МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1981

УДК 531.383

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ГИРОГОРИЗОНТКОМПАСА В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ ТЯГОТЕНИЯ

ЗАВОЗИН Ж. Г.

Известные [1, 2] исследования по асимптотической устойчивости гирогоризонткомпаса Геккелера – Аншютца выполнены в предположении однородности поля сил тяготения [3]. Кроме того, в [1] предполагалось наличие диссипации в двух позиционных координатах, а в [2] – что момент сил вязкого трения коллинеарен угловой скорости гиросферы относительно трехгранника Дарбу [4].

В публикуемой работе найдены достаточные условия асимптотической устойчивости гирогоризонткомпаса в ньютоновском центральном поле сил тяготения с учетом момента сил вязкого трения относительно осей кожухов гирокамер. В реальных конструкциях гирогоризонткомпасов такой момент обязательно имеется. В случае, например, поплавковых гирокамер он может быть весьма значительным. Поэтому указанный момент существенно влияет на диссипацию энергии колебаний прибора.

1. Предположим, что точка подвеса O гиросферы, совпадающая с ее геометрическим центром, перемещается по невращающейся сфере постоянного радиуса R, окружающей земной шар. Пусть $\mathbf{v}$ – абсолютная скорость точки O. Введем в рассмотрение два правых координатных трехгранника: $Oxyz$ (орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) – связанный с гиросферой, $Ox^\circ y^\circ z^\circ$ (орты $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$) – трехгранник Дарбу. Ориентацию гиросферы относительно трехгранника Дарбу определим посредством трех углов Эйлера – Крылова: α, β, γ[1].

Допустим, что гирокамеры идентичны, их центры масс лежат на осях кожухов и указанные оси являются осями динамической симметрии гирокамер. Такое предположение позволяет считать, что повороты гирокамер вокруг осей кожухов не изменяют геометрии масс гиросферы. Учитывая это, будем далее полагать, что оси x, y, z – главные оси инерции гиросферы для точки O, а ее центр масс лежит на отрицательной части оси z.

Пусть $\zeta=v/R$, η – проекция абсолютной угловой скорости трехгранника Дарбу на вертикаль, $\boldsymbol{\omega}$ – абсолютная угловая скорость гиросферы. Тогда $\boldsymbol{\omega}=\zeta\mathbf{a}_2+\eta\mathbf{a}_3+\boldsymbol{\alpha}^{\cdot}+\boldsymbol{\beta}^{\cdot}+\boldsymbol{\gamma}^{\cdot}$. Предположим, что ζ и η постоянны.

Уравнение движения гиросферы получим из теоремы о кинетическом моменте [3]:

$$\mathbf{K}_O^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K}_O=mg\mathbf{a}_3\times\mathbf{l}+3\nu^2\mathbf{a}_3\times\Lambda\mathbf{a}_3-\mathbf{l}\times m\mathbf{w} \tag{1.1}$$

Здесь и в следующем уравнении точка у вектора означает локальную производную по времени в системе координат $Oxyz$, $\mathbf{K}_O$ – кинетический момент гиросферы относительно точки O, m – масса гиросферы, g – ускорение силы тяготения в точке O, $\mathbf{l}$ – радиус-вектор центра масс гиросферы, проведенный из точки O, $\mathbf{l}=-l\mathbf{e}_3$, $\nu=(g/R)^{1/2}$, Λ – тензор инерции гиросферы в системе координат $Oxyz$, $\Lambda=\mathrm{diag}\,[A, B, C]$, $\mathbf{w}$ – абсолютное ускорение точки подвеса.

Два первых слагаемых в правой части уравнения (1.1) в совокупности представляют главный момент относительно точки O сил тяготения [5],

[1] Выбор трехгранников и ориентации гиросферы соответствует [4, кн. II, гл. II, § 6, с. 411].

вычисленный с точностью $9mgl\rho^2/R^2$, где ρ — максимальный линейный размер гиросферы, причем второе из них характеризует неоднородность поля тяготения.

