

УДК 539.374

КОСОЙ УДАР ПО ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

КОЛЕСНИКОВ В. А.

Рассматривается одномерная автомодельная задача о косом ударе. Покоящееся и ненапряженное полупространство $x_1 \geq 0$ подвергается воздействию нормальной и касательной нагрузок, приложенных одновременно и не меняющихся со временем. Исследуется его движение. Деформации объема упруги, пока не достигнут предельного значения ϑ_0 , среда несжимаема при нагрузке и разгрузке. По сдвигу среда описывается моделью С. С. Григоряна [1].

Впервые такая задача была решена в [2], а затем рассматривалась в [3–5]. Были найдены приближенные решения: в уравнениях движения и состояния не учитывались конвективные члены, т. е. полные производные по времени от скорости и напряжения заменялись локальными производными. Использовалось приближенное соотношение между нормальными девиаторными компонентами напряжения.

В предлагаемой здесь постановке это предположение выполняется точно, если внешняя нормальная нагрузка будет по абсолютной величине больше некоторого значения, зависящего от параметров среды. Найдено точное решение в очень простой форме, позволяющей исследовать его зависимость от параметров. (В [2–5] для приближенного решения это можно было сделать лишь при помощи расчетов на ЭВМ.) Ниже исследуется величина ошибки, возникающей при пренебрежении конвективными членами в ускорении и замене производной от напряжений по Яуману локальной производной по времени в уравнениях состояния.

1. Введем эйлерову систему координат (x_1, x_2, x_3) с началом на невозмущенной границе, ось x_1 направлена в глубь среды. Описанная выше задача сводится к решению следующей системы уравнений.

Соотношения массы и импульса

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \rho \frac{dv_i}{dt} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (1.1)$$

Здесь ρ — текущая плотность, v_i — компоненты скорости, σ_{ij} — компоненты напряжения, d/dt — полная производная по времени.

Обозначим деформацию объема и давление через $\vartheta = 1 - \rho_0/\rho$, $p = -\sigma_{ii}/3$, где ρ_0 — начальная плотность. Связь между ними линейная $\vartheta = p/k$, если в процессе деформирования $\max p(t) < k\vartheta_0$, материал несжимаем и $\vartheta = \vartheta_0$ в противном случае (фиг. 1).

Здесь ϑ_0 — предельное значение объемного сжатия, k — параметр среды.

Девиаторные компоненты напряжения s_{ij} и скорости деформаций связаны соотношениями Прандтля — Рейсса

$$G(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}) = Ds_{ij}/Dt + \lambda s_{ij} \quad (\lambda \geq 0) \quad (1.2)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_{ij}p, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{Ds_{ij}}{Dt} = \frac{ds_{ij}}{dt} + s_{kj}\omega_{ki} + s_{ik}\omega_{kj}, \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Здесь G — модуль сдвига, D/Dt — производная по Яману. Условие пластичности берется в форме Мизеса — Шлейхера

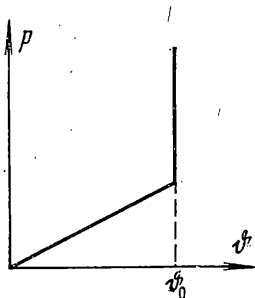
$$s_{ij}s_{ij}=2(hp+m)^2 \quad (1.3)$$

Начальные условия нулевые $\sigma_{ij}=0$, $v_i=0$ ($t=0$). Краевые условия на границе полупространства

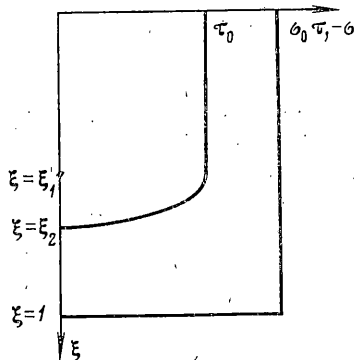
$$\sigma_{ii}=-\sigma_0, \quad \sigma_{12}=\tau_0, \quad \sigma_{13}=0 \quad (1.4)$$

где σ_0 , τ_0 — константы и $\sigma_0 > 0$.

