

УДК 539.3

О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТРЕХ СООСНЫХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ КОНЕЧНЫХ ДЛИН

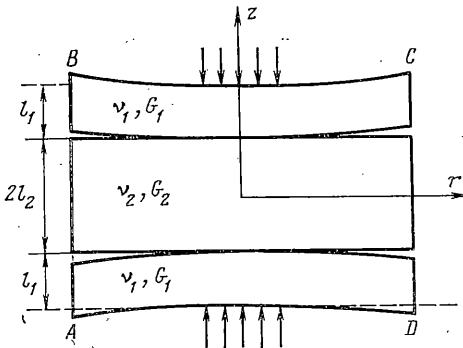
МАРТИРОСЯН З. А., ТОНОЯН В. С.

Рассматривается осесимметричная контактная задача теории упругости для трех соосных цилиндров, имеющих конечные длины и одинаковые диаметры. Цилиндры контактируют между собой торцами. Принимается, что наружные цилиндры имеют одинаковые длины и изготовлены из одинаковых материалов. Контакт между цилиндрами предполагается гладким, т. е. без сцепления, а зона, образованная вследствие контакта двух цилиндров, считается неизвестной и определяется в процессе решения задачи. Для простоты принимается, что на боковых поверхностях цилиндров нормальные и касательные напряжения равны нулю. На свободных торцах цилиндров приложены симметрично расположенные сжимающие нагрузки таким способом, что контактная область образуется в виде круга.

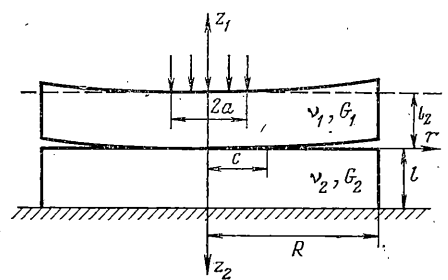
Решение рассматриваемой задачи представляется в виде рядов Фурье и Фурье — Дини с неизвестными коэффициентами, для определения которых получены две бесконечные системы со свободными членами, стремящимися к нулю. Окончательные выражения для контактных напряжений получены с выделенной особенностью. Для частных значений внешней нагрузки, упругих констант и размеров цилиндров вычислены размеры области контакта и напряжения в контактной зоне.

Подробная библиография по этому вопросу приводится в [1].

1. Пусть три цилиндра конечной длины и одинакового диаметра без сцепления прижаты торцами один к другому. На свободных торцах цилиндров симметрично приложены осесимметричные сжимающие нагрузки таким способом, что контактная область образуется в виде круга (фиг. 1).



Фиг. 1



Фиг. 2

На боковой поверхности цилиндров нормальные и касательные напряжения равны нулю.

В силу симметрии ограничимся рассмотрением верхней половины области (фиг. 1), т. е. решение рассматриваемой задачи сводится к решению контактной задачи для двух цилиндров (фиг. 2) при следующих граничных условиях:

$$\sigma_z^{(1)}(r, l_1) = \begin{cases} f(r) & (0 \leq r \leq a) \\ 0 & (a < r < R) \end{cases} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\beta_k r)$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(r, l_1) = 0 \quad (0 \leq r \leq R) \quad (1.1)$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(R, z) = \sigma_r^{(i)}(R, z) = 0 \quad (0 \leq z \leq l_i), \quad (i=1,2) \quad (1.2)$$

условиях контакта

$$\tau_{rz}^{(i)}(r, 0) = 0 \quad (i=1,2), \quad \sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0) \quad (0 \leq r \leq R) \quad (1.3)$$

$$u_z^{(1)}(r, 0) = -u_z^{(2)}(r, 0) \quad (0 \leq r \leq c), \quad \sigma_z^{(1)}(r, 0) = 0 \quad (c < r < R) \quad (1.4)$$

и условиях симметрии

$$\tau_{rz}^{(2)}(r, l_2) = u_z^{(2)}(r, l_2) = 0 \quad (0 \leq r \leq R) \quad (1.5)$$

где l_i ($i=1, 2$) — длины, R — радиус цилиндров, $J_n(x)$ — функция Бесселя действительного аргумента первого рода, а β_k — положительные корни уравнения $J_1(\beta_k R) = 0$.

