

УДК 539.3.01

## СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

КАВЛАКАН М. В., МИХАЙЛОВ А. М.

Рассматриваются смешанные упругие задачи для полупространства и полушпоскости. На одной части границы полупространства (полушпоскости) задается нормальная нагрузка, а на другой ставится условие упругого закрепления относительно нормального смещения; касательная нагрузка на границе отсутствует. Наиболее известными механическими примерами, приводящими к такой постановке, являются давление штампа через упругую прокладку [1] или распределение опорного давления на угольный пласт [2-4].

В [5] решена задача о растяжении полушпоскости на упругом основании, жесткость которого постоянна на правой и левой полуосях (если жесткость на одной полуоси обращается в нуль, получается свободная от нагрузки линия). К интегральному уравнению, возникающему при изучении задач указанного вида, сводятся стационарные задачи о плоском дозвуковом обтекании крыла [6] и о распределении температуры в полупространстве (полушпоскости), когда на части границы задан тепловой поток, а на остальной части границы поток пропорционален температуре.

Ниже получены интегральные уравнения, при помощи которых проведено качественное исследование нормального напряжения на границе полупространства (полушпоскости). Построен эффективный алгоритм для вычисления этого напряжения при достаточно произвольной внешней нагрузке (в частности, если область приложения внешних нагрузок многосвязна и осевая симметрия отсутствует). Часть полученных результатов кратко изложена в [7].

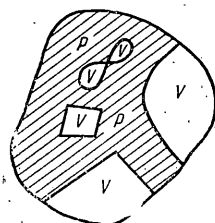
1. Пусть  $\Omega$  — упругое однородное изотропное полупространство (полушпоскость)  $z \geq 0$  с постоянными Ламе  $\lambda, \mu$ ;  $x, y, z$  — ортогональные декартовы координаты. Поверхность  $z=0$  разобьем на две части  $P$  и  $V$  с границей раздела  $\Gamma$ . В пространственном случае предположим, что граница  $\Gamma$  состоит из конечного числа кусочно-гладких замкнутых кривых (фиг. 1). В плоском случае  $\Gamma$  состоит из конечного числа точек.

Требуется найти решение уравнений теории упругости в полупространстве (полушпоскости) при следующих предположениях: смещения непрерывны, упругая энергия конечна, напряжения обращаются в нуль на бесконечности, при  $z=0$  выполняются краевые условия

$$\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{zz}(x, y) = p(x, y), \quad (x, y) \in V \quad (1.2)$$

$$\sigma_{zz}(x, y) = kw(x, y), \quad (x, y) \in P \quad (k > 0) \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Здесь  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $w$  — смещение вдоль оси  $z$ ,  $k$  — положительный «коэффициент постели»,  $p(x, y)$  — известная функция, подчиняющаяся условиям, сформулированным ниже.

В задаче об опорном давлении на пласт  $P$ , ослабленный выработкой  $V$ , коэффициент  $k$  легко вычисляется (он пропорционален модулю Юнга и обратно пропорционален толщине пласта); функция  $p(x, y)$  везде в области  $V$  равна  $\gamma H$  ( $\gamma$  — удельный вес вмещающих пород,  $H$  — глубина зале-

гания пласта). При этом решение задачи дает дополнительные напряжения в пласте.

Решение внутри  $\Omega$  определяется через граничные напряжения известными формулами для решения первой основной задачи теории упругости. Поэтому нужно найти напряжение  $\sigma_{zz}$  в области  $P$  (в области  $V$  оно задано).

Сформулированная задача, вообще говоря, неопределенна. Это означает, что напряжения могут быть отличны от нуля даже в том случае, если внешняя нагрузка  $p(x, y)$  тождественно равна нулю в области  $V$ .

Поясним это утверждение. Пусть полусфер  $\Pi_R$  радиуса  $R$  нагружен на полусфере  $S_R$  осесимметричной вертикальной нагрузкой. Часть диаметральной плоскости занята областью упругой заделки  $P$ , а остальная часть  $V$  свободна от нагрузки. Будем увеличивать радиус  $R$  неограниченно, уменьшая одновременно напряжения на  $S_R$  пропорционально  $R^{-2}$ ; при этом область  $P$  фиксирована и не зависит от  $R$ . Закон убывания нагрузок на полусфере  $S_R$  подобран так, что полная сила, приложенная к  $S_R$ , одна и та же при любом  $R$ . Следовательно, на упругом основании  $P$  должны возникнуть напряжения, обеспечивающие равновесие полусфера  $\Pi_R$ , причем интеграл от них по области  $P$  остается постоянным при увеличении радиуса  $R$ . Работа, совершаемая нагрузками на  $S_R$ , конечна, так как вертикальные смещения  $w$  ограничены при  $R \rightarrow \infty$  (см. третью формулу (1.6)); благодаря осевой симметрии члены, линейные по  $x, y$ , отсутствуют). Следовательно, при  $R \rightarrow \infty$  упругая энергия системы ограничена. В пределе получаем однородную задачу, имеющую ненулевое решение.