В случае режима движения с продольной ударной волной в качестве краевого условия на фронте используются законы сохранения массы и



Фиг. 1



Фиг. 2

импульса в форме (V — скорость ударной волны):

$$v_1=\vartheta V, \quad \sigma_{11}=-\rho_0 V v_1 \quad (1.5)$$

Материал среды может находиться в различных состояниях в зависимости от величин поверхностных нагрузок и параметров среды. Так, среда может быть в упругом по объему, упругом или пластическом состоянии по сдвигу. Решения для этих случаев содержатся в [2—5]. Если

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &> \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m}{G-2kh/\sqrt{3}}, \quad \frac{2}{\sqrt{3}} kh < G \\ \sigma_0 &> \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}} h\right) \vartheta_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m}{k} \end{aligned} \quad (1.6)$$

среда становится несжимаемой за ударной волной и находится в пластическом состоянии по сдвигу. Такая ситуация возможна для грунтов при воздействии на них высоких нагрузок. Именно этот случай рассматривается в данной работе.

2. Как известно [2], в силу отсутствия в задаче параметров размерности длины и скорости она является автомодельной. Введем новую независимую переменную $\xi=x_1/(Vt)$ и безразмерные зависимые переменные: $\sigma=\sigma_{11}/\sigma_0$, $\tau=\sigma_{12}/\sigma_0$, $p=p/\sigma_0$, $u=v_1/V$, $v=v_2/V$. Перед ударной волной, согласно начальным условиям, напряжения и скорости — нулевые. На фронте, т. е. для $\xi=1$, при сделанных предположениях материал среды упаковывается. Нормальные напряжения и продольные скорости, как следует из уравнений (1.4) и краевых условий (1.5), достигают скачком значений $\sigma=-1$, $u=\vartheta_0$. Далее до границы полупространства они остаются

постоянными и равными этим значениям. Оставшиеся уравнения системы (1.1) — (1.3) описывают распространение поперечной волны

$$\begin{aligned} (\vartheta - \xi)(1 - hz)p' + (1 + \mu(z)) \frac{\tau}{hp + a} b z v' &= 0 \\ (\vartheta - \xi)\tau' - (\vartheta - \xi) \frac{h\tau}{hp + a} p' - \frac{3}{4}(1 + \mu(z)) b z^2 v' &= 0 \\ \vartheta(\vartheta - 1)\tau' + (\vartheta - \xi)v' &= 0, \quad z = (\sigma + p) / (hp + a) \\ \mu(z) = c_1/z(1 - hz), \quad c_1 = (h\sigma_0 + m)/G, \quad a = m/\sigma_0, \quad b = g/\sigma_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Решениями системы (2.1) могут быть константы, что соответствует в полупространстве области постоянных значений напряжений и скоростей. Система (2.1) имеет также переменные решения. Причем касательные напряжения монотонно возрастают с уменьшением ξ от нуля в некоторой точке ξ_2 до τ_0 в какой-то точке ξ_1 . Последнее обстоятельство вызвано предположением о том, что на фронте ударной волны выполняется условие текучести, поэтому в качестве краевых для системы (2.1) принимаются условия

$$\tau(\xi_2) = 0, \quad \tau(\xi_1) = \tau_0 \quad (2.2)$$

Сами решения определяются соотношениями

$$p(\xi) = (az - 1) / (1 - hz), \quad \tau(\xi) = (hp + a) \sqrt{1 - 3/4z^2} \quad (2.3)$$

$$v(\xi) = \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\vartheta(\vartheta - 1)\tau'}{\eta - \vartheta} d\eta$$

и соответствуют в полупространстве пластической поперечной волне.

Переменная $z = z(\xi)$ находится из условия равенства нулю определителя из коэффициентов при производных. В (2.1)

$$(1 + \mu(z))g(z) = (\xi - \vartheta)^2 / d^2 \quad (2.4)$$

$$g(z) = z(h - 3/4z) / (hz - 1), \quad d^2 = \vartheta(1 - \vartheta) / b$$

Значения касательных напряжений вещественны. Поэтому, как следует из второго соотношения (2.3), $-2/\sqrt{3} \leq z < 0$.

