

УДК 531.8

ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОДНИМ ДВИЖЕНИЕМ

КЛЮЙКО Э. В.

Известно, что при проектировании автооператоров и автоматических манипуляторов [1] решается задача позиционирования, т. е. пространственного переноса твердого тела из одной позиции (транспортной) в другую (рабочую). При этом различают перенос плоским движением (когда траектории всех точек перемещаемого твердого тела лежат в параллельных плоскостях), сферическим движением (пространственным вращением вокруг неподвижной точки) и в общем случае пространственным вращательно-поступательным движением. Плоский и пространственный перенос выполняют одним или несколькими простыми (вращательными и поступательными) движениями. Под простым понимают движение, которое можно совершить при помощи одноподвижной низшей кинематической пары (вращательной, поступательной, винтовой).

В общем случае плоский перенос является трехмерным (т. е. состоящим из трех простых движений: двух прямолинейно-поступательных и одного вращательного вокруг оси, перпендикулярной плоскости переноса), сферический — также трехмерным (т. е. состоящим из трех вращений), а пространственный вращательно-поступательный перенос — шестимерным (т. е. состоящим из трех вращений и трех прямолинейно-поступательных простых движений).

Из кинематики твердого тела [2] известно, что любое сложное (многомерное) плоское, сферическое или пространственное вращательно-поступательное перемещение тела из одного положения в другое можно выполнить используя бесчисленное число вариантов. Однако это же перемещение можно выполнить одним простым движением вокруг оси, положение которой в пространстве определяется однозначно. При этом плоский или сферический перенос сводится к одному вращению вокруг оси, соответственно перпендикулярной плоскости переноса или проходящей через неподвижную точку (центр сферы), а произвольный пространственный перенос сводится к винтовому движению. Сведение переноса к одномерному варианту позволяет повысить скорость и точность перемещения, упростить конструкцию привода и в ряде случаев снизить требования к размещению устройства переноса относительно рабочей зоны технологической или транспортной машины.

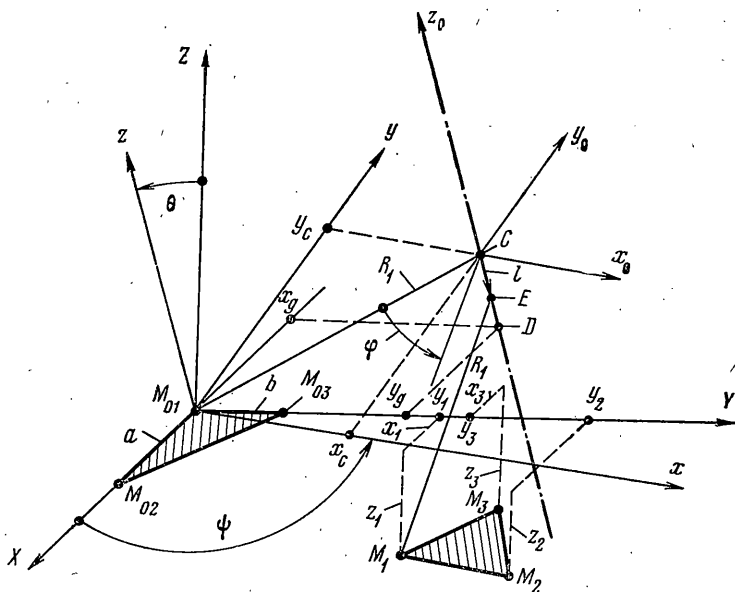
Задаче переноса твердого тела в пространстве посвящено большое число работ, в которых даются графические [3, 4] и аналитические [5, 6] решения для частных случаев. Известны попытки аналитических решений для общего случая пространственного переноса, например [7, 8]. Общим для известных методов является их сложность и отсутствие доведенных до практического использования результатов решения. Кроме того, в указанных работах не ставится вопрос об определении наилучшего варианта исполнения переноса. Далее приведено аналитическое решение для общего случая пространственного переноса, полученное матричным способом преобразования координат с использованием матриц четвертого порядка [9], позволившим найти зависимости, более удобные для практических расчетов.

