac{J_0 \sin {}^1/{}_2\theta}{2^{3/2}\pi} \frac{4\tau}{\rho^2} e^{-2\gamma}, \quad j_y \cong \frac{J_0 \cos {}^1/{}_2\theta}{2^{3/2}\pi} \frac{4\tau}{\rho^2} e^{-2\gamma} \tag{2.17}$$

3. Перейдем к определению температурного поля и температурных напряжений, обусловленных действием джоулевых тепловых источников. При определении температуры будем предполагать, что через поверхности $z=\pm h$ тонкой пластинки происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры по закону Ньютона. Для случая симметричного относительно плоскости $z=0$ распределения температуры уравнение теплопроводности имеет вид [7]:

$$\nabla^2 T^* - \frac{\alpha}{\lambda h} T^* - \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial T^*}{\partial t} = -\frac{Q}{\lambda}$$

$$T^*(x, y, t) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} T^* dz, \quad \varkappa^2 = \frac{\lambda}{c\rho} \tag{3.1}$$

где α — коэффициент теплоотдачи с поверхностей $z=\pm h$, λ — коэффициент теплопроводности, c — теплоемкость, ρ — плотность, Q — мощность джоулевых тепловых источников.

По появления трещины в пластинке, через которую пропускается постоянный ток, установится постоянная температура $T_0^* = J_0^2 h/\alpha\sigma$. Следовательно, решение уравнения (3.1) будет удовлетворять начальному условию $T^*(x, y, 0) = T_0^*$.

Используя асимптотические представления для компонентов вектора плотности тока (2.14), найдем мощность тепловых источников в окрестности вершины трещин ($x=l$, $y=0$):

$$Q = \frac{J_0^2 \sqrt{2}}{\pi^2 \sigma \rho \sqrt{\tau}} e^{-2\gamma} D^2_{-1/2}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2\tau}}\right) \approx \frac{J_0^2 e^{-2\gamma}}{\pi \sigma \rho \sqrt{\tau} \Gamma^2({}^3/{}_4)} \text{ при } \rho \to 0 \tag{3.2}$$

Здесь учтено, что $D_{-1/2}(0) = \pi^{1/2} 2^{-1/4} / \Gamma({}^3/{}_4)$. Принимая во внимание (3.2), запишем уравнение (3.1) в полярных координатах ρ, θ:

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T^*}{\partial \rho} - \alpha_0 T^* - \frac{1}{a^2} \frac{\partial T^*}{\partial \tau} = -\frac{J_0^2 l^2 e^{-2\gamma}}{\lambda \sigma \rho \sqrt{\tau \pi} \Gamma^2({}^3/{}_4)} \tag{3.3}$$

$$\alpha_0 = \alpha l^2/\lambda h, \quad a^2 = \varkappa^2 \sigma \mu_a$$

Решение уравнения (3.3) при начальном условии представим в виде

$$T^*(\rho, \tau) = T_0^* e^{-\alpha_0 a^2 \tau} + T_1^*(\rho, \tau) \tag{3.4}$$

где функция $T_1^*(\rho, \tau)$ удовлетворяет уравнению (3.3) и нулевому начальному условию.

На основе интегрального преобразования Ханкеля и с учетом равенства [2]:

$$e^{-\rho^2/(4\tau)} \frac{1}{\rho} = \sqrt{\pi\tau} \int_0^\infty \xi e^{-1/2 \xi^2 \tau} I_0\left(\xi^2 \frac{\tau}{2}\right) J_0(\xi\rho)\, d\xi$$

найдем решение уравнения (3.4) при нулевом начальном условии

$$T_1^*(\rho, \tau) = \frac{J_0^2 l^2 a^2}{\lambda \sigma \sqrt{\pi} \Gamma^2({}^3/{}_4)} \int_0^\tau \exp[-a^2 \alpha_0 (\tau - \gamma)]$$

$$\int_0^\infty \xi \exp\left\{-\xi^2\left[\frac{\gamma}{2}+a^2(\tau-\gamma)\right]\right\} I_0\left(\frac{1}{2}\xi^2\tau\right) J_0(\xi\rho)\,d\xi\,d\gamma \tag{3.5}$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