В данном примере это решение зависит от одного параметра — полной силы, приложенной к бесконечно удаленной части полупространства. Этот пример можно усложнить введя на  $S_R$  нагрузки, равнодействующая которых направлена вертикально и которые создают моменты относительно координатных осей, лежащих в диаметральной плоскости. После соответствующего предельного перехода получим, что ненулевое решение однородной задачи зависит еще от двух параметров — моментов усилий, приложенных на бесконечности.

Из этих примеров ясно, что для обеспечения единственности необходимо задать полные силы и моменты на бесконечности. Из уравнений равновесия следует, что сумма сил, приложенных на границе  $z=0$  и в бесконечно удаленных частях  $\Omega$ , равна нулю. Поэтому вместо силы на бесконечности можно задать полную силу, приложенную к плоскости  $z=0$ . То же самое можно сказать и о моментах. Такого рода условия используются в задачах о внедрении штампа в полупространство (полуплоскость) под действием эксцентрично приложенной силы.

Теперь докажем теорему единственности: сформулированная упругая задача не может иметь более одного решения, если заданы величины

$$\iint \sigma_{zz} dx dy = F, \quad \iint x \sigma_{zz} dx dy = M_y, \quad \iint y \sigma_{zz} dx dy = M_x. \quad \text{Интегралы бер-$$

утся по границе полупространства  $z=0$ . (В плоском случае интегралы однократные, а последнее условие отсутствует.)

Единственность равносильна тому, что при  $F=0, M_x=M_y=0, p(x, y)=0$  решение является нулевым. Умножим уравнения равновесия на соответствующие смещения  $u, v, w$ , сложим результаты и проинтегрируем по полусферу  $\Pi_R$ . Интеграл по объему преобразуем с помощью формулы Остроградского

$$0 = \iiint_{\Pi_R} \left[ u \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) + \dots \right] dx dy dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{S_R} (u\sigma_{zn} + v\sigma_{yn} + w\sigma_{zn}) dS - \iint_{\Sigma} (u\sigma_{xz} + v\sigma_{yz} + w\sigma_{zz}) dx dy - \\
&\quad - \iiint_{\Pi_R} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{xz} + \dots \right) dx dy dz
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Последний тройной интеграл равен удвоенной упругой энергии, запасенной в  $\Pi_R$ ; после замены напряжений на деформации на основе закона Гука подынтегральное выражение превращается в сумму квадратов с положительными коэффициентами. Первый поверхностный интеграл равен удвоенной работе напряжений на перемещениях полусферы  $S_R$ . Аналогичный смысл имеет и второй интеграл по диаметральной плоскости полусфера  $\Sigma$ : ( $x^2 + y^2 \leq R^2$ ,  $z=0$ ). В интеграле по  $\Sigma$  касательные напряжения равны нулю по условию (1.1), нормальное напряжение  $\sigma_{zz}$  вне  $P$  — это внешняя нагрузка  $p(x, y)$ , которая в настоящем рассуждении считается нулевой. В области же  $P$  подынтегральное выражение равно  $kw^2$  из-за условия (1.3).

Устремим  $R$  к бесконечности. Два последних интеграла будут стремиться к конечным пределам, так как по условию упругая энергия конечна. Чтобы оценить интеграл по  $S_R$ , используем асимптотические формулы для смещений и напряжений на бесконечности. Для получения этих формул было выписано в виде интегралов решение упругой задачи через напряжение  $\sigma_{zz}$  на границе полупространства (суммировалось решение Буссинеска ([8], стр. 61)). Интеграл в бесконечной плоскости понимаются как пределы интегралов по кругу с центром в начале координат при стремлении радиуса круга к бесконечности. Затем вопрос о поведении интегралов при удалении параметра  $(x, y, z)$  в бесконечность при помощи инверсии относительно единичной полусферы  $S_1$  был сведен к вопросу о поведении интегралов при стремлении параметра к началу координат. В плоском случае вместо двумерных сингулярных интегралов появляются интегралы типа Коши по бесконечной прямой. Исследование их асимптотики в бесконечности проведено в [9].