Все величины, относящиеся к верхнему цилиндру, отмечены индексом 1, а к нижнему — индексом 2.

Решение задачи сводится к нахождению функций Лява $\Phi^{(i)}(r, z)$, которые удовлетворяют бигармоническому уравнению [2]:

$$\Delta^2 \Phi^{(i)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \Phi^{(i)}(r, z) = 0 \quad (i=1,2) \quad (1.6)$$

и условиям (1.1)–(1.5).

Напряжения и перемещения выражаются через функцию $\Phi^{(i)}(r, z)$ следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu_i) \Delta \Phi^{(i)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial z^2} \right], & \sigma_r^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_i \Delta \Phi^{(i)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial r^2} \right) \\ \tau_{rz}^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu_i) \Delta \Phi^{(i)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial z^2} \right], & \sigma_\varphi^{(i)} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_i \Delta \Phi^{(i)} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial r} \right) \\ u_z^{(i)} &= \frac{1}{2G_i} \left[2(1 - \nu_i) \Delta \Phi^{(i)} - \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial z^2} \right], & u_r^{(i)} &= -\frac{1}{2G_i} \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial r \partial z} \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (1.7)$$

где G_i — модули сдвига, а ν_i — коэффициенты Пуассона.

Решения уравнений (1.6) ищем в виде [3]:

$$\begin{aligned} \Phi^{(i)}(r, z) &= z(A_i r^2 + B_i z^2 + C_i z) + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k^{(i)} I_0(\lambda_{ki} r) + \\ &+ G_k^{(i)} \lambda_{ki} r I_1(\lambda_{ki} r)] \sin \lambda_{ki} z + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(i)} \operatorname{sh} \beta_k z + B_k^{(i)} \operatorname{ch} \beta_k z + \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$+ C_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z + D_k^{(i)} \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z) J_0(\beta_k r), \quad \lambda_{ki} = k\pi/l_i$$

где $I_n(x)$ — функция Бесселя первого рода мнимого аргумента.

Удовлетворяя условиям (1.1)–(1.5), с учетом (1.7) получаем

$$A_i = \nu_i a_0 / 2(1 + \nu_i), \quad B_i = (1 - 2\nu_i) a_0 / 6(1 + \nu_i) \quad (1.9)$$

$$C_2 = -l_2 a_0 / [2(1 - 2\nu_2)(1 + \nu_2)] \quad (1.10)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^3 \{ -A_k^{(1)} \operatorname{ch} \mu_{k1} - C_k^{(1)} (\mu_{k1} \operatorname{ch} \mu_{k1} - \operatorname{sh} \mu_{k1}) - D_k^{(1)} [\mu_{k1} \operatorname{sh} \mu_{k1} -$$

$$-(1-2\nu_1) \operatorname{ch} \mu_{k1}] J_0(\beta_k r) + \frac{4}{R} \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \lambda_{kh}^4 I_1(\lambda_{kh} R) G_h^{(1)} \times \\ \times \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^2}{(\lambda_{kh}^2 + \beta_p^2)^2} \frac{J_0(\beta_p r)}{J_0(\beta_p R)} = a_h$$

$$A_k^{(i)} \operatorname{sh} \mu_{ki} + C_k^{(i)} \mu_{ki} \operatorname{sh} \mu_{ki} + D_k^{(i)} (2\nu_i \operatorname{sh} \mu_{ki} + \mu_{ki} \operatorname{ch} \mu_{ki}) = 0 \quad (1.11)$$

$$\frac{4}{l_i} \sum_{h=1}^{\infty} \beta_h^4 J_0(\beta_h r) \left\{ C_h^{(i)} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^p \operatorname{ch} \mu_{ki} - 1}{\lambda_{pi}^2 + \beta_h^2} - \frac{(-1)^p \operatorname{ch} \mu_{ki} - 1}{(\lambda_{pi}^2 + \beta_h^2)^2} \beta_h^2 \right] + \right. \\ \left. + D_h^{(i)} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^p \operatorname{sh} \mu_{ki}}{(\lambda_{pi}^2 + \beta_h^2)^2} - \frac{\beta_h^2 \operatorname{sh} \mu_{ki}}{(\lambda_{pi}^2 + \beta_h^2)^2} \right] \right\} \cos \lambda_{pi} z - \\ (1.12)$$