Таким образом, получим следующее выражение для температуры в окрестности вершины трещины:

$$T^*(\rho,\tau)=T_0^*\left\{e^{-\alpha_0 a^2\tau}+\frac{\alpha_0 a^2}{\sqrt{\pi}\Gamma^2(^3/_4)}\int_0^\tau \exp[-a^2\alpha_0(\tau-\gamma)]\int_0^\infty \xi\exp\left\{-\xi^2\left[\frac{\gamma}{2}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+a^2(\tau-\gamma)\right]\right\} I_0\left(\frac{1}{2}\xi^2\tau\right) J_0(\xi\rho)\,d\xi\,d\gamma\right\} \tag{3.6}$$

Полагая в (3.6) $\rho=0$ и вычисляя внутренний интеграл, найдем температуру в вершине трещины

$$T^*(0,\tau)=T_0^*\left\{e^{-\alpha_0 a^2\tau}+\frac{\alpha_0 a}{2\sqrt{\pi}\Gamma^2(^3/_4)}\int_0^\tau \frac{\exp[-a^2\alpha_0(\tau-\gamma)]\,d\gamma}{\sqrt{\tau-\gamma}\sqrt{\tau-(1-a^2)(\tau-\gamma)}}\right\} \tag{3.7}$$

Если принять $a^2 \ll 1$ (например, $a^2=0{,}845\cdot 10^{-2}$ для меди), то интеграл в (3.7) можно вычислить и тогда

$$T^*(0,\tau)\approx T_0^*\left\{e^{-\alpha_0 a^2\tau}+\frac{\alpha_0 a\sqrt{\pi}}{2\Gamma^2(^3/_4)}e^{-{}^1/_2 a^2\alpha_0\tau} I_0\left(\frac{1}{2}a^2\alpha_0\tau\right)\right\} \tag{3.8}$$

Следовательно, в момент образования трещины температура в ее вершине мгновенно возрастает до величины

$$T^*(0,0)\cong T_0^*\left(1+\frac{\alpha_0 a\sqrt{\pi}}{2\Gamma^2(^3/_4)}\right)=T_0(1+0{,}5\alpha_0 a) \tag{3.9}$$

и при больших значениях параметра $\alpha_0 a$ может значительно превосходить T_0^*, достигая температуры плавления материала.

Приведем оценку напряженного состояния в окрестности вершины трещины, используя при этом квазистационарную постановку задачи термоупругости и выражение (3.6) для функции температуры. В этом случае компоненты термоупругих напряжений в окрестности точки $\rho=0$ определяются по формулам

$$\sigma_{rr}=-\frac{2\mu}{l^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho},\quad \sigma_{\theta\theta}=-\frac{2\mu}{l^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} \tag{3.10}$$

где $\Phi(\rho,\tau)$ — термоупругий потенциал, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\Phi}{d\rho}\right)=ml^2T(\rho,\tau),\qquad m=(1+\nu)\alpha_t \tag{3.11}$$

Здесь μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, α_t — коэффициент линейного расширения.

Интегрируя уравнение (3.11) и подставляя $\Phi(\rho,\tau)$ в (3.10), получим

$$\sigma_{rr}=-2\mu(1+\nu)\alpha_t\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\int_0^\rho \xi T^*(\xi,\tau)\,d\xi$$

$$\sigma_{\theta\theta}=-2\mu(1+\nu)\alpha_t\left[T^*(\rho,\tau)-\frac{1}{\rho^2}\int\limits_0^\rho \xi T^*(\xi,\tau)\,d\xi\right] \qquad (3.12)$$

Равенства (3.12) показывают, что в окрестности вершины мгновенно возникшей трещины существуют сжимающие напряжения, которые будут препятствовать ее дальнейшему развитию.

Таким образом, при пропускании электрического тока по образцу с трещиной может наблюдаться ее торможение, вызванное интенсивным разогревом материала в окрестности вершины трещины до температуры плавления и наличием сжимающих температурных напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Подстригач Я. С., Бурлак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В.* Термоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1977. 247 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1, 2. М.: Наука, 1969. 343 с; 1970. 327 с.
3. *Финкель В. М., Головин Ю. И., Слетков А. А.* О возможности торможения быстрых трещин импульсами тока.– Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 4, с. 848–851.
4. *Финкель В. М., Головин Ю. И., Слетков А. А.* Разрушение вершины трещины сильным электромагнитным полем.– Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 2, с. 325–327.
5. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А., Рубинский Б. Д.* Распространение трещины под действием электромагнитного поля.– Докл. АН СССР, 1980, т. 250, № 5, с. 1096–1100.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966. 295 с.
7. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Громовык В. И., Лобзень В. Л.* Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. Киев: Наукова думка, 1977. 158 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.IV.1980