Для справедливости полученных формул достаточно потребовать, чтобы поведение напряжений  $\sigma_{zz}$  в бесконечности при  $z=0$  описывалось равенством

$$\sigma_{zz} = Ar^{-n} + o(r^{-n}) \tag{1.5}$$

где  $A$  — постоянная,  $r$  — расстояние до начала координат,  $n=3$  в пространственном случае и  $n=2$  в плоском случае.

Приведем для примера четыре асимптотические формулы из тех, которые нужны для оценки интеграла по  $S_R$  в (1.4):

$$\begin{aligned}
u &= u_0 + \omega_2 z - \omega_3 y + \frac{F}{r} f_1(\theta, \varphi) + \frac{M_x}{r^2} f_2(\theta, \varphi) + \frac{M_y}{r^2} f_3(\theta, \varphi) + o(r^{-2}) \\
v &= v_0 + \omega_3 x - \omega_1 z + \frac{F}{r} f_4(\theta, \varphi) + \frac{M_x}{r^2} f_5(\theta, \varphi) + \frac{M_y}{r^2} f_6(\theta, \varphi) + o(r^{-2}) \\
w &= w_0 + \omega_1 y - \omega_2 x + \frac{F}{r} f_7(\theta, \varphi) + o(r^{-1})
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{r^2} f_8(\theta, \varphi) + \frac{M_x}{r^3} f_9(\theta, \varphi) + \frac{M_y}{r^3} f_{10}(\theta, \varphi) + o(r^{-3})$$

Здесь  $u_0, v_0, w_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$  — числа, определяющие движение полупространства как жесткого целого,  $r, \theta, \varphi$  — сферическая система координат; функции  $f_i(\theta, \varphi)$  ограничены.

В плоском случае вместо (1.6) будем иметь

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \omega_2 z + F \ln r f_{11}(\theta) + O(r^{-1}) \\ w &= w_0 - \omega_2 x + F \ln r f_{12}(\theta) + O(r^{-1}) \\ \sigma_{xx} &= \frac{F}{r} f_{13}(\theta) + \frac{M_x}{r^2} f_{14}(\theta) + o(r^{-2}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Полагая  $F=0$ ,  $M_x=M_y=0$ , в формулах типа (1.6), (1.7) получаем, что при  $R \rightarrow \infty$  интеграл по  $S_R$  в (1.4) стремится к нулю.

Итак, после предельного перехода  $R \rightarrow \infty$  в (1.4) получаем, что сумма отрицательных слагаемых равна нулю. Отсюда следует единственность решения задачи с точностью до смещения полупространства как жесткого целого вдоль плоскости  $z=0$ .

Таким образом параметры  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $\omega_2$ , определяющие это смещение, произвольны, параметры  $w_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  однозначно определяются напряжением  $p(x, y)$  и величинами  $F$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ . Попытка изменить, например,  $w_0$  приведет к изменению напряжений в упругом основании  $P$  и, следовательно, к изменению величины  $F$ . Этим изучаемая задача отличается от первой краевой задачи, где все параметры жесткого смещения не влияют на напряжения и могут быть выбраны произвольно.

В соответствии со сказанным можно передоказать теорему единственности при условии, что задана не тройка чисел  $F$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ , а тройка чисел  $w_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ . Изменение в ходе доказательства коснется лишь оценки интеграла по  $S_R$  в (1.4). Необходимо доказать, что при  $w_0=0$ ,  $\omega_1=\omega_2=0$  этот интеграл стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . Это очевидно в отношении слагаемого  $w \sigma_{xz} \sim F/r^3$ . Чтобы добиться того же для двух других слагаемых, нужно выписать явные выражения функций  $f_i(\theta, \varphi)$  в первых слагаемых асимптотик для напряжений и после этого взять интегралы по  $S_R$ .

Теорема единственности утверждает, что поставленная задача с фиксированными  $F$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  или  $w_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  не может иметь более одного решения, удовлетворяющего (1.5). Возникает вопрос, имеет ли такая задача хотя бы одно решение.