$$- \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_{hi}^3 I_1(\lambda_{hi} R) \varphi_h^{(i)} G_h^{(i)} \cos \lambda_{hi} z = 0$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \beta_h^3 [-A_k^{(1)} + (1-2\nu_1) D_k^{(1)}] J_0(\beta_k r) + \quad (1.13)$$

$$+ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{4}{R} \lambda_{h1}^4 I_1(\lambda_{h1} R) G_h^{(1)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^2 J_0(\beta_p r)}{(\lambda_{h1}^2 + \beta_p^2)^2 J_0(\beta_p R)} =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \beta_h^3 [-A_k^{(2)} + (1-2\nu_2) D_k^{(2)}] J_0(\beta_k r) +$$

$$+ \frac{4}{R} \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_{h2}^4 I_1(\lambda_{h2} R) G_h^{(2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^2 J_0(\beta_p r)}{(\lambda_{h2}^2 + \beta_p^2)^2 J_0(\beta_p R)}$$

$$A_k^{(2)} \operatorname{sh} \mu_{k2} + C_k^{(2)} [\mu_{k2} \operatorname{sh} \mu_{k2} - 2(1-2\nu_2) \operatorname{ch} \mu_{k2}] + \\ + D_k^{(2)} [\mu_{k2} \operatorname{ch} \mu_{k2} - 2(1-2\nu_2) \operatorname{sh} \mu_{k2}] = 0 \quad (1.14)$$

$$(1-2\nu_1) C_1 + G(1-2\nu_2) C_2 + \sum_{h=1}^{\infty} \beta_h^2 [(1-\nu_1) C_k^{(1)} + G(1-\nu_2) C_k^{(2)}] J_0(\beta_k r) = 0$$

$$(0 \leq r < c) \quad (1.15)$$

$$a_0 + \sum_{h=1}^{\infty} \beta_h^3 [-A_k^{(1)} + (1-2\nu_1) D_k^{(1)}] J_0(\beta_k r) +$$

$$+ \frac{4}{R} \sum_{h=1}^{\infty} \lambda_{h1}^4 I_1(\lambda_{h1} R) G_h^{(1)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^2 J_0(\beta_p R)}{(\lambda_{h1}^2 + \beta_p^2)^2 J_0(\beta_p R)} = 0 \quad (c < r < R)$$

$$E_k^{(i)} I_1(\lambda_{hi} R) + G_h^{(i)} [2(1-\nu_i) I_1(\lambda_{hi} R) + \lambda_{hi} R I_0(\lambda_{hi} R)] = 0 \quad (1.16)$$

$$B_k^{(i)} + 2\nu_i C_k^{(i)} = 0, \quad \mu_{ki} = \beta_k l_i, \quad G = G_1/G_2$$

$$\varphi_k^{(i)} = \lambda_{ki} R - \lambda_{ki} R \frac{I_0^2(\lambda_{ki} R)}{I_1^2(\lambda_{ki} R)} + \frac{2(1-\nu_i)}{\lambda_{ki} R}$$

При выводе (1.10)–(1.15) использованы разложения функций $\text{sh } \beta_k z$, $\text{ch } \beta_k z$, $\beta_k z \text{ sh } \beta_k z$, $\beta_k z \text{ ch } \beta_k z$ по $\cos \lambda_{pi} z$, функций $I_0(\lambda_{ki} r)$ и $\lambda_{ki} r I_1(\lambda_{ki} r)$ по $J_0(\beta_p r)$ и соотношения (1.16). Введем обозначения

$$-A_k^{(i)} + (1-2\nu_i) D_k^{(i)} = X_k/\beta_k^3, \quad \lambda_{ki}^3 I_1(\lambda_{ki} R) G_k^{(i)} = Y_k^{(i)}$$

