

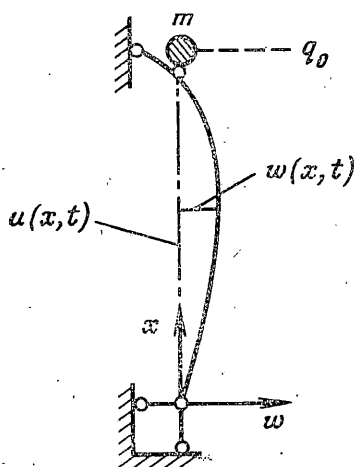
УДК 624.07:534.1

К ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ДВУМЯ ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ

АЛИФОВ А. А., ГЛУХАРЕВ К. К., ФРОЛОВ К. В.

Данная работа является развитием исследований [1–3] и посвящена изучению резонансов в колебательных системах, содержащих два источника энергии.

1. Рассмотрим параметрическую колебательную систему, показанную на фиг. 1. Пусть ось призматического стержня в недеформированном состоянии совпадает с осью x . Поперечное сечение стержня имеет площадь F , и его концам соответствуют координаты $x=0$, $x=l$. Предположим, что на конце стержня имеется сосредоточенная масса m и ось стержня



Фиг. 1

может изгибаться в плоскости (x, w) . Компоненты перемещения точки A и обобщенную координату, соответствующую массе m , обозначим $u(x, t)$, $w(x, t)$ и q_0 соответственно. Пусть

$$u(x, t) = y(x, t) + q_0 x l^{-1},$$

$$y(0, t) = y(l, t) = 0 \quad (1.1)$$

и структура взаимосвязей источников такова, что колебания возбуждаются посредством наложения на координату q_0 кинематического соотношения

$$q_0 = \varphi \cdot \alpha(\theta) \quad (1.2)$$

Здесь φ — угловая координата амплитудного источника, $\alpha(\theta)$ — функция, характеризующая управление амплитудой воздействия, θ — угловая координата управляющего источника.

Для вывода уравнений движения системы составим выражения потенциальной и кинетической энергии системы.

Потенциальная энергия сжато-деформируемого стержня [4] с учетом (1.1) равна

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ EF \left[\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{q_0}{l} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx \quad (1.3)$$

Здесь E — модуль упругости материала стержня, EI — изгибная жесткость стержня.

Кинетическая энергия системы, состоящая из кинетической энергии массы m , стержня и источников энергий, записывается в виде

$$T = \frac{1}{2} m q_0'^2 + \frac{\mu}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t} + q_0 \frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} I_1 \varphi'^2 + \frac{1}{2} I_2 \theta'^2 \quad (1.4)$$

Здесь I_1 и I_2 — моменты инерций вращающихся масс амплитудного и частотного источников энергий соответственно, μ — масса единицы длины стержня.

Форма уравнений движения системы имеет [2] вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial (\dots)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial (\dots)'} - \frac{\partial L}{\partial (\dots)} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial L}{\partial (\dots)''} &= R_{(\dots)} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi'} &= \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Theta}{\partial q_0} \alpha(\theta) + \frac{\partial L}{\partial q_0} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \theta' + R_\varphi + R_{q_0} \alpha(\theta) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta'} &= \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + R_\theta \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $(\dots)'$, $(\dots)''$ — производные по времени (с точкой) и по координате x (штрихи), $R_{(\dots)}$, R_φ , R_{q_0} , R_θ — обобщенные силы, соответствующие координатам (\dots) , φ , q_0 и θ . Выражение кинетического потенциала L с исключенной из него зависимой скоростью q_0' обозначается как Θ и записывается в виде

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2} [I_1 \varphi'^2 + I_2 \theta'^2 + m \varphi'^2 \alpha^2(\theta)] + \frac{1}{2} \mu \int_0^l \left\{ \left[\frac{\partial y}{\partial t} + \varphi' \alpha(\theta) \frac{x}{l} \right]^2 + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ EF \left[\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{q_0}{l} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx \end{aligned} \quad (1.6)$$

