

УДК 539.214; 539.374

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О ВДАВЛИВАНИИ ЖЕСТКОГО ШТАМПА В ИДЕАЛЬНОЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

БЫКОВЦЕВ Г. И., ХРОМОВ А. И.

Задача о контакте двух тел была впервые сформулирована в [1], при этом оба тела предполагались упругими. Постановка этой задачи для идеальных жесткопластических сред имеет свои особенности. При сжатии двух жесткопластических тел только одно на первом этапе деформирования переходит в пластическое состояние, второе некоторое время остается жестким. Другая особенность состоит в необходимости учета изменения формы свободной поверхности в процессе деформации. В последующем тело, остающееся жестким, будем называть штампом.

Частный случай решения задачи в такой постановке предложен в [2], где рассматривалась задача о предельном равновесии абсолютно шероховатого выпуклого штампа и жесткопластического полупространства. В отличие от [2] предлагается метод построения решения для выпуклых тел произвольной формы с учетом изменения геометрии деформируемого тела.

Метод решения задач теории плоской деформации идеальных жесткопластических тел изложен в [3] на примерах вдавливания гладких плоских штампов. Предлагаемый метод является обобщением на случай выпуклых тел произвольной формы.

При построении решения используется схема линий скольжения, предложенная в [2].

1. Рассмотрим задачу о вдавливании симметричного абсолютно шероховатого штампа I в жесткопластическое тело криволинейной формы 2 (фиг. 1). Формы штампа и заготовки задаются в начальный момент времени функциями $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$. Так же как и в решении [2], предполагается, что у нижней части штампа имеется область, движущаяся как жесткое целое вместе со штампом.

В процессе внедрения штампа форма заготовки будет изменяться (фиг. 2). Линия скольжения AB , предполагаемая прямой, образует с осью симметрии угол $\pi/4$. Сетка линий скольжения состоит из треугольничка ADC , в котором оба семейства линий скольжения α и β прямолинейные, и центрированного веера BAD . Выше линии DC материал движется как жесткое целое. Поля напряжений и скоростей здесь полностью совпадают с полями в решении [2], т. е. $V_\alpha=1/\sqrt{2}$, $V_\beta=0$. Здесь V_α и V_β — проекции скорости на α и β линии (предполагается, что штамп внедряется с единичной скоростью).

В процессе внедрения штампа угол ψ раскрытия веера ABD изменяется в зависимости от глубины внедрения t , а поверхность заготовки $y=f_2(x)$ преобразуется в деформированную поверхность $y=\Phi(x, t)$, все точки которой в каждый момент времени t перемещаются вдоль линии DC с одной и той же скоростью (отмечена цифрой 3). Проекция скорости на ось координат вычисляются по формулам

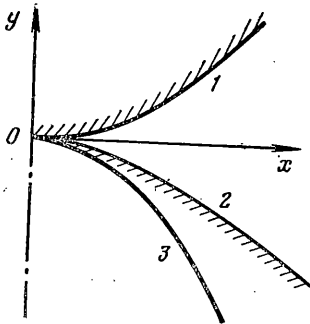
$$V_x = \cos [\psi(t) - \pi/4] / \sqrt{2}, \quad V_y = \sin [\psi(t) - \pi/4] / \sqrt{2} \quad (1.1)$$

Проекция скорости области DAC на нормаль к поверхности штампа в точке A равна $V_n = \sin (\alpha - \psi + \pi/4) / \sqrt{2}$, где α — острый угол между касательной к штампу в точке A и осью x . Проекция скорости штампа на ту

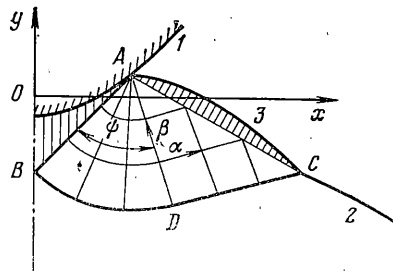
же нормаль $V_n^\circ = \cos \alpha$. Отсюда относительная скорость свободной поверхности и штампа в направлении нормали

$$\Delta V_n = V_n - V_n^\circ = \sin(\alpha - \psi + \pi/4) / \sqrt{2} - \cos \alpha$$

Можно заметить, что ΔV_n достигает максимального значения при $\psi = 0$ и максимально возможном значении угла α . Значение угла α ограничено $\pi/4$, которое следует из условия существования статически допустимого продолжения поля напряжений в жесткую область под штампом [4]. Поэтому $\max(\Delta V_n) = 0$ и для выбранной схемы поля линий скольжения положение точки A определяется пересечением поверхности штампа и деформированной поверхности, которая целиком образуется в точке C .