Условия (2.2) служат уравнениями для определения границ пластической зоны ξ_1 и ξ_2 . На основе (2.4) для них получаются выражения

$$\begin{aligned} [(\xi_1 - \vartheta_0) / d]^2 &= (1 + \mu(z_1))g(z_1) \\ [(\xi_2 - \vartheta_0) / d]^2 &= (1 + \mu(z_2))g(z_2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

где z_1 и z_2 — значения функции z в точках ξ_1 и ξ_2 .

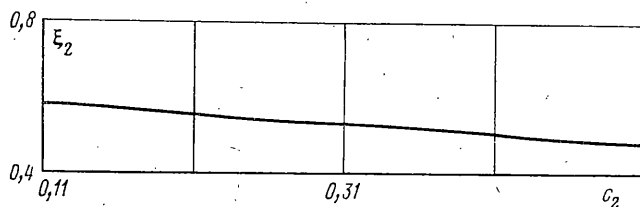
Заметим, что $z_2 = -2/\sqrt{3}$, z_1 — наименьший отрицательный корень уравнения

$$[\tau_0(1 - hz) / (h + a)]^2 + 3/4z^2 - 1 = 0 \quad (2.6)$$

Приведем полное решение поставленной выше задачи (фиг. 2). Впереди по невозмущенному полупространству движется ударная волна. На ее фронте при $\xi = 1$ материал среды становится несжимаемым и, кроме того, выполняется условие текучести. Нормальные напряжения и продольные скорости претерпевают скачок. От фронта до границы полупространства идет область постоянных значений нормальных напряжений и скоростей, равных по величине $\sigma = -1$, $u = \vartheta_0$. Начиная от ξ_2 движется

пластическая поперечная волна. Касательные напряжения, поперечные скорости и давление на ней определяются соотношениями (2.3). От ξ_1 до границы полупространства идет зона постоянных касательных напряжений и поперечных скоростей.

Численный анализ решения, проведенный на ЭВМ для различных значений параметров среды, удовлетворяющих (1.6), показал во всех случаях, что размеры пластической зоны существенно малы по сравнению с ее расстоянием от поверхности полупространства $(\xi_2 - \xi_1) / \xi_1 = 0,014$.



Фиг. 3

Касательные напряжения внутри пластической зоны меняются по величине от нуля до τ_0 . Ввиду малости ее размеров это изменение происходит резко, почти скачком, поэтому в дальнейшем будем считать, что местоположение пластической зоны в полупространстве определяется координатой ξ_2 . Согласно (2.5), имеем

$$\xi_2 = \vartheta_0 + d\sqrt{1 - c_2}$$

$$c_2 = \mu(z_2) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{h\sigma_0 + m}{G(1 - 2h/\sqrt{3})} \quad (2.7)$$

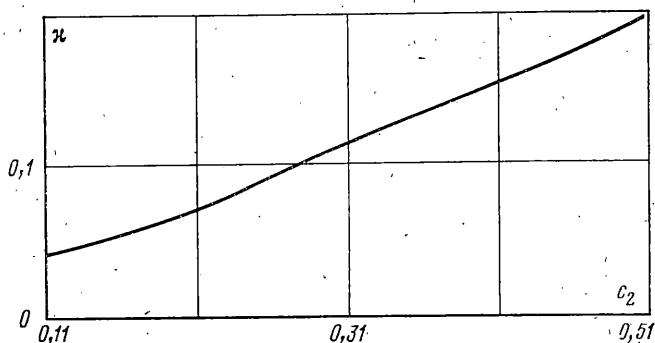
На фиг. 3 приводится зависимость координаты ξ_2 от константы c_2 для конкретных значений параметров среды.

3. Система уравнений с локальными производными по времени, используемая при решении задачи о косом ударе в [2—5], может быть получена, если в уравнениях (2.1) отбросить некоторые слагаемые. Отбрасывание конвективных членов возможно, если ϑ мало по сравнению с ξ . В этом случае в уравнениях выражения, их содержащие, будут действительно малы. Точно также члены, определяемые производной от напряжений в смысле Яумана, будут малы в том случае, когда $\mu(z)$ мало по сравнению с единицей.

