

УДК 539.214;539.374

## ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА НА ОСТАТОЧНЫЕ ПРОГИБЫ ПЛАСТИЧЕСКОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ

СКОВОРОДА А. Р.

Динамическому поведению сплошных и кольцевых пластин из жесткопластического материала посвящено большое количество работ, подробный обзор которых представлен в [1]. При этом считалось, что поперечные силы не влияют на условие текучести и диссипацию энергии. Исследования по несущей способности различным образом закрепленных и нагруженных круглых пластин и оболочек при взаимодействии сдвига и изгиба были проведены в [2-5]. Динамика сплошных зацементированных и опертых пластин рассматривалась в [6-8], однако численные расчеты по влиянию поперечного сдвига на остаточные прогибы не проводились.

Ниже, на примере опертой по внешнему краю кольцевой пластинки, проводится сравнение остаточных прогибов, полученных с учетом и без учета поперечного сдвига. Учитывается инерция вращения.

1. Рассмотрим осесимметричную деформацию опертой по внешнему контуру и свободной по внутреннему кольцевой пластинки из жесткопластического материала под действием равномерно распределенной поперечной динамической нагрузки. В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , связанной со срединной поверхностью недеформированной пластины, примем следующие кинематические гипотезы деформирования:  $U_r = zu(r, t)$ ,  $U_\varphi = 0$ ,  $U_z = W(r, t)$  где  $U_r, U_\varphi, U_z$  — компоненты вектора перемещения,  $t$  — время. Ось  $Oz$  направлена в противоположную действующей нагрузке сторону. Компоненты напряжения  $\sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi z}$  равны нулю вследствие симметрии. Компонентой  $\sigma_{zz}$  будем пренебрегать по сравнению с  $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{rz}$ . Пользуясь вариационным принципом Лагранжа в сочетании с принципом Даламбера, получим соответственно уравнения движения

$$\frac{1}{3} u'' = \frac{\partial m_1}{\partial x} + x^{-1}(m_1 - m_2) - ql \quad (1.1)$$

$$w'' = \frac{\partial q}{\partial x} + x^{-1}q + p \quad (1.2)$$

и граничные условия

$$m_1(\beta) = 0, m_1(1) = 0 \quad (1.3)$$

$$(1.4)$$

$$q(\beta) = 0, \left[ \delta w \left( q - l^{-1} \int_{-1}^1 \psi d\xi \right) \right] \Big|_{x=1} = 0, m_i = \int_{-1}^1 \sigma_i \xi d\xi, \quad (i=1,2), q = \int_{-1}^1 \sigma_{13} d\xi$$

$$p = P_z^+ R (\sigma_0 H)^{-1}, \psi = P_z R (\sigma_0 H)^{-1}, w = WH^{-1}, l = RH^{-1}, \tau^2 = \sigma_0 t^2 (2\rho HR)^{-1}$$

$$\xi = zH^{-1}, x = rR^{-1}, \beta = aR^{-1}, \sigma_1 = \sigma_{rr}\sigma_0^{-1}, \sigma_2 = \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_0^{-1}, \sigma_{13} = \sigma_{rz}\sigma_0^{-1}$$

Здесь  $m_1, m_2$  — безразмерные радиальный и окружной изгибающие моменты,  $q$  — безразмерная поперечная сила,  $2H$  — толщина пластинки,  $R$  — ее внешний радиус,  $a$  — внутренний,  $P_z^+$  — поверхностная нагрузка на поверхности  $z=H$ ,  $P_z$  — нагрузка на кромке  $r=R$ ,  $\sigma_0$  — предел текучести



где  $I_j(x)$  и  $K_j(x)$  — функции Бесселя мнимого аргумента первого и второго рода. Учитывая (2.2), из (2.1) получим