Пространственное положение твердого тела полностью определяется координатами трех его произвольно выбранных точек, не лежащих на одной прямой [2]. Свяжем эти точки с подвижной системой координат x_{yz} (в исходном положении совмещенной с неподвижной системой XYZ), так, чтобы (см. фигуру) одна из них была началом координат, а две другие лежали на осях x и y . Тогда координаты этих точек в неподвижной системе XYZ в исходном положении будут $M_{01}\{0, 0, 0\}$, $M_{02}\{a, 0, 0\}$, $M_{03}\{0, b, 0\}$, где a , b — исходные координаты точки M_{02} на оси x и точки M_{03} на оси y (ими, например, могут быть выбранные взаимно перпендикулярные друг другу размеры изделия, переносимого автооператором или режущего инструмента, переносимого промышленным роботом).

Координаты точек $M_1\{x_1, y_1, z_1\}$, $M_2\{x_2, y_2, z_2\}$, $M_3\{x_3, y_3, z_3\}$ после шестимерного пространственного переноса, характеризуемого тремя эйлеровыми поворотами на углы ψ_e , θ_e , φ_e и перемещениями x_e , y_e , z_e в направлении неподвижных координатных осей, будут равны [2]:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_e, & y_1 &= y_e, & z_1 &= z_e \\x_2 &= a(\cos \psi_e \cos \varphi_e - \sin \psi_e \cos \theta_e \sin \varphi_e) + x_e \\y_2 &= a(\sin \psi_e \cos \varphi_e + \cos \psi_e \cos \theta_e \sin \varphi_e) + y_e \\z_2 &= a \sin \theta_e \sin \varphi_e + z_e \\x_3 &= -b(\cos \psi_e \sin \varphi_e + \sin \psi_e \cos \theta_e \cos \varphi_e) + x_e \\y_3 &= -b(\sin \psi_e \sin \varphi_e - \cos \psi_e \cos \theta_e \cos \varphi_e) + y_e \\x_3 &= b \sin \theta_e \cos \varphi_e + z_e\end{aligned} \quad (1)$$

Перенос в ту же пространственную позицию совершим одним винтовым движением с параметрами поворота φ (град) и перемещения вдоль винтовой оси $l = CE = \frac{1}{360} t \varphi$ (t — шаг винтового движения). Положение винтовой



оси относительно неподвижной системы координат XYZ определяется установочными углами ψ (поворот вокруг оси Z) и θ (поворот вокруг оси x) и установочными координатами x_e , y_e в плоскости, перпендикулярной винтовой оси z_0 . Координаты указанных точек после переноса получим на основе преобразования координат из следующего матричного равенства:

$$r_i = T_5 T_4 T_3 T_2 T_1 r_{0i} = T_{12}^{-1} T_3 T_{21} r_{0i} \quad (2)$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_e \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & -y_e \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4 = T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_c \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & y_c \cos \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & y_c \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_5 = T_1^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Здесь $r_{0i}\{x_{0i}, y_{0i}, z_{0i}\}$ и $r_i\{x_i, y_i, z_i\}$ — матрицы-столбцы координат точек M_i , $i = \{1, 2, 3\}$ твердого тела, записанные в неподвижной системе соответственно до и после переноса, T_1 — матрица установочного поворота на угол ψ , T_2 — матрица установочного поворота на угол θ и сдвига на x_c, y_c , T_3 — матрица винтового движения, T_4, T_5 — матрицы обратного перехода от винтовой оси к неподвижной системе XYZ , T_1^{-1}, T_2^{-1} — матрицы, соответственно обратные T_1, T_2 .

В матричном уравнении (2) произведение $T_{21} = T_2 T_1$ определяет переход от неподвижной системы XYZ к координатам $x_0 y_0 z_0$ винтовой оси, произведение $T_3 T_{21}$ характеризует координаты точек твердого тела после винтового переноса, произведение $T_{12}^{-1} = T_{54} = T_1^{-1} T_2^{-1}$ представляет обратное преобразование координат для того, чтобы записать координаты повернутого тела в неподвижной системе XYZ .