При учете формулы (1.6), а также с использованием гипотезы Кирхгофа, уравнения движения системы в форме (1.5) могут быть представлены как

$$\mu w'' + EI w^{IV} - \frac{EF}{l} \left[q_0 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi} &= L_1^*(\varphi) - H_1^*(\varphi, \theta) - \frac{EF}{l} \alpha(\theta) \left[q_0 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] - \\ &\quad - m \alpha(\theta) \left[\varphi'' \alpha(\theta) + \varphi' \theta' \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$I_2 \ddot{\theta} = L_2^*(\theta) - H_2^*(\varphi, \theta) + m \varphi'^2 \alpha(\theta) \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}$$

Здесь введены обозначения: $L_1^*(\varphi)$ и $L_2^*(\theta)$ — движущие моменты источников энергий, $H_1^*(\varphi, \theta)$ и $H_2^*(\varphi, \theta)$ — силы сопротивления вращательным движениям.

Для получения конкретных результатов предположим, что функция управления $\alpha(\theta) = k \cos \theta$, где k — коэффициент пропорциональности. Далее, учитывая сопротивление как $\beta \dot{q}$, введем малый параметр ε , пренебрегая членами второго порядка малости относительно ε , представляя решение $w(x, t)$ в виде $w(x, t) = q(t) \sin(\pi/l)x$, удовлетворяющем граничным условиям задачи, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} q'' + \omega^2 q &= -\varepsilon (\lambda \Phi \dot{\theta}^{-1} q \sin \theta + h \dot{q} + \gamma q^3) \\ \Phi'' &= \varepsilon [L_1(\Phi) - H_1(\Phi, \theta) - \vartheta_1 q^2 \cos \theta - \\ &\quad - \vartheta_2 \Phi \dot{\theta}^{-1} \sin 2\theta + \vartheta_3 \Phi \dot{\theta} \sin 2\theta] \\ \theta'' &= \varepsilon [L_2(\theta) - H_2(\Phi, \theta) - \vartheta_4 \Phi^2 \sin 2\theta] \\ \omega^2 &= \pi^4 EI / \mu l^4, \quad \lambda = \pi^2 EFk / \mu l^3, \quad h = \beta / \mu, \quad \gamma = \pi^4 EF / 4 \mu l^4 \\ \vartheta_1 &= \pi^2 EFk / 4 I_1 l^2, \quad \vartheta_2 = EFk^2 / 2 I_1 l, \quad \vartheta_3 = mk^2 / 2 I_1, \quad \vartheta_4 = mk^2 / 2 I_2 \\ L_1 &= L_1^* / I_1, \quad L_2 = L_2^* / I_2, \quad H_1 = H_1^* / I_1, \quad H_2 = H_2^* / I_2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Рассмотрим движения исследуемой системы в области основного параметрического резонанса $\omega^{-1/2} \theta' = \varepsilon \Delta$. Следуя асимптотическому методу [5], при помощи переменных

$$q = A \cos \psi, \quad \dot{q} = -A \omega \sin \psi, \quad \psi = 1/2 \theta + \Xi, \quad \theta' = \Omega_1, \quad \Phi' = \Phi_1 \quad (1.9)$$

приводим уравнения (1.8) к стандартной форме и усредняем. В результате получаем дифференциальные уравнения для амплитуды и фазы колебаний и частот

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2\omega} \left(\frac{\lambda \Phi}{2\Omega} \cos 2\xi - h\omega \right) a \\ \frac{d\xi}{dt} &= \omega - \frac{\Omega}{2} + \frac{\varepsilon}{4\omega a} \left(\frac{3}{2} \gamma a^3 - \frac{\lambda \Phi a}{\Omega} \sin 2\xi \right) \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \varepsilon [L_1(\Phi) - H_1(\Phi, \Omega) - 1/4 \vartheta_1 a^2 \cos 2\xi] \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \varepsilon [L_2(\Omega) - H_2(\Phi, \Omega)] \end{aligned} \quad (1.10)$$

Уравнения (1.10) позволяют исследовать как нестационарные процессы, протекающие в системе, так и установившиеся движения с постоянной амплитудой и частотами.