Фиг. 1



Фиг. 2

Случай $\alpha = \pi/4$ соответствует вдавливанию абсолютно шероховатого плоского клина и может быть проанализирован методами, изложенными в [3].

При установившемся течении $\psi(t) > 0$ и $\Delta V_n < 0$. В результате деформации частицы, находившиеся в покое на недеформированной поверхности, всегда попадают на штамп. В этом случае задачу об определении формы деформированной поверхности можно свести к интегрированию системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Согласно (1.1), деформированную поверхность можно представить в виде

$$\Phi(x, t) = F \left\{ x - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \cos \left[\psi(\lambda) - \frac{\pi}{4} \right] d\lambda \right\} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \sin \left[\psi(\lambda) - \frac{\pi}{4} \right] d\lambda \quad (1.2)$$

Здесь $y = F(x)$ — поверхность, проходящая через линию начального контакта штампа и заготовки (фиг. 1, кривая 3), которая, перемещаясь поступательно вдоль DC , образует деформированную поверхность.

Пусть $x_A(t)$, $y_A(t)$, $x_C(t)$, $y_C(t)$ — соответственно координаты точек A и C в момент времени t . Так как точка A лежит на штампе, а точка C — на недеформированной поверхности, имеем

$$y_A(t) = f_1[x_A(t)] - t, \quad y_C(t) = f_2[x_C(t)] \quad (1.3)$$

Линия AB проходит к оси симметрии под углом $\pi/4$, а треугольник ADC прямоугольный и равнобедренный; поэтому

$$y_A(t) - y_C(t) = 2x_A(t) \cos \psi(t) \quad (1.4)$$

$$x_C(t) = x_A(t) [1 + 2 \sin \psi(t)] \quad (1.5)$$

Подставляя выражения (1.3) в (1.4), получаем

$$2x_A(t) \cos \psi(t) = f_1[x_A(t)] - t - f_2[x_C(t)] \quad (1.6)$$

Точка A лежит на пересечении штампа и деформированной поверхности, поэтому

$$f_1[x_A(t)] - t = F \left\{ x_A(t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \cos \left[\psi(\lambda) - \frac{\pi}{4} \right] d\lambda \right\} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \sin \left[\psi(\lambda) - \frac{\pi}{4} \right] d\lambda \quad (1.7)$$

Точка C лежит на пересечении деформированной поверхности и недеформированной поверхности, отсюда

$$f_2[x_C(t)] = F \left\{ x_C(t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \cos \left[\psi(\lambda) - \frac{\pi}{4} \right] d\lambda \right\} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \sin \left[\psi(\lambda) - \frac{\pi}{4} \right] d\lambda \quad (1.8)$$

Система четырех уравнений (1.5)–(1.8) определяет четыре неизвестные функции: $x_A(t)$, $x_C(t)$, $\psi(t)$, $F(x)$.

Решение этой системы уравнений может быть сведено к интегрированию системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} X_A(t) &= x_A(t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \cos \left[\psi(\lambda) - \frac{\pi}{4} \right] d\lambda \\ Y_A(t) &= f_1[x_A(t)] - t - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \sin \left[\psi(\lambda) - \frac{\pi}{4} \right] d\lambda \\ X_C(t) &= x_C(t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \cos \left[\psi(\lambda) - \frac{\pi}{4} \right] d\lambda \\ Y_C(t) &= f_2[x_C(t)] - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \sin \left[\psi(\lambda) - \frac{\pi}{4} \right] d\lambda \end{aligned}$$

Тогда уравнения (1.7) и (1.8) могут быть приведены к виду

$$Y_A(t) = F[X_A(t)], \quad Y_C(t) = F[X_C(t)] \quad (1.9)$$

Уравнения (1.9) определяют на кривой $y = F(x)$ две точки A' и C' , которые в момент времени t займут соответственно положение точек A и C .