Тогда из соотношений (1.10), (1.11), (1.13), (1.14) получим

$$\Delta_k^{(1)} C_k^{(1)} = -H \frac{X_k}{\beta_k^3} - \frac{4F_k}{\beta_k R J_0(\beta_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda_{p1} Y_p^{(1)}}{(\lambda_{p1}^2 + \beta_k^2)^2} + F_k \frac{a_k}{\beta_k^3} \quad (1.17)$$

$$\Delta_k^{(1)} D_k^{(1)} = \text{sh}^2 \mu_{k1} \frac{X_k}{\beta_k^3} + \frac{4\mu_{k1} \text{sh } \mu_{k1}}{\beta_k R J_0(\beta_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda_{p1} Y_p^{(1)}}{(\lambda_{p1}^2 + \beta_k^2)^2} - \mu_{k1} \text{sh } \mu_{k1} \frac{a_k}{\beta_k^3}$$

$$\Delta_k^{(2)} C_k^{(2)} = -\text{sh}^2 \mu_{k2} \left\{ \frac{X_k}{\beta_k^3} + \frac{4}{\beta_k R J_0(\beta_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_{p2} Y_p^{(1)}}{(\lambda_{p1}^2 + \beta_k^2)^2} - \frac{\lambda_{p2} Y_p^{(2)}}{(\lambda_{p2}^2 + \beta_k^2)^2} \right] \right\}$$

$$\Delta_k^{(2)} D_k^{(2)} = \text{sh } \mu_{k2} \text{ch } \mu_{k2} \left\{ \frac{X_k}{\beta_k^3} + \frac{4}{\beta_k R J_0(\beta_k R)} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_{p1} Y_p^{(1)}}{(\lambda_{p1}^2 + \beta_k^2)^2} - \frac{\lambda_{p2} Y_p^{(2)}}{(\lambda_{p2}^2 + \beta_k^2)^2} \right] \right\}$$

$$H_k = \text{sh } \mu_{k1} \text{ch } \mu_{k1} + \mu_{k1}, \quad F_k = \text{sh } \mu_{k1} + \mu_{k1} \text{ch } \mu_{k1}$$

$$\Delta_k^{(1)} = \text{sh}^2 \mu_{k1} - \mu_{k1}^2, \quad \Delta_k^{(2)} = \text{sh } \mu_{k2} \text{ch } \mu_{k2} + \mu_{k2}$$

Подставляя значения $C_k^{(i)}$ в (1.15), получим следующую систему парных рядов – уравнений, содержащих функции Бесселя:

$$q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (1+M_k) \frac{X_k}{\beta_k} J_0(\beta_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} N_k J_0(\beta_k r) \quad (0 \leq r < c) \quad (1.18)$$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k J_0(\beta_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k J_0(\beta_k r) \quad (c < r < R)$$

$$q_0 = -[(1-2\nu_1)C_1 + G(1-2\nu_2)C_2] / [1-\nu_1 + G(1-\nu_2)]$$

$$M_k = \alpha M_k^{(1)} - (1-\alpha) M_k^{(2)}, \quad \alpha = (1-\nu_1) / [1-\nu_1 + G(1-\nu_2)]$$

$$M_k^{(1)} = \frac{\text{sh } \mu_{k1} (\text{ch } \mu_{k1} - \text{sh } \mu_{k1}) + \mu_{k1} (1 + \mu_{k1})}{\text{sh}^2 \mu_{k1} - \mu_{k1}^2}$$

$$M_k^{(2)} = \frac{\text{sh } \mu_{k2} (\text{ch } \mu_{k2} - \text{sh } \mu_{k2}) + \mu_{k2}}{\text{sh } \mu_{k2} \text{ch } \mu_{k2} + \mu_{k2}}$$

$$N_k = -\frac{4\beta_k}{R J_0(\beta_k R)} \left\{ \frac{\alpha F_k}{\Delta_k^{(1)}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \lambda_{p1} Y_p^{(1)}}{(\lambda_{p1}^2 + \beta_k^2)^2} + \right.$$

$$\left. + (1-\alpha) \frac{\text{sh}^2 \mu_{k2}}{\Delta_k^{(2)}} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_{p1} Y_p^{(1)}}{(\lambda_{p1}^2 + \beta_k^2)^2} - \frac{\lambda_{p2} Y_p^{(2)}}{(\lambda_{p2}^2 + \beta_k^2)^2} \right] \right\} + \frac{\alpha F_k a_k}{\beta_k \Delta_k^{(1)}}$$

$$P_k = -\frac{4\beta_k^2}{RJ_0(\beta_k R)} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n1} Y_n^{(1)}}{(\lambda_{n1}^2 + \beta_k^2)^2}$$