Исследуем установившиеся режимы движения системы. Из (1.10) при $a' = \xi' = \Phi' = \Omega' = 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} \lambda \Phi (2\Omega)^{-1} \cos 2\xi - h\omega &= 0 \\ \omega^{-1/2} \Omega + 1/4 \omega^{-1} (3/2 \gamma a^2 - \lambda \Phi \Omega^{-1} \sin 2\xi) &= 0 \\ L_1(\Phi) - H_1(\Phi, \Omega) - 1/4 \vartheta_1 a^2 \cos 2\xi &= 0 \\ L_2(\Omega) - H_2(\Phi, \Omega) &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Преобразование уравнений (1.11) приводит к следующим выражениям для определения значений амплитуды и фазы колебания:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{2\lambda \Phi}{\vartheta_1 h \omega \Omega} (L_1 - H_1) = \frac{4}{3\gamma} \left[2\omega \left(\frac{\Omega}{2} - \omega \right) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{1}{2} \left(\lambda^2 \frac{\Phi^2}{\Omega^2} - 4h^2 \omega^2 \right)^{1/2} \right] \\ \operatorname{tg} 2\xi &= \frac{1}{2h\omega} \left[\frac{3\gamma}{2} a^2 - 4\omega \left(\frac{\Omega}{2} - \omega \right) \right] = \pm \frac{1}{2h\omega} \left(\lambda^2 \frac{\Phi^2}{\Omega^2} - 4h^2 \omega^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Из (1.11) следует, что в первом приближении второй источник энергии не оказывает непосредственного влияния на колебательную систему. Од-

нако это влияние проявляется через функцию $f_1(\Omega, \Phi)=0$, которая получается из четвертого уравнения (1.11). С другой стороны, из первого выражения (1.12) можно найти вторую зависимость $f_2(\Omega, \Phi)=0$. Таким образом, частоты Ω и Φ , найденные из уравнения $f_2(\Omega, \Phi)=0$, должны удовлетворять и уравнению $f_1(\Omega, \Phi)=0$. Отсюда следует, что колебательная система оказывает влияние на второй источник энергии через функцию $f_1(\Omega, \Phi)=0$. Из этих двух уравнений, исключая либо Ω , либо Φ , получим

$$F_1(\Phi)=0, \quad F_2(\Omega)=0 \quad (1.13)$$

Уравнения (1.13) определяют искомые частоты Ω и Φ , удовлетворяющие системе уравнений (1.11), и показывают, что при перемещении характеристики одного из источников (оставив при этом неизменной характеристику другого источника) можно добиться различных значений стационарных частот Ω и Φ . Таким образом можно управлять стационарными частотами двух источников энергии. Это имеет важное практическое значение, так как источник энергии, например электродвигатель, кроме основной характеристики имеет семейство регулировочных характеристик.

Аналитическое нахождение частот Ω и Φ из уравнений (1.13) является трудоемкой операцией (заметим, что в силу нелинейности $F_1(\Phi)=0, F_2(\Omega)=0$ может получиться несколько пар частот). Для получения качественной картины проведем геометрическую иллюстрацию решения системы уравнений (1.11). Такой подход также удобен при анализе устойчивости стационарных решений системы (1.11).

Из (1.12) следует, что для вещественных значений амплитуды должны выполняться условия

$$h < \lambda \Phi (2\omega \Omega)^{-1}, \quad 2\omega (\frac{1}{2}\Omega - \omega) \pm \frac{1}{2}(\lambda^2 \Phi^2 \Omega^2 - 4h^2 \omega^2)^{1/2} > 0$$

Границы области параметрического резонанса определяем из первого выражения (1.12)

$$\Phi = \pm 4\omega \lambda^{-1} \nu [h^2 + 4(\nu - \omega)^2]^{1/2}, \quad 2\nu = \Omega \quad (1.14)$$