Умножая матрицы согласно уравнению (2), после упрощений получим систему девяти уравнений преобразования координат

$$\begin{aligned} x_1 &= x_c [\cos \psi (1 - \cos \varphi) + \sin \psi \sin \varphi \cos \theta] + \\ &+ y_c [\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta (1 - \cos \varphi)] + l \sin \theta \sin \psi \\ y_1 &= x_c [\sin \psi (1 - \cos \varphi) - \cos \psi \cos \theta \sin \varphi] + \\ &+ y_c [\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta (1 - \cos \varphi)] - l \sin \theta \cos \psi \\ z_1 &= -x_c \sin \theta \sin \varphi + y_c \sin \theta (1 - \cos \varphi) + l \cos \theta \\ x_2 &= x_1 + a [\cos \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \psi (1 - \cos \varphi)] \\ y_2 &= y_1 + a [\cos \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \psi \sin^2 \theta (1 - \cos \varphi)] \\ z_2 &= z_1 + a \sin \theta [\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \theta (1 - \cos \varphi)] \\ x_3 &= x_1 - b [\sin \varphi \cos \theta + \sin \psi \cos \psi \sin^2 \theta (1 - \cos \varphi)] \\ y_3 &= y_1 + b [\cos \varphi + \cos^2 \psi \sin^2 \theta (1 - \cos \varphi)] \\ z_3 &= z_1 + b \sin \theta [\sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \cos \theta (1 - \cos \varphi)] \end{aligned} \quad (3)$$

Предварительно обозначим

$$\begin{aligned} c_1 &= (x_2 - x_1)/a, \quad c_2 = (y_2 - y_1)/a, \quad c_3 = (z_2 - z_1)/a \\ c_4 &= (x_3 - x_1)/b, \quad c_5 = (y_3 - y_1)/b, \quad c_6 = (z_3 - z_1)/b \end{aligned}$$

Тогда, решая систему (3) относительно неизвестных, получим (за исходную для отсчета положения винтовой оси принимаем ось Z):

первый установочный поворот (вокруг оси Z)

$$\psi = \frac{1}{2} \arctg [(c_2 + c_4)/(c_1 - c_5)] \quad (4)$$

второй установочный поворот (поворот оси Z вокруг повернутой на угол ψ оси X)

$$\theta = \arctg [2(c_3 \cos \psi + c_6 \sin \psi)/(c_2 - c_4)] \quad (5)$$

переносный поворот вокруг винтовой оси на угол φ

$$\varphi = \arctg \left[\frac{(c_2 - c_4)(1 + \cos^2 \theta)}{2 \cos \theta (c_1 + c_5 - \sin^2 \theta)} \right] \quad (6)$$

сдвиг вдоль оси винтового движения

$$l = \frac{1}{360} t \varphi = (x_1 \sin \psi - y_1 \cos \psi) \sin \theta + z_1 \cos \theta \quad (7)$$

установочные перемещения x_c, y_c из исходного начала координат в точку C винтовой оси (выполняются после установочных поворотов на углы ψ, θ и фиксируют окончательное положение винтовой оси)

$$y_c = \frac{1}{2} (k_1 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \varphi - k_2 \sin \varphi), \quad x_c = y_c \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi + k_2 \quad (8)$$

$$k_1 = x_1 \cos \psi + y_1 \sin \psi, \quad k_2 = \frac{l \cos \theta - z_1}{\sin \theta \sin \varphi}$$

Винтовое движение переноса будет правым, если знаки при φ и l одноименные, и левым, если разноименные. За положительные приняты повороты против часовой стрелки.

Формулы (4) и (5) дают по два возможных положительных значения ψ и θ в пределах $0-360^\circ$, откуда следует, что винтовой перенос имеет $2 \times 2 \times 1$ варианта исполнения при положительных значениях ψ, θ, φ . Учитывая отрицательные значения этих углов (отсчет по часовой стрелке), получим $4 \times 4 \times 2$ варианта. Положение винтовой оси в неподвижной системе XYZ для всех вариантов однозначно и определяется уравнением в канонической форме

$$\frac{X - x_g}{p} = \frac{Y - y_g}{m} = \frac{Z}{n} \quad (9)$$

$$p = \sin \psi \sin \theta, \quad m = -\cos \psi \sin \theta, \quad n = \cos \theta$$

$$x_g = x_c \cos \psi - y_c \frac{\sin \psi}{\cos \theta},$$

$$y_g = x_c \sin \psi + y_c \frac{\cos \psi}{\cos \theta} \quad (10)$$

где p, m, n — направляющие косинусы углов между винтовой осью и неподвижными осями соответственно X, Y, Z , x_g, y_g — координаты точки D пересечения (см. фигуру) винтовой оси с неподвижной плоскостью XY .