Укажем некоторые случаи, когда ответ на этот вопрос отрицателен. В плоском случае, если  $F \neq 0$ , решение не существует, так как из (1.7) видно, что интеграл по  $S_R$  в (1.4), выражающий работу напряжений на полуокружности  $S_R$ , стремится к бесконечности при  $R \rightarrow \infty$ . Следовательно, упругая энергия в этом случае бесконечна. Если область  $V$  ограничена и хотя бы одно из чисел  $F$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  отлично от нуля, то решение не существует как в пространственном, так и в плоском случае. Действительно, если  $F \neq 0$ , то благодаря члену  $F f_7(\theta, \varphi)/r$  в третьей формуле (1.6) или  $F f_{12}(\theta) \ln r$  во второй формуле (1.7) упругая энергия заделки содержит слагаемые, дающие бесконечность при интегрировании по неограниченной области  $P$ .

Так как  $P$  бесконечна, то, устремляя точку  $(x, y)$  в бесконечность, получаем из (1.6):

$$\begin{aligned} w_0 &= 0, & \omega_1 &= \omega_2 = 0 \\ w &= \frac{M_x}{r^2} f_{15} \left( \frac{\pi}{2}, \varphi \right) + \frac{M_y}{r^2} f_{16} \left( \frac{\pi}{2}, \varphi \right) + o(r^{-2}) \\ \sigma_{zz} &= \frac{M_x}{r^3} f_{17} \left( \frac{\pi}{2}, \varphi \right) + \frac{M_y}{r^3} f_{18} \left( \frac{\pi}{2}, \varphi \right) + o(r^{-3}) \\ r^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Из асимптотических формул для  $w$ ,  $\sigma_{zz}$  следует, что при ненулевых моментах  $M_x$ ,  $M_y$  выполнение условия упругой заделки (1.3) невозможно. Теперь рассмотрим случаи, когда решение существует.

2. Область  $P$  ограничена; нагрузка  $p(x, y)$  ограничена, суммируема и удовлетворяет условию (1.5).

Вертикальное смещение на границе полупространства дается формулой ([8], стр. 63):

$$w = w_0 + \omega_1 y - \omega_2 x - \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \iint_{P \cup V} \frac{\sigma(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \quad (2.1)$$

$$\sigma(\xi, \eta) = \sigma_{zz}(\xi, \eta, 0)$$

Подставляя это выражение в условие упругой заделки (1.3), приходим к уравнению

$$\frac{4\pi\mu(\lambda + \mu)}{k(\lambda + 2\mu)} \sigma(x, y) + \iint_P \frac{\sigma(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} = - \frac{4\pi\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \times$$

$$\times (w_0 + \omega_1 y - \omega_2 x) - \iint_V \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \quad (x, y) \in P \quad (2.2)$$

Очевидно, что при фиксированных  $w_0, \omega_1, \omega_2$  решение уравнения (2.2) позволяет при помощи (2.1) однозначно определить упругое состояние полупространства (с очевидным произволом — смещение вдоль плоскости  $z=0$ ). Видно, что правая часть (2.2) непрерывна. Поэтому и решение (2.2) непрерывно в замыкании  $P$ . Благодаря ограниченности  $V$  упругая энергия заделки конечна. Работа напряжения  $p(x, y)$ , удовлетворяющего (1.5), на перемещении (2.1) конечна. Равенство (1.5) обеспечивает справедливость асимптотических формул (1.6), откуда следует, что работа сил на бесконечности (интеграл по  $S_R$  в (1.4) при  $R \rightarrow \infty$ ) конечна. Следовательно, упругая энергия конечна. Остальные условия п. 1 также выполнены.

Обратно, зная некоторое решение  $\sigma_{zz}$  задачи п. 1, можно по (2.1) найти смещение граничной плоскости с точностью до первых трех слагаемых. Поскольку решение удовлетворяет (1.3), то оно удовлетворяет (2.2) при некоторых параметрах  $w_0, \omega_1, \omega_2$ . Подставляя  $\sigma_{zz}$  в (2.2) и сравнивая в обеих частях получившегося тождества члены нулевого и первого измерения относительно  $x, y$ , найдем эти параметры.