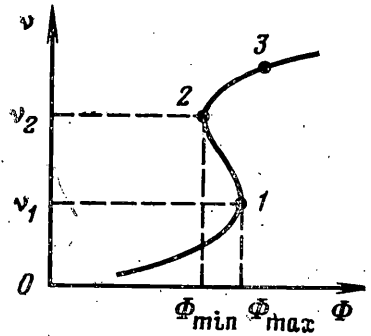
График функции $\Phi = f(\nu)$ показан на фиг. 2. Точке 1 соответствует Φ_{\max} , а точке 2 — Φ_{\min} . При этом значения ν_1 и ν_2 определяются так:

$$\nu_{1,2} = \frac{1}{4} [3\omega \mp (\omega^2 - h^2)^{1/2}] \quad (1.15)$$

При $\nu_* = \omega$ имеем $\Phi_* = 4h\omega^2\lambda^{-1}$. Зона резонанса ($\nu \approx \omega$) определяется неравенством

$$\omega^2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{4}\lambda^2 \Phi^2 \omega^{-2} - 4h^2 \omega^2)^{1/2} < \nu^2 < \omega^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{4}\lambda^2 \Phi^2 \omega^{-2} - 4h^2 \omega^2)^{1/2} \quad (1.16)$$

Выражения (1.12) геометрически определяют поверхности. Для определенности назовем их амплитудно-частотными и фазочастотными полями. Амплитудно-частотное поле системы показано на фиг. 3. Пересечение этого поля с плоскостью (Φ, ν) дает кривую $\Phi = f(\nu)$, определяемую уравнением (1.14). Там же показаны сечения (фиг. 3, б, в) амплитудно-частотного поля. Точка B_Φ имеет координаты $\frac{8}{3}\omega\gamma^{-1}(\nu - \omega)$ и $4\omega h\nu\lambda^{-1}$, а точка B_ν — координаты $\frac{8}{3}\omega\gamma^{-1}(\nu - \omega)$ и $\lambda\Phi(4\omega h)^{-1}$. Прямая, проходящая че-

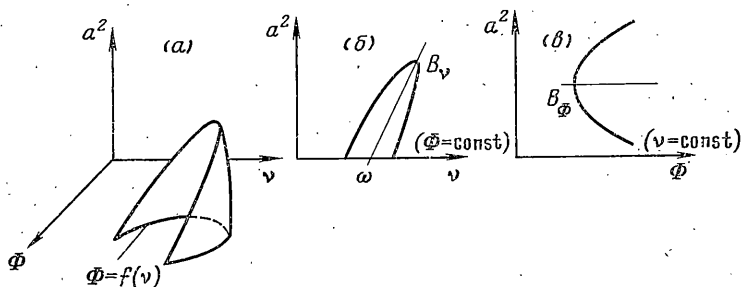


Фиг. 2

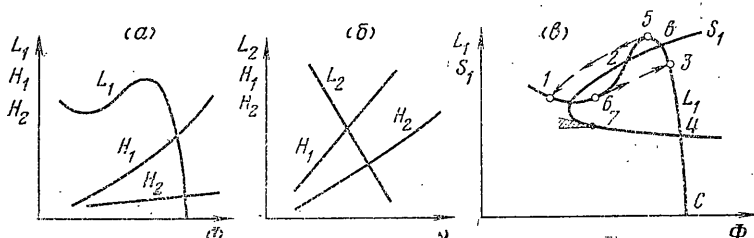
рез точки B_ν и $\nu = \omega$, является скелетной линией. Заметим, что левой ветви на фиг. 3, б соответствует (в смысле направленности от скелетной линии) верхняя ветвь фиг. 3, в, а правой ветви — нижняя ветвь. Эквивалентная частота собственных колебаний системы определяется из выражения

$$\omega_e = \omega + \sqrt[3]{\frac{3}{8}\gamma\omega^{-1}a^2} \quad (1.17)$$

В силу (1.17) графики функций $\omega_e = f(\nu)$ и $\omega_e = f(\Phi)$ подобны резонансным кривым.