Представляя X_k в виде

$$X_k = \frac{1}{(\beta_k c)^{1/2} J_0^2(\beta_k R)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_{2n+1/2}(\beta_k c) + P_k \quad (k=0,1,2,\dots), \quad \beta_0=0 \quad (1.19)$$

и применяя известные методы решения парных рядов — уравнений [1, 4, 5], решение уравнений (1.18) сводится к решению следующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений:

$$b_s = \sum_{n=0}^{\infty} a_{sn} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} C_{sn}^{(1)} Y_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} d_{sn}^{(2)} Y_n^{(2)} + d_s \quad (s=1,2,\dots) \quad (1.20)$$

$$a_{sn} = -2(4s+1) \left[\frac{1}{R^2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{M_h J_{2n+1/2}(\beta_k c) J_{2s+1/2}(\beta_k c)}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k R)} + \right. \\ \left. + \frac{(-1)^{n+s}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y) I_{2n+1/2}(cy/R) I_{2s+1/2}(cy/R)}{y I_1(y)} dy \right]$$

$$C_{sn}^{(1)} = -\frac{8(4s+1)\sqrt{c}\alpha}{R^3} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\beta_k^{1/2}}{J_0(\beta_k R)} \frac{F_h (-1)^n H_h}{\Delta_h^{(1)}} \frac{\lambda_{n1}}{(\lambda_{n1}^2 + \beta_k^2)^2} J_{2s+1/2}(\beta_k c) \quad (\beta_k c)$$

$$d_{sn}^{(2)} = \frac{8(4s+1)\sqrt{c}(1-\alpha)}{R^3} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\beta_k^{1/2}}{J_0(\beta_k R)} \frac{\text{sh}^2 \mu_{h2}}{\Delta_h^{(2)}} \frac{\lambda_{n2}}{(\lambda_{n2}^2 + \beta_k^2)^2} J_{2s+1/2}(\beta_k c)$$

$$d_s = \frac{2(4s+1)\sqrt{c}\alpha}{R^2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{F_h a_h}{\Delta_h^{(1)} \beta_k^{1/2}} J_{2s+1/2}(\beta_k c), \quad b_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0$$

где $K_n(x)$ — функция Бесселя второго рода мнимого аргумента.

Подставляя значения $C_h^{(1)}$ и $D_h^{(1)}$ в (1.12) и учитывая (1.19), получим

$$Y_k^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(1)} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn}^{(1)} Y_n^{(1)} + A_k, \quad Y_k^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(2)} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn}^{(2)} Y_n^{(2)} \quad (1.21)$$

$$a_{kn}^{(1)} = \frac{4\lambda_{k1}^2}{l_1 \Phi_k^{(1)}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p [H_p - (-1)^k F_p]}{\Delta_p^{(1)} (\beta_p c)^{1/2} J_0(\beta_p R) (\lambda_{k1}^2 + \beta_p^2)^2} J_{2n+1/2}(\beta_p c)$$