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= u(x, \tau_0) + (\tau - \tau_0) u'(x, \tau_0) - 3l [B_{12} I_1(xb) + B_{22} K_1(xb)] \\ w(x, \tau) &= J + w(x, \tau_0) + (\tau - \tau_0) w'(x, \tau_0) + b [B_{12} I_0(xb) - B_{22} K_0(xb)] \quad (2.3) \\ J &= \int_{\tau_0}^{\tau} I(\tau) d\tau, \quad I = \int_{\tau_0}^{\tau} p(\tau) d\tau, \quad B_{i2} = \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{\tau_0}^{\tau} B_i(\tau) d\tau d\tau \quad (i=1,2) \end{aligned}$$

В соответствии с условием пластичности и законом пластического течения для данного режима рассматриваемое решение реализуется при выполнении неравенств  $-\alpha \leq q(x, \tau) \leq \alpha$ ,  $\partial u' / \partial x \leq 0$ ,  $u' \leq 0$ .

Когда в области  $x_1(\tau) \leq x \leq x^1(\tau)$  реализуется пластический режим 3, 2, 8, 9, имеем  $f_1 = -m_2(x, \tau) = 1$ , а из (1.1), (1.2) и (1.5) находим

$$u'(x, \tau) = f(\tau), \quad w'(x, \tau) = g(\tau) - l(x - x_1)f(\tau) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} q(x, \tau) &= x_1 x^{-1} q(x_1) + (x - x_1) (2x)^{-1} [(x + x_1)(g' + \\ &+ l x_1' f - p) - 1/3 l f' (x - x_1) (2x + x_1)] \quad (2.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1(x, \tau) &= x_1 x^{-1} m_1(x_1) + (6x)^{-1} (x^2 - x_1^2) f' + \\ &+ (x - x_1) x^{-1} [l x_1 q(x_1) - 1] + (6x)^{-1} l (x - x_1)^2 [(x + \\ &+ 2x_1)(g' + l x_1' f - p) - 1/2 l f' (x^2 - x_1^2)] \quad (2.6) \end{aligned}$$

где  $f(\tau)$ ,  $g(\tau)$ ,  $q(x_1)$ ,  $m_1(x_1)$  неизвестны и определяются из условий склейки и краевых условий.

Это решение реализуется при выполнении неравенств

$$f(\tau) \leq 0, \quad -1 \leq m_1(x, \tau) \leq 1, \quad -\alpha \leq q(x, \tau) \leq \alpha$$

Рассмотрим, кроме того, случай, когда некоторый участок  $x_*(\tau) \leq x \leq x^*(\tau)$  пластинки движется как жесткое целое. В этом случае  $x_1'(x, \tau) = x_2'(x, \tau) = \varepsilon_{13}(x, \tau) = 0$ , так что

$$u'(x, \tau) = 0, \quad w'(x, \tau) = c(\tau) \quad (2.7)$$

Из (1.2) с учетом (2.7) следует

$$q(x, \tau) = x_* x^{-1} q(x_*) + (2x)^{-1} (x^2 - x_*^2) [c'(\tau) - p(\tau)] \quad (2.8)$$

а уравнение (1.4) вместе с (2.7) и (2.8) выражает связь между изгибающими моментами.

3. Несущая способность пластинки определяется из условия достижения поперечной силой или изгибающими моментами значений, соответствующих выходу на поверхность текучести при условии отсутствия ускорений. Для потери несущей способности вследствие изгиба необходимо, чтобы вся пластинка перешла от жесткого состояния в режим 3, 2, 8, 9. При этом  $x_1(\tau) = \beta$ ,  $x^1(\tau) = 1$  и из (2.6) с учетом граничных условий имеем предельную статическую нагрузку на изгиб