Фиг. 3



Фиг. 4

Стационарные решения (1.11) необходимо исследовать на устойчивость. Анализ уравнений в вариациях приводит к следующим условиям устойчивости стационарных решений уравнений (1.10):

$$h - N > 0, \quad \omega\vartheta_1 h^3 a^2 \nu \lambda^{-1} \Phi^{-2} - \frac{3}{2} \gamma a^2 \omega^{-1} (\omega_e - \nu) N + 4\nu\omega\vartheta_1 h a^2 \lambda^{-1} \Phi^{-2} (\omega_e - \nu)^2 - \frac{3}{2} \gamma \vartheta_1 h \nu a^4 \lambda^{-1} \Phi^{-2} (\omega_e - \nu) > 0 \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} [L_2(2\nu) - H_2(\Phi, 2\nu)] < 0, \quad hN^2 - c_1 N + c_2 (\omega_e - \nu) > 0$$

$$c_1 = h^2 + \omega\vartheta_1 \nu a^2 \lambda^{-1} \Phi^{-2} [h^2 + 4(\omega_e - \nu)^2]$$

$$c_2 = \frac{3}{2} h \gamma a^2 \omega^{-1} (1 + 2\omega\vartheta_1 \nu a^2 \lambda^{-1} \Phi^{-2}), \quad N = \frac{\partial}{\partial \Phi} [L_1(\Phi) - H_1(\Phi, 2\nu)]$$

Отметим, что при выводе критериев устойчивости для простоты принята слабая зависимость $H_2(\Phi, 2\nu)$ от частоты Φ , т. е. соответствующая производная в уравнениях в вариациях полагалась равной нулю.

Перейдем к анализу критериев устойчивости (1.18). С этой целью преобразуем второе неравенство (1.18), которое, согласно [6], можно записать так:

$$(\omega_e - \nu) \frac{d}{d\Phi} [L_1(\Phi) - S_1(\Phi, 2\nu)] < 0 \quad (1.19)$$

$$S_1(\Phi, 2\nu) = H_1(\Phi, 2\nu) + \vartheta_1 \omega h \nu \Phi^{-1} \lambda^{-1} a^2$$

Как было отмечено выше, удобной является геометрическая иллюстрация решения системы (1.11), на основании которой последние два уравнения представим в виде

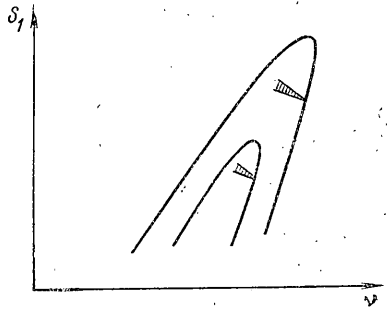
$$L_1(\Phi) - S_1(\Phi, 2\nu) = 0, \quad L_2(2\nu) - S_2(\Phi, 2\nu) = 0, \quad S_2(\Phi, 2\nu) = H_2(\Phi, 2\nu) \quad (1.20)$$

Уравнения (1.20) являются уравнениями динамического равновесия сил (моментов), действующих в системе, а функции $L_1(\Phi)$, $L_2(2\nu)$, $H_1(\Phi, 2\nu)$ и $H_2(\Phi, 2\nu)$ пусть имеют вид, показанный на фиг. 4. График функции $S_1(\Phi, 2\nu)$ при этом будет представлять поверхность, которая качественно аналогична графику амплитудно-частотного поля. В силу принятого предположения о слабой зависимости $H_2(\Phi, 2\nu)$ от частоты Φ второе уравнение (1.20) даст одно значение частоты ν , которому будет соответствовать несколько значений частоты Φ , определяемые из первого уравнения (1.20). На фиг. 4, б представлено сечение поверхности $S_1(\Phi, 2\nu)$. Как следует из фигуры, в зависимости от взаимного расположения $L_1(\Phi)$ и $S_1(\Phi, 2\nu)$ получается либо одна, либо две или три точки пересечения, т. е. несколько значений стационарной частоты Φ . Точки 5 и 6 являются бифуркационными точками, в которых имеют место срывы (показаны стрелками) колебаний. Геометрический анализ (1.19) показывает, что точкам 1 и 3 соответствуют устойчивые движения, а точкам 2, 4 — неустойчивые. Однако следует отметить, что при достаточно пологих участках bc характеристики $L_1(\Phi)$ точка 7 (которая получается перемещением характеристики) может соответствовать устойчивым движениям системы, когда касательная к графику $S_1(\Phi, 2\nu)$ находится в пределах заштрихованного сектора. Этой точке соответствует правая ветвь фиг. 3, б. Следовательно, возможна реализация участков правых ветвей (по сечениям) амплитудно-частотного поля путем управления амплитудным источником энергии.