Учитывая, что $\mathbf{w}=\zeta\eta R\mathbf{a}_2-\zeta^2 R\mathbf{a}_3$, $\mathbf{K}_O=\Lambda\boldsymbol{\omega}+\mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ — сумма собственных кинетических моментов гироскопов, придадим уравнению (1.1) вид

$$\Lambda\boldsymbol{\omega}^{\cdot}+\mathbf{H}^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times(\Lambda\boldsymbol{\omega}+\mathbf{H})=I\zeta\eta\mathbf{e}_3\times\mathbf{a}_2+[I(\nu^2-\zeta^2)\mathbf{e}_3-3\nu^2\Lambda\mathbf{a}_3]\times\mathbf{a}_3,\quad I=mlR \tag{1.2}$$

Движение гирокамер можно описать уравнением

$$2J\varepsilon^{\cdot\cdot}+\omega_y 2L\sin\varepsilon=N-2b\varepsilon^{\cdot} \tag{1.3}$$

где J — момент инерции гирокамеры относительно оси кожуха, 2ε — угол разведения гироскопов, L — модуль собственного кинетического момента одного гироскопа, $L=\mathrm{const}$, N — момент сил, прикладываемых к одной из гирокамер специальным датчиком моментов, b — постоянный коэффициент, характеризующий удельный момент вязкого трения на осях кожухов, $b>0$. Это уравнение можно получить применяя теорему о кинетическом моменте к каждой из гирокамер, как это сделано, например, в [1, 4].

Далее будем полагать, что N формируется в виде

$$N=2L^2\sin 2\varepsilon/[I(1+\chi)],\quad \chi=(C-B)/I$$

2. Система имеет положение относительного равновесия

$$\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=0,\ \varepsilon=\varepsilon^\circ,\ \varepsilon^\circ=\arccos[I(1+\chi)\zeta/(2L)] \tag{2.1}$$

Приняв его в качестве невозмущенного движения, положим в возмущенном движении

$$\alpha=x_1,\ \beta=x_2,\ \gamma=x_3,\ \varepsilon=\varepsilon^\circ+x_4 \tag{2.2}$$

Заменив в уравнениях (1.2), (1.3) переменные согласно равенствам (2.2), получим систему уравнений возмущенного движения. Соответствующую ей систему уравнений первого приближения представим в виде

$$B_1\mathbf{x}^{\cdot\cdot}+(D+F)\mathbf{x}^{\cdot}+C_1\mathbf{x}=0 \tag{2.3}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор возмущений, $\mathbf{x}=[x_1,x_2,x_3,x_4]'$ (штрих означает транспонирование), B_1, D, F, C_1 — квадратные матрицы 4-го порядка

$$B_1=\|b_{ij}\|,\quad D=\|d_{ij}\|,\quad F=\|f_{ij}\|,\quad C_1=\|c_{ij}\|$$

в которых отличные от нуля элементы имеют вид

$$b_{11}=C,\quad b_{22}=A,\quad b_{33}=B,\quad b_{44}=2J,\quad d_{44}=2b,\quad f_{12}=-f_{21}=(I-A)\zeta$$

$$f_{23}=-f_{32}=(C-B-A)\eta,\quad f_{34}=-f_{43}=-2L\sin\varepsilon^\circ,\quad c_{11}=I(1+\vartheta)\zeta^2$$

$$c_{13}=c_{31}=-I(1+\vartheta)\zeta\eta,\quad c_{22}=I[(1-3\chi)\nu^2+\chi\eta^2],\quad c_{24}=c_{42}=2\eta L\sin\varepsilon^\circ$$

$$c_{33}=I[(1-3\vartheta)\nu^2-\zeta^2+\vartheta\eta^2],\quad c_{44}=4L^2\sin^2\varepsilon^\circ/[I(1+\chi)],\quad \vartheta=(C-A)/I$$

3. Умножив уравнение (2.3) скалярно на $\mathbf{x}^{\cdot}$, получим

$$V^{\cdot}=-2bx_4^{\cdot 2},\quad V=\tfrac{1}{2}\mathbf{x}^{\cdot}\cdot B_1\mathbf{x}^{\cdot}+\tfrac{1}{2}\mathbf{x}\cdot C_1\mathbf{x} \tag{3.1}$$