Радиус поворота точки M_1 твердого тела при винтовом движении будет $R_1 = (x_c^2 + y_c^2)^{1/2}$. Из всех возможных вариантов исполнения винтового движения переноса меньшее перемещение будет у того, для которого абсолютные значения ψ, θ, φ выбраны наименьшими. Анализ показал, что достаточными для практики интервалами поворотов будут: $\psi = \pm 90^\circ, \theta = \pm 90^\circ, \varphi = \pm 180^\circ$.

Определение установочных смещений винтовой оси по формулам (8) целесообразно для манипуляторов и тому подобных устройств с поворотным основанием и крестовыми салазками, устанавливаемыми на нем. При исполнении подвижного основания в виде крестового стола, несущего на себе механизмы поворота руки, установочные смещения винтовой оси необходимо определять по формулам (10).

Приводим расчетные формулы параметров установки и перемещения для применяемых на практике частных случаев переноса.

При плоском переносе координаты точек $M_1\{x_1, y_1\}$ и $M_2\{x_2, y_2\}$ до и после переноса лежат в одной плоскости, поэтому отпадает необходимость в установочном повороте на угол θ . Ось установочного поворота на угол $\psi = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi + \operatorname{arctg}(y_1/x_1)$ параллельна оси переносного поворота на угол $\varphi = \operatorname{arctg}[(x_2 - x_1)/(y_2 - y_1)]$ и смещена относительно последней на величину $x_c = (x_1 \sin \psi - y_1 \cos \psi) / \sin \varphi, y_c = 0$. Радиус поворота (для точ-

ки M_1) $R_1 = (x_1^2 + y_1^2)^{1/2} / 2 \sin^{1/2} \varphi$, а каноническое уравнение оси поворота

$$\frac{X - x_g}{0} = \frac{Y - y_g}{0} = \frac{Z}{1}, \quad x_g = x_c \cos \psi, \quad y_g = x_c \sin \psi$$

При сферическом переносе положение точки M_1 неизменно, а координаты точек $M_2\{x_2, y_2, z_2\}$ и $M_3\{x_3, y_3, z_3\}$ до и после переноса лежат на концентрических сферах радиусов соответственно $r_2 = a$, $r_3 = b$. Поэтому параметры ψ , θ , φ определяют по формулам (4), (5), (6) при $x_1 = y_1 = z_1 = 0$; параметры $x_c = y_c = 0$, радиус поворота (для точки M_2) — $R_2 = a(1 - \sin^2 \psi \sin^2 \theta)^{1/2}$, положение оси сферического переноса

$$X / \sin \psi \sin \theta = Y / -\cos \psi \sin \theta = Z / \cos \theta$$

Пространственный перенос при задании двух точек $M_1\{x_1, y_1, z_1\}$, $M_2\{x_2, y_2, z_2\}$ применяют при перемещении металлорежущих инструментов и деталей, имеющих осесимметричную форму (тела вращения). Перенос в этом случае реализуется одним вращательным, а не винтовым движением. В качестве расчетных точек M_1 , M_2 принимают любые две точки, лежащие на оси симметрии детали. Параметры установочки оси поворота и параметры переноса получим, решая первые шесть уравнений системы (3) при условии, что $l = 0$. При этом установочные углы $\psi = \arctg \{(z_1 y_2 - z_2 y_1) / [z_1(x_2 - a) - z_2 x_1]\}$, $\theta = \arctg [z_1 / (y_1 \cos \psi - x_1 \sin \psi)]$, угол поворота $\varphi = \arctg [(1 - k_3)(c_1 + c_2 \tg \psi - \cos \varphi) / \cos \theta \tg \psi (c_1 - k_3)]$, где $k_3 = \sin^2 \psi \sin^2 \theta$. Остальные параметры определяют по формулам (8)–(10).