Для проверки полученных качественных результатов проводились расчеты на ЦВМ. Для расчетов были выбраны следующие параметры системы: $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$, $\gamma = 0,2 \text{ см}^{-2}\text{с}^{-2}$, $\lambda = 0,2 \text{ с}^{-2}$, $h = 0,05 \text{ с}^{-1}$, $\theta_1 = 0,2 \text{ см}^{-2}\text{с}^{-2}$. Характеристика источника энергии выбиралась в виде прямолинейного участка bc (фиг. 4) с наклонами $-\infty < N < 0$. Результаты расчетов приведены на фиг. 5 (для наглядности график упрощен, поэтому не указаны количественные данные). Заштрихованные секторы на фигуре представляют области характеристик, при которых движения системы устойчивы. Как видно, существуют секторы (однако довольно узкие), в пределах которых выполняются критерии (1.18), следовательно, возможна реализация правых ветвей (фиг. 3, б) амплитудно-частотного поля по сечениям.

2. Исследуем нелинейную колебательную систему, описываемую уравнениями [3]

$$m_1 \ddot{q}_1 + n_1 \dot{q}_1 + c q_1 = -f(q_1) + f_0^{-1} c_1 k \int_0^t \Phi \cos \theta dt$$



Фиг. 5

$$\begin{aligned}
 I_1 \ddot{\varphi} + m_0 k^2 f_0^{-2} [\dot{\varphi} \cos \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta] \cos \theta + \\
 + c_1 k f_0^{-1} \left(k f_0^{-1} \int_0^t \dot{\varphi} \cos \theta dt - q_1 \right) \cos \theta - \\
 - k^2 f_0^{-2} m_0 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + H_1(\dot{\varphi}, \dot{\theta}) = L_1(\dot{\varphi}) \\
 I_2 \ddot{\theta} + H_2(\dot{\varphi}, \dot{\theta}) + k^2 f_0^{-2} m_0 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = L_2(\dot{\theta})
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

в предположении, что функция $f(q_1)$ отражает нелинейность характеристики упругой связи. Интегрируя

$$q_0 = \int_0^t \dot{\varphi} \cos \theta dt$$

по частям, введя малый параметр ε и отбрасывая величины второго порядка малости, приведем уравнения (2.1) к виду

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_1 + \omega^2 q_1 = \varepsilon m_1^{-1} [\lambda \dot{\varphi} \dot{\theta}^{-1} \sin \theta - n_1 q_1 - f(q_1)] \\
 \ddot{\varphi} = \varepsilon I_1^{-1} [L_1(\dot{\varphi}) - H_1(\dot{\varphi}, \dot{\theta}) - \vartheta_1 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + \\
 + \vartheta_2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin 2\theta - \vartheta_3 \dot{\varphi} \dot{\theta}^{-1} \sin 2\theta + \lambda q_1 \cos \theta + \vartheta_2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\theta] \\
 \ddot{\theta} = \varepsilon I_2^{-1} [L_2(\dot{\theta}) - H_2(\dot{\varphi}, \dot{\theta}) - \vartheta_3 \dot{\varphi}^2 \sin 2\theta]
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\omega^2 = c_1 m_1^{-1}, \quad \lambda = c_1 k f_0^{-1}, \quad \vartheta_1 = m_0 k^2 f_0^{-2}, \quad \vartheta_2 = 1/2 m_0 k^2 f_0^{-2}, \quad \vartheta_3 = 1/2 c_1 k^2 f_0^{-2}$$