$$P_1(l, \beta) = -6[l(1 - \beta)(1 + 2\beta)]^{-1} \quad (3.1)$$

Для потери несущей способности за счет поперечного сдвига необходимо, чтобы величина  $q(x)$  в жесткой пластине достигла своего предельного значения  $q_* = \alpha$ . Из (2.8) при  $x_*(\tau) = \beta$ ,  $x^*(\tau) = 1$ ,  $c'(\tau) = 0$  следует, что  $q(x)$  достигает максимума при  $x = 1$ , а предельная статическая нагрузка на срез имеет вид

$$P_2(\beta) = -2\alpha(1 - \beta^2)^{-1} \quad (3.2)$$

На фиг. 2 кривая  $BC$  изображает зависимость  $P_1(l)$ , а прямая  $AD$  соответствует нагрузке  $P_2(\beta)$  при  $\alpha=2/\sqrt{3}$ ,  $\beta=0,1$ . Область, лежащая ниже кривой  $ADC$ , является областью жесткости. При  $l=l_*(\beta)=3(1+\beta)\times[\alpha(1+2\beta)]^{-1}$  выполняется равенство  $P_1(l, \beta)=P_2(\beta)$ .

4. Рассмотрим случай, когда пластинка, оставаясь жесткой, срезается на опоре и  $x_*(\tau)=\beta$ ,  $x^*(\tau)=1$ ,  $q(1, \tau)=\alpha$ , а второе условие (1.4) выполняется за счет последнего сомножителя. На основании (2.8) имеем  $c^*(\tau)=-p(\tau)+2\alpha(1-\beta^2)^{-1}$  и из (2.7) и (3.2) находим

$$w(\tau)=J(\tau)^{-1/2}P_2(\beta) \quad (4.1)$$

Время остановки  $\tau_1^f$  определяется из условия  $I(\tau_1^f)=\tau_1^f P_2(\beta)$ , а остаточное смещение пластины равно

$$w_* = w(\tau_1^f) = J(\tau_1^f) - I^2(\tau_1^f) [2P_2(\beta)]^{-1} \quad (4.2)$$

Можно проверить, что при  $l=l_*$  пластинка переходит в пластическое состояние за счет изгибающих моментов. Динамический срез жесткой пластинки возможен, следовательно, при  $l < l_*$   $|p(\tau_0)| > |P_2(\beta)|$ .

5. Для простоты изложения ниже рассматриваются невозрастающие по величине нагрузки. При  $l > l_*$  и  $|P_1(l, \beta)| < |p(\tau_0)| \leq \min(|P_3|, |P_4|)$ , где  $P_3(l, \beta)$  и  $P_4(l, \beta)$  определены ниже, вся пластинка находится в пластическом режиме 3, 2, 8, 9 и ее вертикальные смещения на опоре равны нулю. В этом случае  $x_1(\tau)=\beta$ ,  $x^1(\tau)=1$ ,  $w(1, \tau)=0$  и второе из условий (1.4) выполняется за счет первого сомножителя. Из (2.4), (2.6) и граничных условий имеем

$$w^*(x, \tau) = (1-x)(1-\beta)^{-1} H_1 [I(\tau) - \tau P_1(l, \beta)] \quad (5.1)$$

$$H_1(l, \beta) = 2l^2(1-\beta)^2(1+2\beta) [2(1+\beta) + l^2(1-\beta)^2(1+3\beta)] \quad (5.2)$$

Время остановки  $\tau_2^f$  определяется из условия  $I(\tau_2^f) = \tau_2^f P_1(l, \beta)$ , а максимальный остаточный прогиб равен

$$w_* = w(\beta, \tau_2^f) = H_1 \{J(\tau_2^f) - I^2(\tau_2^f) [2P_1(l, \beta)]^{-1}\} \quad (5.3)$$

Эти формулы позволяют наиболее просто по сравнению с приведенными ниже проследить влияние инерции вращения: первый член в квадратных скобках выражения (5.2) появляется за счет левой части в уравнении (1.1).