Итак, краевая задача п. 1 и уравнение (2.2) равносильны. При фиксированных  $w_0, \omega_1, \omega_2$  краевая задача имеет не более одного решения  $\sigma(x, y) = \sigma_{zz}(x, y, 0)$ . Следовательно, уравнение (2.2) имеет самое большее лишь одно решение при  $k > 0$ . Поэтому отрицательное число  $-2\pi/k = -4\pi\mu(\lambda + \mu)/[k(\lambda + 2\mu)]$  не является собственным значением интегрального оператора

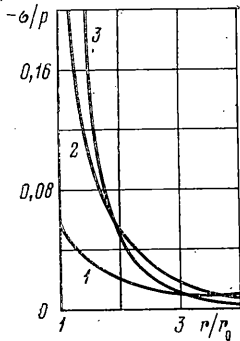
$$K: C(P) \rightarrow C(P); \quad \sigma(x, y) \rightarrow \iint_P \frac{\sigma(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}$$

( $C(P)$  — пространство функций, непрерывных в замыкании  $P$ ).

Известно, что оператор  $K$  вполне непрерывен ([10], стр. 148). Спектр вполне непрерывного оператора весь состоит (за исключением, быть может, нуля) из собственных значений ([11], стр. 483). Следовательно, коэффициент при  $\sigma(x, y)$  в левой части (2.2), взятый с обратным знаком, является регулярным значением (не принадлежит спектру) оператора  $K$ . Спектр оператора  $K$ , таким образом, весь лежит на неотрицательной полуоси (вещественность спектра — следствие симметричности ядра интегрального оператора). Это означает, что оператор  $-(2\pi/k)I + K$  имеет ограниченный обратный в  $C(P)$  ( $I$  — единичный оператор).

Правая часть (2.2) принадлежит  $C(P)$ . Следовательно, (2.2) имеет решение, непрерывное в замыкании  $P$ .

Приведем результаты приближенного решения (2.2) для случая, когда  $P$  — кольцо, внутренний радиус которого  $r_0$ , а внешний  $11r_0$ . Нагрузка  $p(x, y)$  равна нулю вне кольца и постоянна во внутреннем круге кольца. Эта задача возникает при изучении распределения напряжений в упругом угольном пласте  $P$  при наличии круговой выработки  $V$ . Предполагается, что на достаточном удалении от выработки напряжения становятся очень малыми. Поэтому бесконечный пласт  $P$  заменен кольцевой областью. Из-за осевой симметрии  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . Так как область  $P$  имитирует бесконечный пласт, то принималось, что  $F=0$  (т. е. нагрузка, приложенная в  $V$ , полностью воспринимается пластом  $P$ ).



Фиг. 2.

При любом другом значении  $F$  решение для бесконечного пласта  $P$  не существует (см. конец п. 1). С учетом осевой симметрии уравнение (2.2) превращается в одномерное, а затем с помощью квадратурной формулы сводится к системе алгебраических уравнений, к которой присоединяется условие  $F=0$ . Полное число уравнений равнялось 101.

Распределение напряжения  $\sigma$  вдоль радиуса приведено на фиг. 2 для различных жесткостей пласта  $P$  (кривые 1—3 соответствуют следующим значениям  $r_0k$ : 0,1; 1; 10). При отсутствии осевой симметрии такой способ решения практически нереализуем из-за необходимости обращать матрицы слишком высокого порядка. Однако, если  $k$  достаточно мало, так, что коэффициент при  $\sigma$  в (2.2) больше спектрального радиуса интегрального оператора  $K$ , то возможно решение (2.2) методом последовательных приближений. В плоском случае вместо уравнения (2.2) получается уравнение с логарифмическим ядром, для которого справедливо все сказанное выше. Получение и численное решение этого уравнения содержатся в [4]. Распределение напряжений в  $P$  качественно такое же, как на фиг. 2.

3. Рассмотрим случай, когда  $V$  ограничена,  $p(x, y) \in L_1(V)$  — пространству функций, суммируемых в  $V$ .

Для исследования этого случая сначала решим вспомогательную задачу, в которой область  $V$  вырождается в точку  $x=y=0$ , а внешняя нагрузка — в сосредоточенную единичную силу, приложенную в этой точке, т. е.

$$\sigma_{zz} = kw + \delta(x, y) \quad \text{при } z=0 \quad (3.1)$$

где  $\delta(x, y)$  — двумерная дельта-функция Дирака.