Наиболее активное взаимодействие колебательной системы с источником энергии проявляется в области главного резонанса $\omega - \dot{\theta} = \varepsilon \Delta$. Рассмотрим движение системы в этой области. Замена переменных вида

$$q_1 = A \cos \psi, \quad \dot{q}_1 = -A \omega \sin \psi, \quad \psi = \theta + \Xi, \quad \dot{\varphi} = \Phi_1, \quad \dot{\theta} = \Omega_1 \tag{2.3}$$

и выполнение операции усреднения приводит уравнения (2.2) к стандартной форме:

$$\begin{aligned}
 da/dt = -\frac{\varepsilon}{\omega m_1} \left(\frac{\lambda \Phi}{2\Omega} \cos \xi + \frac{n_1 a \omega}{2} \right) \\
 d\xi/dt = \omega - \Omega + \frac{\varepsilon}{\omega m_1 a} \left(\frac{\lambda \Phi}{2\Omega} \sin \xi + G \right) \\
 d\Phi/dt = \varepsilon [L_1(\Phi) - H_1(\Phi, \Omega) + 1/2 \lambda a \cos \xi] \\
 d\Omega/dt = \varepsilon [L_2(\Omega) - H_2(\Phi, \Omega)] \\
 G(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для стационарных режимов движения находим

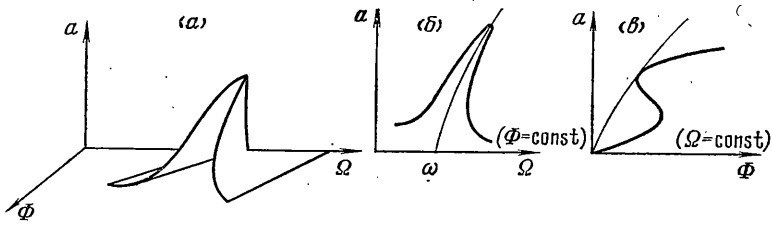
$$\begin{aligned}
 a = \lambda \Phi / \{ \omega \Omega [4m_1^2 (\omega_e - \Omega)^2 + n_1^2]^{1/2} \} \\
 \operatorname{tg} \xi = 2m_1 (\omega_e - \Omega) / n_1, \quad \omega_e = \omega + G(m_1 \omega a)^{-1}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Полагая далее $f(q_1) = \gamma q_1^3$ получаем

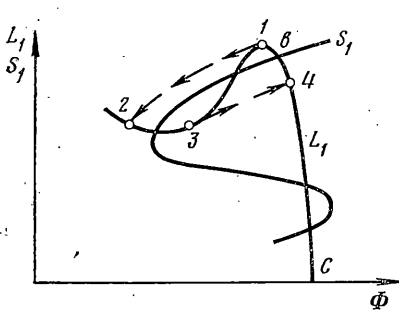
$$G = 3/8 \gamma a^3 \tag{2.6}$$

Амплитудно-частотное поле системы, построенное на основании (2.5) с учетом (2.6), представлено на фиг. 6, а; на фиг. 6, б, в показаны сечения поля в зависимости от частот Φ и Ω .

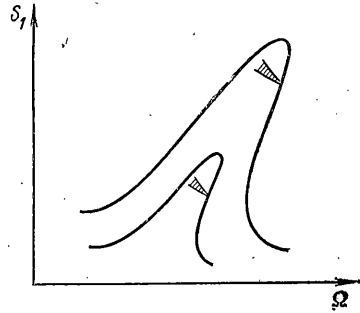
Стационарные решения (2.4) необходимо исследовать на устойчивость. Пользуясь критериями Рауса — Гурвица и предполагая, что функция $H_2(\Phi, \Omega)$ слабо зависит от частоты Φ , получаем следующие критерии ус-