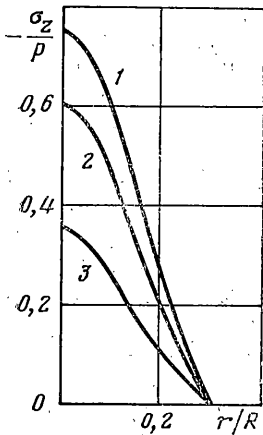
$$C_{kn}^{(1)} = \frac{16\lambda_{k1}^2}{R l_1 \Phi_k^{(1)}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^3 \{ [(-1)^k F_p - H_p] + (-1)^n [F_p - (-1)^k H_p] \}}{\Delta_p^{(1)} (\lambda_{k1}^2 + \beta_p^2)^2 (\lambda_{n1}^2 + \beta_p^2)^2} \lambda_{n1}$$

$$a_{kn}^{(2)} = \frac{4\lambda_{k2}^2}{l_2 \Phi_k^{(2)}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p \text{sh}^2 \mu_{p2} J_{2n+1/2}(\beta_p c)}{(\beta_p c)^{1/2} J_0(\beta_p R) (\lambda_{k2}^2 + \beta_p^2)^2 \Delta_p^{(2)}}$$

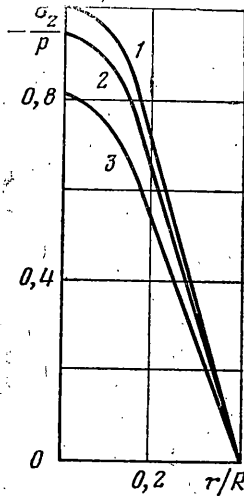
$$C_{kn}^{(2)} = -\frac{16\lambda_{k2}^2}{Rl_2\Phi_k^{(2)}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p^3 \operatorname{sh}^2 \mu_{p2}}{\Delta_p^{(2)} (\lambda_{k2}^2 + \beta_p^2)^2 (\lambda_{n2}^2 + \beta_p^2)^2} \lambda_{n2}$$

$$A_k = \frac{4\lambda_{k1}^2}{l_1\Phi_k^{(1)}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p J_0(\beta_p R) H_p(-1)^k - F_p}{(\lambda_{k1}^2 + \beta_p^2)^2 \Delta_p^{(1)}} a_p$$

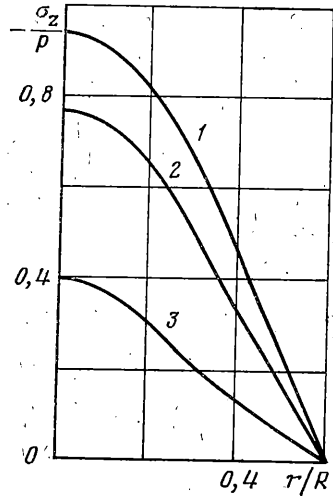
Регулярность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (1.20), (1.21) доказывается аналогично [1].



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

После решения бесконечных систем (1.20), (1.21) из первого уравнения (1.18) при фиксированном r определяется q_0 , а из уравнения (1.9) находится C_1 .

Подставив значение X_k по формуле (1.19) во второй ряд (1.18), для контактного нормального напряжения получим следующее выражение [1]:

$$\sigma_z(r, 0) = 0 \quad (c < r < R)$$

$$\sigma_z(r, 0) = \frac{R^2(c^2 - r^2)^{-1/2}}{\sqrt{2}c} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n! F(-n, n+1/2, 1, r^2/c^2)}{\Gamma(n+1/2)} \quad (0 \leq r < c) \quad (1.22)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ — гипергеометрический ряд.

Коэффициент при особенности $(c^2 - r^2)^{-1/2}$ в формуле (1.22) в окрестности $r=c$ имеет вид [1]:

$$\frac{R^2}{\sqrt{2}c} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n \quad (1.23)$$

Неизвестную величину c можно определить из условия равенства нулю контактного напряжения на границе области контакта, что равносильно условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = 0 \quad (1.24)$$

2. Рассмотрим два цилиндра одинаковой длины и одинакового диаметра, изготовленных из различных материалов, которые прижимаются по торцам друг к другу без сцепления. На одном из свободных торцов цилиндров нормальные перемещения и касательные напряжения равны нулю, а на другом торце приложена осесимметричная сжимающая нагрузка (фиг. 2):

$$\sigma_z^{(1)}(r, l_1) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\beta_k r), \quad a_0 = -\frac{a^2}{R^2} P, \quad a_k = -\frac{2aJ_1(\beta_k a)}{R^2 \beta_k J_0^2(\beta_k R)} P \quad (2.1)$$

Для этого частного случая определим размеры области контакта и величину контактных напряжений.