Эта осесимметричная задача решается преобразованием Ханкеля. Распределение напряжения на границе дается формулой ( $J_0$  — функция Бесселя)

$$\sigma_{zz}(x, y, 0) = -G(x, y) = -\frac{\kappa}{2\pi r} \int_0^{\infty} \frac{\xi J_0(\xi) d\xi}{\xi + r\kappa} \quad (3.2)$$

$$\kappa = [k(\lambda + 2\mu)] / [2\mu(\lambda + \mu)], \quad r^2 = x^2 + y^2$$

Функция  $G$  обладает следующими свойствами.

3.1.  $G > 0$ .

3.2.  $G(x, y)$  — монотонно стремится к нулю при  $r \rightarrow \infty$ .

3.3.

$$\iint G(\xi, \eta) d\xi d\eta = 1, \quad \iint \xi G(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta = x, \quad \iint \eta G(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta = y$$

(интегралы берутся по плоскости  $z=0$ ).

3.4. При  $r \rightarrow 0$  функция  $G \sim r^{-1}$  (интегрируемая особенность).

3.5. При  $r \rightarrow \infty$  функция  $G = 1/(2\pi\kappa r^3) + O(r^{-4})$ .

Доказательства свойств 3.2 и 3.4 тривиальны, если воспользоваться (3.2) и элементарными свойствами цилиндрических функций.

Докажем свойство 3.1. Дважды интегрируя по частям (3.2) с использованием соотношения ([12], формула 5.521):  $\xi^{m+1} J_m(\xi) d\xi = d(\xi^{m+1} J_{m+1}(\xi))$  приходим к равенству

$$G(x, y) = \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^{\infty} J_2(\xi) g(\xi) d\xi, \quad g(\xi) = \frac{3\xi + r\kappa}{(\xi + r\kappa)^3}$$

Очевидно, что  $g(\xi) > 0$ ,  $g'(\xi) < 0$ . Представим последний интеграл в виде ряда из «полувоин», т. е. интегралов, взятых по отрезкам знакопостоянства  $J_2(\xi)$ . Этот знакопеременный ряд сходится по признаку Лейбница. Знак его суммы определяется знаком первого слагаемого. Поскольку первая полувоин функции  $J_2(\xi)$  положительна, приходим к нужному неравенству  $G(x, y) > 0$ .

Умножим последнее равенство на  $r^3$  и устремим  $r$  к бесконечности. Выполняя предельный переход под знаком интеграла (интеграл сходится равномерно по признаку Абеля), приходим к свойству 3.5.

Докажем первое равенство 3.3. Переходя к полярным координатам, имеем

$$\iint_{z=0} G d\xi d\eta = \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{t+\kappa} t \int_0^{\infty} r J_0(rt) dr dt d\varphi$$

Требуемое равенство следует из соотношения ( $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака):

$$t \int_0^{\infty} r J_0(rt) dr = \delta(t)$$

Таким образом, приложенная сила полностью уравновешивается реакцией упругого основания; то же справедливо и для моментов (остальные равенства 3.3).

Чтобы решить исходную задачу, просуммируем совокупность вспомогательных задач вида (3.1), в каждой из которых сосредоточенная сила  $\beta(\xi, \eta) \delta(x-\xi, y-\eta)$  приложена в точке  $(\xi, \eta)$ :

$$\sigma_{zz}(x, y, 0) = -\beta(\xi, \eta) G(x-\xi, y-\eta) + \beta(\xi, \eta) \delta(x-\xi, y-\eta)$$

Ясно, что вне точек приложения сил выполняется условие (1.3) упругой заделки (как это имеет место во вспомогательной задаче). Поэтому, полагая

$$\sigma_{zz}(x, y, 0) = - \iint_{P \cup V} \beta(\xi, \eta) G(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta + \beta(x, y) \quad (3.3)$$

$$\beta(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \in P$$

получаем решение задачи п. 1 с некоторой нагрузкой в области  $V$ . Внеинтегральный член  $\beta(x, y)$  в (3.3) появляется при интегрировании слагаемого с дельта-функцией. Требуя выполнения краевого условия (1.2),

получаем уравнение для определения  $\beta(x, y)$  в  $V$ :

$$\beta(x, y) - \iint_V \beta(\xi, \eta) G(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta = p(x, y) \quad (3.4)$$

Обозначим через  $K: L_1(V) \rightarrow L_1(V)$  интегральный оператор уравнения (3.4). Оценим норму этого оператора ([11], стр. 188):

$$\begin{aligned} \|K\| &\leq \max_{(x,y) \in V} \iint_V G(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta < \\ &< \max_{(x,y) \in P \cup V} \iint_{P \cup V} G(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta = \iint_{P \cup V} G(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta = 1 \end{aligned}$$

При выводе последнего неравенства использована положительность ядра  $G$  и конечность области  $V$  (в случае, если  $P$  конечна, а  $V$  бесконечна,  $\|K\|=1$ ).