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

тойчивости движения системы:

$$n_1 - m_1 I_1^{-1} N > 0, \quad \frac{1}{4} n_1^2 m_1^{-2} + (\omega_e - \Omega)^2 - \frac{3}{4} \gamma a^2 m_1^{-1} \omega^{-1} (\omega_e - \Omega) - N \left[\frac{1}{4} n_1^2 m_1^{-2} + (\omega_e - \Omega)^2 + \frac{3}{4} \gamma a^2 m_1^{-1} \omega^{-1} (\omega_e - \Omega) \right] > 0 \quad (2.7)$$

$$N^2 - b_1 N + b_2 > 0, \quad \frac{\partial}{\partial \Omega} [L_2(\Omega) - H_2(\Phi, \Omega)] < 0$$

$$b_1 = n_1 m_1^{-1} + m_1^2 \omega \Omega I_1^{-1} n_1^{-1} \Phi^{-2} a^2 \left[\frac{1}{4} n_1^2 m_1^{-2} + (\omega_e - \Omega)^2 \right]$$

$$b_2 = m_1 n_1^{-1} (n_1 m_1^{-1} + \frac{1}{2} n_1 \omega \Omega a^2 I_1^{-1} \Phi^{-2}) \left[\frac{1}{4} n_1^2 m_1^{-2} + \right.$$

$$\left. + (\omega_e - \Omega)^2 + \frac{3}{4} \gamma a^2 \omega^{-1} m_1^{-1} (\omega_e - \Omega) \right], \quad N = \frac{\partial}{\partial \Phi} [L_1(\Phi) - H_1(\Phi, \Omega)]$$

Для получения качественных представлений выполнения критериев устойчивости преобразуем второе неравенство (2.7), согласно [6], к эквивалентной форме

$$\left[\frac{n_1^2}{4m_1^2} + (\omega_e - \Omega)^2 + a \omega_e' (\omega_e - \Omega) \right] \frac{d}{d\Phi} [L_1(\Phi) - S_1(\Phi, \Omega)] < 0 \quad (2.8)$$

$$S_1(\Phi, \Omega) = H_1(\Phi, \Omega) + \frac{1}{2} n_1 \omega \Omega \Phi^{-1} I_1^{-1} a^2$$

В силу зависимости от амплитуды $S_1(\Phi, \Omega)$ представляет собой поле, подобное амплитудно-частотному полю. Для восходящей ветви резонансной кривой (фиг. 6, б) $\omega_e - \Omega > 0$, а для нисходящей ветви $\omega_e - \Omega < 0$. Геометрический анализ показывает, что условие (2.8) может выполняться как для восходящей ветви, так и для нисходящей ветви. Остальные три

критерия (2.7) при достаточно крутых характеристиках источников энергии выполняются легко. Таким образом, определяющим является критерий (2.8). При выполнении его восходящие и нисходящие области амплитудно-частотного поля могут быть реализованы (эти области могут содержать внутри себя точки, соответствующие устойчивым и неустойчивым стационарным режимам движения).

В системе могут наблюдаться срывы колебаний. Стрелки на фиг. 7 показывают нестационарные переходы (срывы) при квазистационарном управлении движениями источника энергии. Бифуркационными точками являются точки 1 и 3.

Для получения информации о выполнимости критериев устойчивости движения, были проведены вычисления на ЦВМ при следующих выбранных параметрах системы: $\omega=1 \text{ с}^{-1}$, $\lambda \approx 2 \text{ Н}$, $\gamma \approx 2 \text{ Н} \cdot \text{см}^{-3}$, $n_1 \approx 0,5 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^{-1}$. Характеристика источника энергии выбиралась в виде прямолинейного участка (фиг. 7) с наклонами $-\infty < N < 0$. На фиг. 8 показаны результаты расчетов (как и в п. 1, график упрощен). Заштрихованные секторы определяют области наклонов характеристики источника энергии, соответствующие устойчивым режимам движения системы. Как видно, нисходящую область амплитудно-частотного поля можно реализовать по сечениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глухарев К. К., Фролов К. В. К теории колебаний механических систем ограниченного возбуждения.— Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 2, с. 285–288.
2. Глухарев К. К., Фролов К. В. Взаимодействие колебательной системы с двумя источниками энергии.— Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 4, с. 65–73.
3. Глухарев К. К., Фролов К. В. Классификация и некоторые особенности колебательных систем с ограниченным возбуждением. STROJNÍCKY ČASOPIS, 1971, v. 22, No. 1, p. 25–38.
4. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
6. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 254 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.II.1980