Решение системы уравнений, не содержащей конвективных, «яумановых» или тех и других членов одновременно, является приближенным решением задачи. Сравнением точного решения, полученного выше, с этим приближенным делается оценка погрешности последнего. Структура решения не зависит от того, отбрасываются или удерживаются конвективные и «яумановы» члены. При сделанных предположениях в (1.1) оно всегда состоит из ударной волны, пластической поперечной волны и зон постоянных касательных и нормальных напряжений, расположенных в одной и той же последовательности. Часть решения, описывающая нормальные напряжения, всегда неизменна. Местоположение фронта ударной волны и величина скачка на нем для всех рассматриваемых случаев определяется однозначно. Как для точного, так и для приближенных решений характерно изменение касательных напряжений от нуля до τ_0 внутри пластической зоны с последующим сохранением их величины постоянной, равной τ_0 вплоть до границы полупространства. Как показало сравнение,

эти решения отличаются только местоположением пластической зоны и ее размером.

Пренебрегая в уравнениях (2.1) конвективными членами и членами с производной от напряжений в смысле Яумана, получаем для координаты пластической зоны $\xi_2 = \xi_{21} = d$. Решение с учетом конвективных членов дает $\xi_2 = \xi_{22} = d + \vartheta_0$, т. е. удержание конвективных членов в уравнениях приводит лишь к сдвигу пластической зоны в глубь полупространства на величину ϑ_0 . При этом размер ее по сравнению с предыдущим приближением остается без изменений. Если учесть еще и «яумановы» члены, то получим точное решение. Для него координата пластической зоны $\xi_2 = \xi_{23}$.



Фиг. 4

определяется формулой (2.7). Пластическая зона занимает новое положение — промежуточное по сравнению с двумя разобранными приближенными решениями. Она подвинута в глубь полупространства больше, чем в самом простом случае, но не настолько, как в том случае, когда учитываются только конвективные члены. При этом, как показал расчет на ЭВМ, размер ее несколько уменьшился.

Нетрудно видеть, что $\xi_{23} = \xi_{22}$ только в том случае, когда $\vartheta_0 = 0$ или $\vartheta_0 = 1$. Из физических соображений следует, что два последних равенства невыполнимы. С другой стороны, $\xi_{23} = \xi_{21}$, может быть, лишь при $\vartheta_0 = 0$ или $c_2 = 0$. Но константа c_2 в нуль обращаться не может. Согласно (1.6) и (2.7), она ограничена снизу величиной

$$0 < c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m}{k} \left(\frac{G}{k} - \frac{2}{\sqrt{3}} h \right)^{-1} \quad (3.1)$$

Таким образом, пластическая зона точного решения своим положением в полупространстве действительно отличается от такой же зоны для приближенного решения.

Чтобы более подробно оценить влияние членов, связанных с производной в смысле Яумана, на положение пластической зоны, рассмотрим отношение $\kappa = (\xi_{22} - \xi_{23}) / \xi_{22}$. Величина κ определяется константой c_2 :

$$\kappa = \xi_{21} (1 - \sqrt{1 - c_2}) / \xi_{22} = d (1 - \sqrt{1 - c_2}) / (d + \vartheta_0) \quad (3.2)$$

В расчетах принимались следующие значения констант среды: $m/G = 0,1$, $h = 0,2$, $\vartheta_0 = 0,2$. Величина c_0/m менялась от 6,0 до 10,0 с шагом 0,5. При таких значениях параметров среды соотношения (1.6) справедливы для многих грунтов. На фиг. 4 приводится зависимость κ от c_2 . Наименьшее отклонение пластической зоны точного решения от ее положения в приближенном решении происходит для значений c_2 , близких $c_3 = 0,11$. Пластическая зона в этот момент, как следует из фиг. 3, наиболее удалена

от поверхности полупространства. С ростом c_2 она приближается к поверхности полупространства, при этом растет κ , т. е. увеличивается отклонение от ее положения для приближенного решения.

Автор благодарит Зволинского Н. В. и Флитмана Л. М. за ценные обсуждения и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 6, с. 1057–1072.
2. Скобеев А. М. О плоской упругопластической волне.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 509–515.
3. Ковшов А. Н. О двух задачах динамики грунта при сильных нагрузках.— Инж. ж. МТТ, 1968, № 5, с. 184–189.
4. Blech H. H., Nelson I. Plane waves an elastic — plastic half-space due to combined surface presure and shear.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1966, v. 33, No. 1, p. 149–158.
5. Новацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 307 с.

Москва

Поступила в редакцию
31.X.1979