Для вычисления размера области контакта c по формуле (1.24) необходимо решить совокупность бесконечных систем алгебраических уравне-

$\frac{c}{R}$	$\nu_1=0,1$ $\nu_2=0,1$	$\nu_1=0,1$ $\nu_2=0,3$	$\nu_1=0,1$ $\nu_2=0,4$	$\nu_1=0,3$ $\nu_2=0,1$	$\nu_1=0,3$ $\nu_2=0,3$	$\nu_1=0,3$ $\nu_2=0,4$	$\nu_1=0,4$ $\nu_2=0,1$	$\nu_1=0,4$ $\nu_2=0,3$	$\nu_1=0,4$ $\nu_2=0,4$
G=0,5									
0,3	1424	1554	1617	1203	1396	1484	1013	1273	1385
0,35	2385	2451	2486	2248	2342	2388	2154	2269	2324
0,4	2873	2924	2949	2783	2851	2885	2720	2801	2842
0,5	3933	3970	3990	3867	3916	3939	3824	3879	3908
0,6	5019	5100	5168	4955	4996	5017	4914	4961	4986
0,7	6025	6056	6072	5963	6002	6021	5924	5967	5990
0,8	7088	7111	7123	7006	7033	7049	6959	6990	7008
0,9	8074	8103	8121	8000	8039	8060	7956	8000	8023
1	9332	9349	9359	9291	9344	9326	9263	9291	9306
G=1									
0,3	556	1029	1203	—	—	830	—	—	—
0,35	2062	2209	2279	1797	2004	2103	1601	1855	1978
0,4	2644	2746	2797	2474	2613	2681	2351	2519	2601
0,5	3789	3845	3881	3672	3756	3799	3596	3695	3744
0,6	4892	4947	4974	4797	4863	4896	4736	4810	4849
0,7	5908	5957	5984	5816	5877	5910	5760	5826	5863
0,8	7000	7037	7056	6896	6941	6967	6836	6886	6914
0,9	7953	8004	8031	7849	7912	7945	7795	7855	7892
1	9258	9289	9306	9193	9234	9258	9148	9199	9224
G=10									
0,5	—	1771	2189	—	—	1158	—	—	—
0,6	3463	3802	3967	2830	3344	3580	2295	2990	3291
0,7	4861	5070	5179	4474	4760	4904	4193	4543	4727
0,8	6244	6381	6455	5959	6136	6232	5771	5980	6090
0,9	7051	7195	7277	6761	6943	7041	6574	6779	6892
1	8410	8570	8658	8103	8308	8420	7894	8127	8256

ний (1.20), (1.21), содержащих неизвестную величину c , входящую в аргумент функций Бесселя. Для решения этих систем при известных геометрических параметрах и упругих характеристиках материалов необходимо каждый раз задать величину c и далее требовать, чтобы найденные величины b_n удовлетворяли уравнению (1.24).

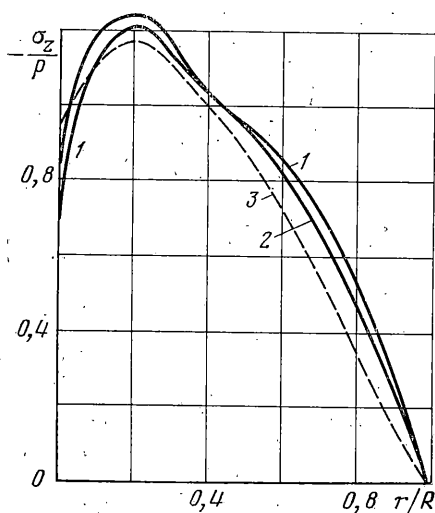
Однако такой подход связан с большим объемом вычислений. Избегая отмеченных затруднений, зададим значение c и l ($l_1=l_2=l$) и определим a .

После определения радиуса c области контакта по формуле (1.22) вычислялись контактные напряжения для каждого c .