Поперечная сила на опоре при

$$p(\tau_0) = P_3(l, \beta) = \{12l(1-\beta)^2(1+2\beta) - 6\alpha[2(1+\beta) + l^2(1-\beta)^2(1+3\beta)]\} \{(1-\beta)[l^2(1-\beta)^2(1+4\beta+\beta^2) + 6(1+\beta^2)]\}^{-1}$$

достигает предельного значения и появляется срез; при

$$p(\tau_0) = P_4(l, \beta) = -12\beta\psi_1(l\psi_2)^{-1}, \quad \psi_1 = 2y + l^2(y-\beta)(3y+3\beta-2\beta y-2\beta^2-2y^2),$$

$$\psi_2 = (y-\beta)^2 [2(2\beta y + 3\beta^2 + y^2) + l^2(y-\beta)^2(y^2 + 4\beta y + \beta^2)]$$

в точке  $x=y$  появляется пластический режим 3, 9. Величина  $y$  определяется из равенства

$$2\beta(1-\beta)(1+2\beta)\psi_1 - \psi_2 - 3\beta(y^2 - \beta^2) [2(1+\beta) + l^2(1-\beta)^2(1+3\beta)] = 0$$

На фиг. 2 приведены зависимости  $P_3(l)$  и  $P_4(l)$  при  $\beta=0,1$ . Зависимости  $P_3(\beta)$  и  $P_4(\beta)$  для трех значений  $l$  представлены на фиг. 3.

При  $|P_4| \leq |p(\tau_0)| < |P_3|$ , где  $P_3(l, \beta)$  определена ниже, область  $\xi(\tau) \leq x \leq \eta(\tau)$  занимает пластический режим 3, 9. Оставшаяся часть пластинки находится в режиме 3, 2, 8, 9 и у нее отсутствуют вертикальные сме-

щения на опоре. На основании приведенных в п. 2 формул, условий склейки и граничных условий находим максимальный остаточный прогиб

$$w_* = w(\beta, \tau_3^f) = \int_0^{\tau_3} g(\tau) d\tau + l(1-\beta) \int_{\tau_3}^{\tau_3^f} f_1(\tau) d\tau \quad (5.4)$$

при  $\tau \leq \tau_3$

$$g(\tau) = l(\xi - \beta) f + b [B_{11} I_0(\xi b) - B_{21} K_0(\xi b)] + I(\tau)$$

Величина  $\tau_3$  определяется равенством  $\xi(\tau_3) = \eta(\tau_3)$ , а величины  $\xi(\tau)$ ,  $\eta(\tau)$ ,  $B_{11}(\tau)$  и  $B_{21}(\tau)$ , где  $B_{11}(\tau) = B_{12}(\tau)$  ( $i=1, 2$ ) — из системы

$$(\xi^2 - \beta^2) f + 6\beta + l(\xi - \beta)^2 [(\xi + 2\beta)(g^* - p)^{-1/2} f l (\xi^2 - \beta^2)] = 0$$

$$6(1-\eta)^{-1} = (1+\eta) f_1 + 6l\eta q(\eta) +$$

$$+ l(1-\eta) [(2\eta+1)(g_1^* + l\eta^* f - p)^{-1/2} f_1^* l (1-\eta^2)]$$

$$(\xi - \beta) [(\xi + \beta)(g^* - p)^{-1/3} l (\xi - \beta) (2\xi + \beta) f^*] = 2\xi [B_{11}^* I_1(\xi b) + B_{21}^* K_1(\xi b)]$$

$$l(1-\eta) f_1^* - g_1^* - l f_1 \eta^* = 0$$

$$f(\tau) = -3l [B_{11} I_1(\xi b) + B_{21} K_1(\xi b)], \quad f_1(\tau) = -3l [B_{11} I_1(\eta b) + B_{21} K_1(\eta b)] \quad (5.5)$$

$$g_1(\tau) = b [B_{11} I_0(\eta b) - B_{21} K_0(\eta b)]$$

$$q(\eta) = B_{11}^* I_1(\eta b) + B_{21}^* K_1(\eta b), \quad B_{11}(0) = B_{21}(0) = 0$$

Величины  $\xi(0)$  и  $\eta(0)$  совместно с  $B_{11}^*(0)$  и  $B_{21}^*(0)$  определяются из (5.5) при  $\tau=0$  в предположении, что производные  $\xi^*(0)$  и  $\eta^*(0)$  конечны.