На практике число простых вращательных и поступательных движений при переносе изделий достигает шести и более (промышленные роботы [1]), а при переносе металлорежущего инструмента — трех. Основанный на аналитическом расчете выбор простых движений переноса позволит улучшить конструкцию механизмов. Так, требование — возможность выполнять промышленным роботом винтовое движение вокруг любой оси, расположенной в определенной рабочей зоне, — позволит осуществить наиболее быстрый и точный пространственный перенос. При этом, как следует из приведенных зависимостей, наиболее простым по структуре движений и в то же время универсальным по их исполнению будет двухподвижный робот, имеющий, кроме того, четыре конструктивно более простые установочные подвижности (две угловые и две прямолинейные).

Рассмотрим пример. Пусть изделие в исходном положении имеет координаты трех точек: $M_1\{0, 0, 0\}$, $M_2\{20, 0, 0\}$, $M_3\{0, 25, 0\}$, а в рабочей позиции координаты их в соответствии с (1) равны: $M_1\{x_1 = 26,499; y_1 = -1,198; z_1 = 3,473\}$, $M_2\{x_2 = 37,749; y_2 = -8,164; z_2 = 16,579\}$, $M_3\{x_3 = 44,514; y_3 = 19,105; z_3 = 1,231\}$. Тогда по формуле (4) $\tg \psi = -0,5774$, откуда $\psi_1 = 150^\circ$, $\psi_2 = 330^\circ$ и $\psi_3 = -210^\circ$, $\psi_4 = -30^\circ$. Принимаем $\psi = -30^\circ$. По формуле (5) $\tg \theta = -1$, откуда из значений $\theta_1 = 135^\circ$, $\theta_2 = 315^\circ$, $\theta_3 = -225^\circ$, $\theta_4 = -45^\circ$ выбираем $\theta = -45^\circ$. По формуле (6) $\varphi_1 = 300^\circ$ и $\varphi_2 = -60^\circ$, откуда $\varphi = -60^\circ$. Далее по формулам (7), (8) будем иметь $l = 13 \cdot 10^{-3}$ м ($t = 78 \cdot 10^{-3}$ м), $x_c = 18 \cdot 10^{-3}$ м, $y_c = -15 \cdot 10^{-3}$ м.

Наиболее целесообразный вариант переноса получим, если винтовую ось выставим сначала на углы $\psi = 30^\circ$ и $\theta = 45^\circ$ поворотами по часовой стрелке, а затем смещением на 0,018 м и -0,015 м в направлениях x и y в плоскости, перпендикулярной винтовой оси. Перенос будет левовинтовым на величину 0,013 м с шагом винта 0,078 м. Полученные результаты можно проверить по формулам (3), вычисляя координаты точек M_1 , M_2 , M_3 в рабочем положении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кобринский А. Е., Корендасев А. И., Саламандра Б. Л., Тывес Л. И. Автоматические манипуляторы с программным управлением (промышленные роботы). Состояние, перспективы, проблемы.— Станки и инструмент, 1974, № 11, с. 4—11.
2. Бухгольц Н. И. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. М.: Наука, 1969. 467 с.
3. Лигин В. Н. Геометрическая теория абсолютного движения неизменяемой системы. Одесса: Тип. Ульриха и Шульце, 1872. 329 с.
4. Каргин Д. И. Графическое решение задач теоретической механики о винтовом перемещении твердого тела.— Тр. Ленингр. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1952, вып. 144, с. 222—227.
5. *Saussure R.* Etude de géometrie cinématique réglée — *Amer. J. Math.*, 1896, v. 18, p. 304—396.
6. *Balleisen Ch. E.* Positioning by single rotation.— *Mach. Design*, 1960, No. 1, p. 116—119.
7. Дорошкевич А. М. Определение параметров винтового движения, обеспечивающего установку детали в заданное положение.— Изв. вузов. Машиностроение, 1963, № 9, с. 5—13.
8. Аверьянова В. Г., Диментберг Ф. М. Определение винта перемещения по начальному и конечному положениям твердого тела.— *Машиноведение*, 1965, № 2, с. 13—17.
9. Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений. М.: Наука, 1968. 584 с.

Калинин

Поступила в редакцию
19.XI.1979