В процессе деформации точки A' и C' перемещаются по линии $y = F(x)$. Рассмотрим момент времени $\tau(t)$, предшествующий t , когда точка $A'(\tau)$ совпала с точкой $C'(\tau)$. С физической точки зрения в момент времени τ точка, занимающая в момент времени t положение точки A , толь-

ко начала двигаться с недеформированной поверхности. Таким образом

$$Y_A(t) = Y_c(\tau), \quad X_A(t) = X_c(\tau) \quad (1.10)$$

Подставив (1.9) в (1.10) и продифференцировав по t , получим вместо уравнений (1.7), (1.8) два дифференцированных уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{aligned} x_A'(t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left[\psi(t) - \frac{\pi}{4} \right] &= x_c'(\tau) \tau'(t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left[\psi(\tau) - \frac{\pi}{4} \right] \tau'(t) \\ f_1'[x_A(t)] x_A'(t) - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left[\psi(t) - \frac{\pi}{4} \right] &= \\ = f[x_c(\tau)] x_c'(\tau) \tau'(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left[\psi(\tau) - \frac{\pi}{4} \right] \tau'(t) & \end{aligned} \quad (1.11)$$

Уравнения (1.11) вместо известной функции $F(x)$ содержат функцию $\tau(t)$. Функция $y = F(x)$ определяется в параметрическом виде уравнениями (1.9), (1.10).

2. Рассмотрим начальные условия для системы уравнений (1.5), (1.6), (1.11). Остановимся на случае, когда пластическая зона вырождается в момент времени $t=0$ в линию начального контакта штампа и заготовки с координатами $x=0$ и $y=0$, тогда

$$x_A(0) = 0, \quad x_c(0) = 0, \quad \tau(0) = 0 \quad (2.1)$$

Найдем начальное значение угла $\psi_0 = \psi(0)$. Перейдем в уравнениях (1.5), (1.6) и (1.11) к пределу при $t \rightarrow 0$. Учитывая (2.1), уравнение (1.5) обратится в тождество. Из уравнения (1.6) следует

$$\cos \psi_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_1[x_A(t)] - t - f_2[x_c(t)]}{2x_A(t)}$$

Применяя правило Лопиталья и учитывая соотношение $x_c'(0) = -x_A'(0)(1+2 \sin \psi_0)$, получим

$$\cos \psi_0 = \frac{1}{2} f_1'(0) - \frac{1}{2x_A'(0)} - \frac{1}{2} f_2'(0)(1+2 \sin \psi_0) \quad (2.2)$$

Из уравнений (2.1) следует

$$\begin{aligned} x_A'(0) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(\psi_0 - \frac{\pi}{4} \right) &= \left[x_A'(0)(1+2 \sin \psi_0) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left(\psi_0 - \frac{\pi}{4} \right) \right] \tau'(0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

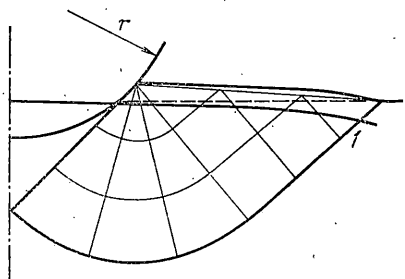
$$\begin{aligned} f_1'(0) x_A'(0) - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(\psi_0 - \frac{\pi}{4} \right) &= \\ = \left[f_2'(0) x_A'(0)(1+2 \sin \psi_0) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(\psi_0 - \frac{\pi}{4} \right) \right] \tau'(0) \end{aligned}$$

Таким образом, в начальный момент времени $t=0$ для двух неизвестных производных $x_A'(0)$ и $\tau'(0)$ имеем три уравнения (2.2), (2.3). Условие совместности этих уравнений определяет начальное значение ψ_0 .