При  $\tau > \tau_3$  вся пластинка находится в пластическом режиме 3, 2, 8, 9 и  $f_1(\tau)$  определяется из второго и четвертого уравнений системы (5.5), где следует положить  $\eta = \beta$ ,  $q(\eta) = 0$ . Через  $\tau_3^f$  обозначено время остановки.

Решение системы (5.5) совместно с уравнением

$$q(1, \tau) = \eta q(\eta) + 1/2 (1-\eta) [(1+\eta) \times$$

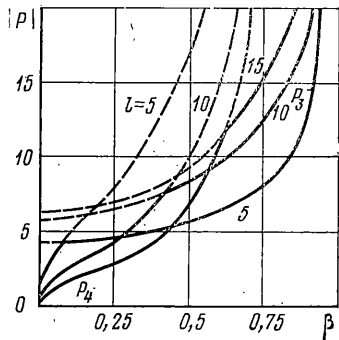
$$\times (g_1^* + l\eta^* f_1 - p)^{-1/3} l f_1 (2+\eta) (1-\eta)] = \alpha$$

при  $\tau=0$  позволяет определить нагрузку  $P_5(l, \beta)$ , необходимую для появления среза на опоре. На фиг. 2 приведена зависимость  $P_5(l)$  при  $\beta=0,1$ ,  $\alpha=2/\sqrt{3}$ .

Описание изгиба срезающихся пластин также не представляет больших затруднений. При этом должны выполняться неравенства  $l > l_*$ ,  $|p(\tau_0)| \geq \max(|P_3(l, \beta)|, |P_5(l, \beta)|)$  и используемое выше условие  $w(1, \tau) = 0$  следует заменить условием  $q(1, \tau) = \alpha$ . При  $l > l_{**}$ , где величина  $l_{**}$  определяется равенством  $P_3(l_{**}, \beta) = P_4(l_{**}, \beta)$ , присутствует пластический режим 3, 9. В противном случае вся пластинка находится в режиме 3, 2, 8, 9. Моменту полной остановки пластины предшествует момент остановки на опоре, после которого пластина изгибается уже без среза.

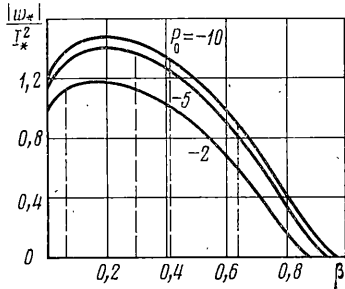
На фиг. 4 приведены зависимости отношения  $w_* I_*^{-2}$  от  $\beta$  ( $l=10$ ) при нагрузке вида:  $p(\tau) = P_0 = \text{const}$  ( $0 \leq \tau \leq I_* P_0^{-1} = T$ ),  $p(\tau) = 0$  ( $\tau > T$ ).

В этом случае при  $0,065 < \beta < 0,892$  выполняется неравенство  $|P_1| < 2 < |P_4|$ , а при  $0 < \beta < 0,065$  — неравенство  $|P_4| < 2 < |P_5|$ ; при  $0,29 < \beta < 0,959$  — неравенство  $|P_1| < 5 < |P_4|$ , а при  $0 < \beta < 0,29$  — неравенство