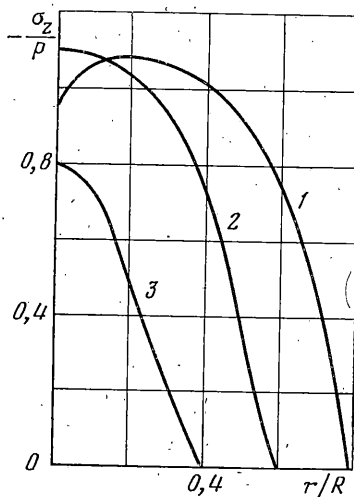
Размеры зоны $(a/R) \cdot 10^{-4}$ действия внешней равномерно распределенной нагрузки при $l=0,2R$ приведены в таблице.

Распределение нормального контактного напряжения при $l=0,2R$ для различных значений коэффициентов Пуассона и модулей сдвига показаны на фиг. 3–6, а для $l=0,25R$ — на фиг. 7 ($G=0,5$; $\nu_1=\nu_2=0,1$).

Кривые 1 на фиг. 3–6 соответствуют коэффициентам $\nu_1=0,1$, $\nu_2=0,4$; кривые 2 — $\nu_1=\nu_2=0,1$; кривые 3 — $\nu_1=0,4$, $\nu_2=0,1$. Для этих кривых параметр a равняется: $0,16R$; $0,14R$; $0,1R$ (фиг. 3, $G=0,5$); $0,28R$; $0,26R$; $0,235R$ (фиг. 4, $G=1$); $0,4R$; $0,35R$; $0,23R$ (фиг. 5, $G=10$); $0,87R$; $0,84R$; $0,79R$ (фиг. 6, $G=10$); $0,69R$; $0,47R$; $0,23R$ (фиг. 7).



Фиг. 6



Фиг. 7

График зависимости размеров области контакта от размеров площади приложения внешней нагрузки для значений $l=0,25R$; $G=0,5$; $\nu_1=\nu_2=0,1$ показан на фиг. 8.

3. На основании данных вычислений можно сделать некоторые выводы.

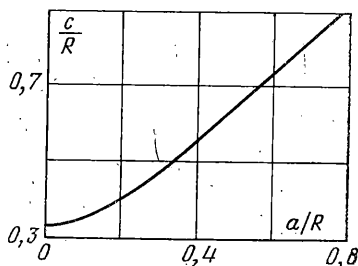
Для любых значений модулей сдвига материалов цилиндров ($G=G_1/G_2$) и размеров области a приложения внешней нагрузки при $\nu_1=\nu_2=\nu$ изменение коэффициента Пуассона ν мало влияет на размеры области контакта с двух цилиндров и напряженное состояние цилиндров.

При значительной разности модулей сдвига материалов цилиндров и для любых значений a изменение коэффициентов Пуассона значительно влияет на размеры области контакта и на напряженное состояние цилиндров.

Для любых значений G и a и фиксированного коэффициента Пуассона ν_1 увеличение коэффициента Пуассона ν_2 приводит к увеличению c .

Для любых значений G и a размеры области контакта двух цилиндров c получаются меньшими при $\nu_1 > \nu_2$ и большими при $\nu_1 < \nu_2$ по сравнению со случаем $\nu_1 = \nu_2$.

Для любых значений a и ν_i увеличение G приводит к уменьшению c .



Фиг. 8

Для больших значений c , в частности при полном контакте двух цилиндров, максимум нормального контактного напряжения смещен относительно центра контактной области и превышает интенсивность внешнего давления при любых значениях G и ν .

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартиросян Э. А. Осесимметричная контактная задача для двух цилиндров.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1979, т. 32, № 2, с. 14–25.
2. Тимошенко С. П. Теория упругости. Л.— М.: Гостехиздат, 1937. 451 с.
3. Абрамян Б. Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра.— Докл. АН АрмССР, 1954, т. 19, № 1, с. 3–12.
4. Cooke J. C., Tranter C. J. Dual Fourier—Bessels series.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, v. 12, pt 2, p. 379–386.
5. Баблоян А. А., Мелконян А. П. О двух смешанных осесимметричных задачах теории упругости.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1969, т. 22, № 5, с. 3–15.

Ереван

Поступила в редакцию
17.XII.1979