Теперь, на основании принципа сжатых отображений, можно утверждать, что уравнение (3.4) имеет единственное решение в  $L_1(V)$ , которое может быть представлено в виде нормального сходящегося ряда Неймана

$$\beta(x, y) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} K^n p \right) (x, y) \quad (x, y) \in V \quad (3.5)$$

Тогда на основе (3.3) искомое напряжение в области  $P$  будет определяться по формуле

$$\sigma_{zz}(x, y, 0) = - \iint_V \beta(\xi, \eta) G(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta, \quad (x, y) \in P \quad (3.6)$$

4. Рассмотрим некоторые свойства решения, полученного в п. 3.

4.1. Во внутренних точках области  $P$  напряжение  $\sigma_{zz}$  бесконечно дифференцируемо.

4.2. Если в области  $V$  нагрузка  $p > 0$ , то из (3.6) и свойств ядра  $G$  (3.1), (3.2) следует, что напряжение  $\sigma_{zz}(x, y, 0)$  отрицательно в  $P$  и стремится к нулю при удалении точки  $(x, y)$  в бесконечность.

4.3. Пусть существует предельное значение нагрузки при подходе изнутри области  $V$  к точке  $(s, t)$  границы раздела  $\Gamma$  ( $(s, t)$  — точка гладкости):  $p^+(s, t) = \lim_{(x,y) \rightarrow (s,t)} p(x, y)$ ,  $(x, y) \in V$ ,  $(s, t) \in \Gamma$ . Тогда существуют

$$\text{предельные значения: } \beta(s, t) = \lim_{(x,y) \rightarrow (s,t)} \beta(x, y), p^-(s, t) = \lim_{(x,y) \rightarrow (s,t)} \sigma_{zz}(x, y, 0)$$

Переходя в (3.6) и (3.4) к пределу при  $(x, y) \rightarrow (s, t)$  по областям  $P$  и  $V$ , получим формулу скачка  $p^+(s, t) - p^-(s, t) = \beta(s, t)$ ,  $(s, t) \in \Gamma$ . Таким образом, при переходе через границу  $\Gamma$  напряжение терпит конечный скачок в отличие от случая жесткой заделки (задача о трещине), когда напряжение  $p^-(s, t)$  обращается в бесконечность. Но в некоторых случаях, при специальном виде нагрузки  $p(x, y)$ , напряжение может быть непрерывно при переходе через границу. Для этого необходимо и достаточно, чтобы нагрузка в области  $V$  удовлетворяла соотношению

$$\beta(s, t) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} K^n p \right) (s, t) = 0 \quad (4.1)$$



Отсюда видно, что если  $p(x, y)$  не меняет знака в  $V$ , то непрерывный переход  $\sigma_{zz}(x, y, 0)$  через границу раздела  $\Gamma$  невозможен, так как все слагаемые  $K^n p$  одного знака.

Пусть  $p(x, y)$  удовлетворяет условию Гельдера по обоим аргументам. Тогда можно показать, что при стремлении  $(x, y) \in P$  к точке  $(s, t) \in \Gamma$  нормальная производная  $\partial\sigma_{zz}/\partial n$  обращается в бесконечность по логарифмическому закону в том случае, если нарушено (4.1). Если же (4.1) выполнено, то эта производная конечна.

4.4. Из свойства 3.3 ядра  $G$  следует, что полная сила, приложенная к границе полупространства, и моменты относительно координатных осей равны нулю, т. е. нагрузка, приложенная в области  $V$ , уравнивается реакцией области  $P$ . Реакция бесконечно удаленных частей полупространства равна нулю в соответствии со сказанным в конце п. 1.

Из свойства 3.5 и (3.6) следует, что напряжение  $\sigma_{zz}(x, y, 0)$  в бесконечности убывает как  $r^{-3}$ , т. е. подчиняется условию (1.5). Из теоремы единственности п. 1 следует, что задача п. 1 не имеет других решений, удовлетворяющих (1.5), кроме полученного здесь. Нетрудно показать, что упругая энергия, соответствующая полученному решению, конечна.