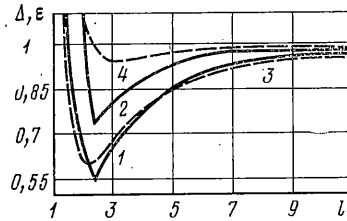


Фиг. 3

$|P_4| < 5 < |P_5|$ ; при  $0,64 < \beta < 0,98$  — неравенство  $|P_1| < 10 < |P_3|$ , при  $0,42 < \beta < 0,64$  — неравенства  $10 < l_{**}$ ,  $|P_3| < 10$ , а при  $0 < \beta < 0,42$  — неравенства  $l_{**} < 10$ ,  $|P_5| < 10$ . Интегрирование получаемых в процессе решения систем линейных дифференциальных уравнений проводилось численно методом Рунге — Кутты четвертого порядка. Обозначим через  $\Delta$  отношение  $w_* w_0^{-1}(\beta)$  а через  $\varepsilon$  — отношение  $w_* w_1^{-1}(\beta)$ , где  $w_0(\beta)$  означает максимальный остаточный прогиб пластинки, подсчитанный без учета инерции



Фиг. 4



Фиг. 5

вращения и поперечного сдвига, а  $w_1(\beta)$  — максимальный остаточный прогиб, вычисленный с учетом инерции вращения, но без учета поперечного сдвига, т. е. в предположении, что  $\alpha = \infty$ , которое влечет за собой обращение в бесконечность величин  $|P_2|$ ,  $|P_3|$ ,  $|P_5|$ . Зависимости  $\Delta(l)$  и  $\varepsilon(l)$  на фиг. 5 обозначены сплошными линиями 1, 2 для  $\beta = 0,1$  и штриховыми 3, 4 для  $\beta = 0,4$  ( $P_0 = -10$ ). С ростом  $|p(\tau_0)|$  эти величины уменьшаются. Из изложенного следует, что поперечные сдвиги существенно влияют на характер динамического поведения пластин при нагрузках высокой интенсивности.

Заметим, что величина  $\lim_{\beta \rightarrow 0} P_4(l, \beta) = \lim_{\beta \rightarrow 0} P_1(l, \beta) = -6l^{-1}$  является предельной статической нагрузкой для сплошных опертых пластин [8]. Приведенное там решение получается из изложенного выше как частный случай при  $\beta = 0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мазалов В. Н., Немировский Ю. В. Динамика тонкостенных пластических конструкций.— Механика. Новое в зарубежной науке: Сб. статей. М.: Мир, 1975, вып. 5, с. 155—247.
2. Шапиро Г. С. О поверхностях текучести для идеально пластических оболочек.— В кн.: Проблемы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 578 с.
3. Sawczuk A., Duszek M. A note on the interaction of shear and bending in plastic plates.— Arch. mech. stowowanej, 1963, v. 15, No. 3, p. 411—426.
4. Жук Н. П., Шаблий О. Н. О предельном равновесии оболочек вращения и круглых пластин с учетом напряжений сдвига.— Прикл. механика, 1972, т. 8, вып. 7, с. 35—41.
5. Жук Н. П., Шаблий О. Н. Предельное равновесие круглой пластинки с учетом напряжений сдвига.— Прикл. механика, 1973, т. 9, вып. 6, с. 47—53.
6. Шапиро Г. С. О динамике жесткопластических тел.— Распространение упругих и упругопластических волн. Материалы VI Всес. симпозиума: Сб. статей. Фрунзенский политехн. ин-т, 1978, с. 195—197.
7. Беклемышев Н. Н., Грибков В. В., Кузнецов А. С. и др. О расчетной схеме высокоскоростного процесса вырубki осесимметричных деталей из листовых заготовок.— Пластические деформации легких и специальных сплавов.: Сб. статей. М.: Металлургия, 1978, вып. 1, с. 257—261.
8. Немировский Ю. В., Скогорода А. Р. Динамический изгиб жесткопластических защемленных круглых пластин при учете эффектов сдвига и инерции вращения.— ПМТФ, 1978, № 2, с. 124—133.

Москва

Поступила в редакцию  
15.XI.1979