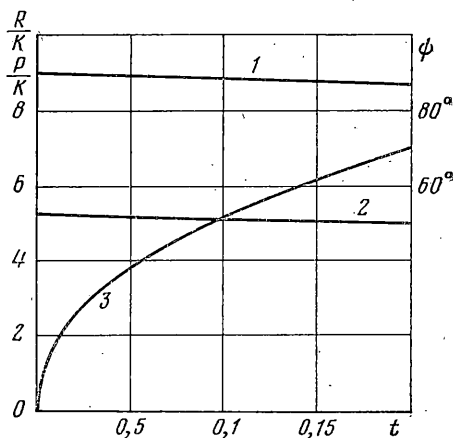
Угол ψ_0 совпадает при этом с углом раскрытия веера BAD в автотельном течении абсолютно шероховатого тупого клина в клинообразное тело, углы раствора которых задаются соответственно производными $f_1'(0)$ и $f_2'(0)$. При $f_2'(0)=0$ это условие запишется в виде

$$f_1'(0) = 4 \cos \psi_0 (1 + \sin \psi_0) \tag{2.4}$$

В задачах, когда обе производные $f_1'(0)$ и $f_2'(0)$ обращаются в нуль, построение решения в окрестности $t=0$ с помощью уравнений (2.2), (2.3) затруднено, так как производные $x_A'(0)$ и $\psi'(0)$ обращаются в беско-



Фиг. 3



Фиг. 4

нечность. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ предполагаются непрерывными в окрестности точки $x=0$. Поэтому функции $x_A(t)$ и $\psi(t)$ являются непрерывными функциями времени t .

Из уравнения (2.4) следует, что при $f_1'(0)=0$ и $f_2'(0)=0$ деформация в окрестности $t=0$ будет происходить при углах ψ , близких к $\psi_0=\pi/2$. Тогда положение точки A можно приблизительно определить как пересечение поверхности штампа $y=f_1[x_A(t)]-t$ и прямой $y=1/2t$. Уравнение $1/2t=f_1[x_A(t)]-t$ определяет функцию $x_A(t)$ в окрестности $t=0$. Зависимость $\psi(t)$ легко получить из уравнения (1.6); ее можно использовать для оценки погрешности аппроксимации. Из уравнений (1.9), (1.10) следует, что при углах ψ , близких к $\pi/2$, функция $x_A(t) \approx x_c(\tau)$, откуда получим уравнение $3x_A(\tau) \approx x_A(t)$, которое определяет в окрестности $t=0$ функцию $\tau(t)$.

В качестве примера рассмотрим деформацию жесткопластического полупространства при внедрении в него абсолютно шероховатого цилиндра радиуса $r=1$. В этом случае

$$f_1(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}, \quad f_2(x) = 0, \quad f_1'(0) = 0, \quad f_2'(0) = 0$$

Из приведенных уравнений в окрестности точки $t=0$ будем иметь $x_A(t) = (3t - 9/4t^2)^{1/2}$.

Дальнейшее построение решения может быть осуществлено численным методом при помощи системы (1.5), (1.6), (1.11). На фиг. 3, 4 представлены результаты численного решения системы (1.5), (1.6), (1.11) методом Рунге — Кутты.

На фиг. 3 изображена деформированная поверхность при глубине внедрения $t=0$, 2 (кривая 1 соответствует $y=F(x)$). На фиг. 4 представлены зависимости угла раствора веера $\psi(t)$ (кривая 1), безразмерного

давления $p(t)/K=2(1+\psi(t))$ (кривая 2) на линии контакта и удельного усилия $R(t)/K$ (кривая 3) на единицу длины штампа, необходимого для его внедрения: $R(t)=4x_A(t)[1+\psi(t)]$.

В рассмотренном интервале глубин внедрения (0; 0,2) величина давления изменяется мало ($\approx 2,6\%$) и величина усилия $R(t)$ определяется площадью отпечатка штампа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hertz H. Schriften vermischten. Gesammelte Werke. В. 1. Leipzig: Barth, 1895.
2. Прандтль Л. Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел.— В кн.: Теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948, с. 102–113.
3. Быковцев Г. И., Хромов А. И. Плоская деформация идеальных жесткопластических тел с учетом изменения границы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 2, с. 74–78.
4. Lee E. H. The theoretical analysis of metall-forming problems in plane strain.— J. Appl. Mech., 1952, v. 19, No. 1, p. 97–103.— Рус. перев.: Механика. Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1953, № 1, с. 107–121.

Куйбышев

Поступила в редакцию
11.XI.1979