Аналогичное исследование проведено и для плоского случая. Отличие состоит в том, что при решении вспомогательной задачи используется преобразование Фурье и вместо (3.2) получается ядро

$$G(x) = \frac{\kappa}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{t+\kappa} dt$$

Оно обладает свойствами 3.1, 3.2; в свойстве 3.3 исчезает последнее равенство, а в 3.4 вместо степенной особенности в нуле появляется логарифмическая.

Свойство 3.5 имеет следующий вид:

$$G(x) = \frac{1}{\pi\kappa|x|^2} + O(|x|^{-3}) \text{ при } |x| \rightarrow \infty$$

т. е. решение подчиняется условию (1.5) теоремы единственности. Двойные интегралы заменяются на однократные. Все результаты, полученные для напряжения и функции  $\beta$ , сохраняют силу и для плоского случая.

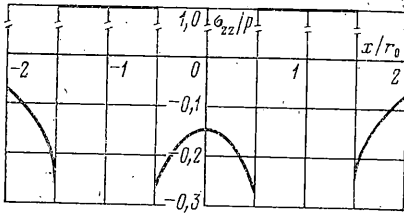
В [2] приводится решение плоской задачи, в которой напряжение  $\sigma_{zz}$  удовлетворяет (1.5),  $p(x, y) = \text{const}$ , а напряжение в области  $P$  знакопеременно и непрерывно при переходе через границу  $\Gamma$ . Из 4.2, 4.3 следует, что это решение ошибочно. Причина ошибки (необоснованное допущение ограниченности производной от напряжения в окрестности  $\Gamma$ ) указана в [4].

Формулы (3.4), (3.6) позволяют вычислять напряжение на границе  $z=0$  даже в случае довольно сложной конфигурации области  $V$ . Это связано с возможностью применить при решении уравнения (3.4) метод последовательных приближений. Действительно, формула (3.5) равносильна следующей цепочке равенств:

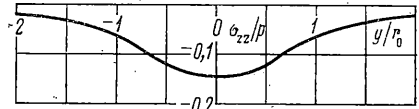
$$\beta = \lim_{N \rightarrow \infty} \beta_N, \beta_N = \sum_{n=0}^N K^n p, \beta_{N+1} = K\beta_N, \beta_0 = p$$

Сходимость последовательных приближений следует из того, что  $\|K\| < 1$ . Если  $p(x, y)$  непрерывна в замыкании  $V$ , то последовательные приближения сходятся равномерно.

В частности, были проведены расчеты  $\sigma_{zz}$  в случае, когда  $V$  представляет собой два одинаковых квадрата со стороной  $r_0$  на расстоянии  $r_0$  один от другого. Стороны квадратов параллельны координатным осям  $x$ ,  $y$ , причем ось  $x$  является осью симметрии для каждого из них. Нагрузка  $p(x, y)$



Фиг. 3



Фиг. 4

считалась постоянной. Эта задача возникает при расчете горного давления на горизонтальный угольный пласт  $P$ , ослабленный выработками  $V$ .

На фиг. 3 приведено распределение напряжения в области  $P$  вдоль оси  $x$ , а на фиг. 4 — вдоль оси  $y$  ( $r_0x=1$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
2. Немировский Ю. В., Миренков В. Е. Напряженное состояние массива горной породы с горизонтальной выработкой при наличии закладки.— Физ.-техн. пробл. разработки полезных ископаемых, 1973, № 3, с. 3—11.
3. Линьков А. М. Эффективные методы решения задачи об опорном давлении.— Физ.-техн. пробл. разработки полезных ископаемых, 1975, № 6, с. 3—10.
4. Кавлакан М. В., Михайлов А. М. О распределении давления на пласт при горизонтальной выработке.— Физ.-техн. пробл. разработки полезных ископаемых, 1977, № 5, с. 48—53.
5. Салганик Р. Л. Тонкий упругий слой, испытывающий скачок характеристик в бесконечном упругом теле.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 2, с. 154—163.
6. Векуа И. Н. Об интегродифференциальном уравнении Прандтля.— ПММ, 1945, т. 9, вып. 2, с. 143—150.
7. Кавлакан М. В., Михайлов А. М. Решение смешанной статической задачи теории упругости для полупространства на упругом основании.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, вып. 6, с. 1338—1341.
8. Рекач В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости. М.: Высшая школа, 1977. 216 с.
9. Мухомелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
10. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 499 с.
11. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
18.X.1979