Первая квадратичная форма в функции V определенно-положительная. Используя критерий Сильвестра [6], условиям положительной определенности второй квадратичной формы можно придать вид

$$\begin{gathered}-1<\vartheta<\tfrac{1}{3},\quad -1<\chi<\tfrac{1}{3}\\ (1-3\vartheta)\nu^2-\zeta^2-\eta^2>0,\quad (1-3\chi)\nu^2-\eta^2>0\end{gathered} \tag{3.2}$$

При выполнении неравенств (3.2) V — определенно-положительная функция. Поскольку производная от нее, согласно (3.1), знакоотрицательна [7], то по теореме Ляпунова об устойчивости [7] решение $\mathbf{x}=0$ системы (2.3) будет в этом случае устойчиво.

4. Пусть неравенства (3.2) выполняются. Найдем условия, при выполнении которых многообразие $K=\{(\mathbf{x}, \mathbf{x}^\cdot): x_4^\cdot=0\}$ не содержит целых (отличных от $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{x}^\cdot=0$) траекторий системы (2.3).

На многообразии K эта система принимает вид

$$\mathbf{q}^\cdot=P\mathbf{q}+\mathbf{r},\quad \mathbf{s}\cdot\mathbf{q}+c_{44}x_{40}=0 \tag{4.1}$$

$$\mathbf{q}=[x_2,\ x_1^\cdot,\ x_3^\cdot,\ x_1,\ x_3,\ x_2^\cdot]',\quad \mathbf{r}=[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -A^{-1}c_{24}x_{40}]',$$

$$\mathbf{s}=[c_{24},\ 0,\ -f_{34},\ 0,\ 0,\ 0]'$$

P — квадратная матрица 6-го порядка, $P=\|p_{ij}\|$, в которой отличные от нуля элементы имеют вид

$$p_{16}=p_{42}=p_{53}=1,\quad p_{24}=-C^{-1}c_{11},\quad p_{25}=-C^{-1}c_{13}$$

$$p_{26}=-C^{-1}f_{12},\quad p_{34}=-B^{-1}c_{13},\quad p_{35}=-B^{-1}c_{33},\quad p_{36}=B^{-1}f_{23}$$

$$p_{61}=-A^{-1}c_{22},\quad p_{62}=A^{-1}f_{12},\quad p_{63}=-A^{-1}f_{23}$$

Индекс нуль внизу у переменной указывает на ее начальное значение.

Решение дифференциального уравнения системы (4.1) можно записать в виде

$$\mathbf{q}=\exp(Pt)\mathbf{u}-P^{-1}\mathbf{r},\quad \mathbf{u}=\mathbf{q}_0+P^{-1}\mathbf{r} \tag{4.2}$$

Это решение должно удовлетворять второму соотношению системы (4.1), поэтому

$$\mathbf{s}'\exp(Pt)\mathbf{u}=h,\quad h=c_{22}^{-1}(c_{24}^2-c_{22}c_{44})x_{40}$$

Разлагая $\exp(Pt)$ в ряд по степеням t, найдем, что вектор $\mathbf{u}$ должен удовлетворять бесконечной системе линейных уравнений

$$\mathbf{s}'\mathbf{u}=h,\quad \mathbf{s}'P\mathbf{u}=0,\quad \mathbf{s}'P^2\mathbf{u}=0,\ldots \tag{4.3}$$

Обозначим через P_1 и P_2 отличные от нуля клетки матрицы P:

$$P_1=\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ p_{61} & p_{62} & p_{63}\end{Vmatrix},\quad P_2=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 1\\ p_{24} & p_{25} & p_{26}\\ p_{34} & p_{35} & p_{36}\end{Vmatrix}$$

Тогда система (4.3) распадется на две подсистемы

$$\mathbf{s}_1'\mathbf{u}_1=h_1,\quad \mathbf{s}_1'P_2P_1\mathbf{u}_1=0,\quad \mathbf{s}_1'(P_2P_1)^2\mathbf{u}_1=0,\ldots \tag{4.4}$$

$$\mathbf{s}_1'P_2\mathbf{u}_2=0,\quad \mathbf{s}_1'P_2P_1P_2\mathbf{u}_2=0,\quad \mathbf{s}_1'(P_2P_1)^2P_2\mathbf{u}_2=0,\ldots \tag{4.5}$$

$$\mathbf{u}_1=[x_{20}+c_{24}c_{22}^{-1}x_{40},\ x_{10}^\cdot,\ x_{30}^\cdot]',\quad \mathbf{u}_2=[x_{10},\ x_{30},\ x_{20}^\cdot]'$$

$$\mathbf{s}_1=[\eta,\ 0,\ 1]',\quad h_1={}^1/_2h/(L\sin\varepsilon^\circ)$$

Положим

$$\Delta=\det\begin{Vmatrix}\mathbf{s}_1'\\ \mathbf{s}_1'P_2P_1\\ \mathbf{s}_1'(P_2P_1)^2\end{Vmatrix}$$

Расчеты показывают, что этот определитель не равен тождественно нулю. Подчиним выбор величин ζ, η и параметров m, l, A, B, C гиросферы условию $\Delta\neq0$.

Если $x_{40}\neq 0$, то из трех первых уравнений системы (4.4) находим, что $\mathbf{u}_1\neq 0$, а из второго, третьего и четвертого уравнений этой же системы следует, что $P_2P_1\mathbf{u}_1=0$. Так как $\det(P_2P_1)\neq 0$, то последнее соотношение дает $\mathbf{u}_1=0$. Полученное противоречие указывает на несовместность системы (4.3).

Если $x_{40}=0$, то из систем уравнений (4.4), (4.5) находим, что $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2=0$. Тогда из равенств (4.2) получим $\mathbf{q}=0$, т. е. $\mathbf{x}=0$, $\mathbf{x}^{\cdot}=0$.

Следовательно, при выполнении условия $\Delta\neq 0$ многообразие K не содержит целых траекторий системы (2.3).

5. Пусть выполняются условия (3.2) и $\Delta\neq 0$. Тогда по теореме Н. Н. Красовского об асимптотической устойчивости [6] решение $\mathbf{x}=0$ системы (2.3) будет асимптотически устойчиво. В этом случае все корни соответствующего системе (2.3) характеристического уравнения будут иметь отрицательные вещественные части [7]. По теореме Ляпунова об устойчивости движения по первому приближению [6] невозмущенное движение (2.1) будет асимптотически устойчиво в силу полных уравнений возмущенного движения гиросферы.

Неравенства (3.2) и условие $\Delta\neq 0$ являются искомыми достаточными условиями асимптотической устойчивости гирогоризонткомпаса.

Два первых неравенства системы (3.2) накладывают ограничения только на параметры гиросферы. Оставшиеся неравенства этой же системы определяют в пространстве величин ζ, η полный или усеченный с двух сторон круг радиуса $(1-3\vartheta)^{1/2}\nu$. Что касается условия $\Delta\neq 0$, то ему всегда можно удовлетворить варьируя ζ и η, лишь бы η было отлично от нуля, т. е. точка опоры не должна двигаться по экватору земной сферы или по круговой орбите вокруг Земли.

Автор благодарит Г. Д. Блюмина за внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кошляков В. Н.* Теория гироскопических компасов. М.: Наука, 1972. 344 с.
2. *Крементуло В. В.* Об устойчивости движения некоторых управляемых гироскопических устройств на подвижном основании.– Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 2, с. 69 – 75.
3. *Блюмин Г. Д., Завозин Ж. Г.* Об одном свойстве механических систем с регулируемым положением центра масс.– Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 24 – 29.
4. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
5. *Магнус К.* Гироскоп, теория и применение. М.: Мир, 1974. 528 с.
6. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 320 с.
7. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

Комсомольск-на-Амуре

Поступила в редакцию 27.XI.1979