

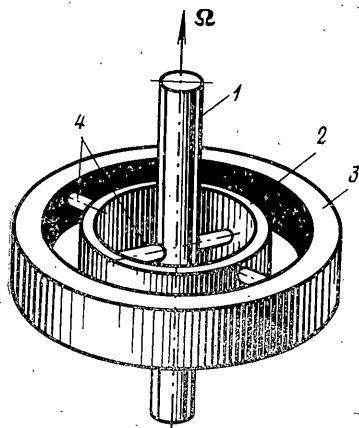
УДК 531.383

**ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ НА ТОЧНОСТЬ
ДИНАМИЧЕСКИ НАСТРАИВАЕМОГО ГИРОСКОПА**

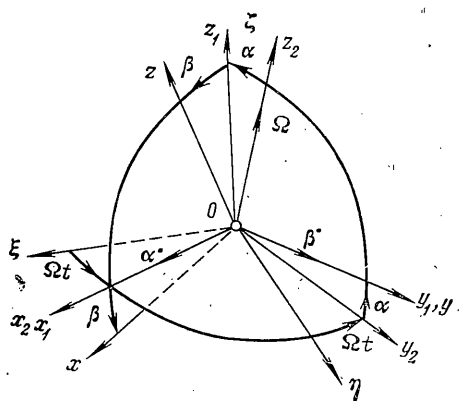
ФИЛАТОВ В. В., ШАБАЕВ В. И., ШАТАЛОВ М. Ю.

Линейная теория динамически настраиваемых гироскопов (ДНГ) исследована достаточно полно и освещена в многочисленных работах [1-3]. В связи с повышением требований по точности, предъявляемых к таким гироскопам, возникает необходимость уточнения линейной модели и учета нелинейных членов в уравнениях, описывающих поведение прибора. В публикуемой работе рассмотрен интегрирующий режим работы ДНГ, показано, что нелинейные эффекты приводят к уходу гироскопа и исследована природа возникающего ухода.

1. Рассмотрим динамически настраиваемый гироскоп, расположенный на неподвижном основании, который состоит из вала (1), кольца (2) и ротора (3), связанных двумя парами взаимно перпендикулярных торсионов (4) (фиг. 1). Допустим, что вал, кольцо и ротор — абсолютно твердые тела, торсионы имеют конечную жесткость на кручение (которую обозначим че-



Фиг. 1



Фиг. 2

рез K), бесконечную — на изгиб и пересекаются в центре масс системы. Относительный поворот тела совершается вокруг их главных осей инерции. Допустим, что экваториальные моменты инерции кольца равны, т. е.

$$A_1 = B_1 \tag{1.1}$$

Аналогично допустим равенство экваториальных моментов инерции ротора

$$A = B \tag{1.2}$$

Системы координат, используемые при данном рассмотрении (фиг. 2), связаны: $O\xi\eta\zeta$ — с инерциальным пространством, $Ox_2y_2z_2$ — с валом, $Ox_1y_1z_1$ — с кольцом, $Oxyz$ — с ротором. Вал приводится во вращение с по-

стоянной угловой скоростью Ω вокруг оси $O\xi$. Угол α характеризует поворот кольца относительно вала, а угол β — поворот ротора относительно кольца.

При этих предположениях уравнения движения второго приближения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (A+A_1)\alpha'' - (2A-C)\Omega\beta' + [(C-A+C_1-A_1)\Omega^2+K]\alpha = \\ = (C-A+C_1-A_1)\Omega^2(2\alpha^3/3) - 1/2(2A-C)\Omega\alpha^2\beta' + \\ + (C-A)(-\alpha''\beta^2 - 2\alpha'\beta'\beta + 2\Omega\beta'\beta^2 + \Omega^2\alpha\beta^2) \\ A\beta'' + (2A-C)\Omega\alpha' + [(C-A)\Omega^2+K]\beta = 1/2(2A-C)\Omega\alpha'\alpha^2 + \\ + (C-A)[\alpha''\beta - 2\Omega\alpha'\beta^2 + \Omega^2(2/3\beta^3 + \alpha^2\beta)] \end{aligned} \quad (1.3)$$

В предположении, что углы α и β малы, в системе уравнений (1.3) в левых частях оставлены линейные члены, а в правых частях — нелинейные члены третьего порядка малости. Малыми более высокого порядка пренебрегаем.

2. Интегрирующим режимом работы динамически настраиваемого гироскопа называется такой режим, при котором ось Oz ротора гироскопа сохраняет неизменным свое направление в инерциальном пространстве (т. е. относительно системы координат $O\xi\eta\zeta$) при отклонении вала от своего исходного положения Oz_2 — практически такое отклонение не превышает одного углового градуса. Для реализации интегрирующего режима работы необходимо подобрать моменты инерции кольца и ротора, жесткость торсионов и угловую скорость вращения вала таким образом, чтобы было выполнено условие настройки [1]:

$$[(2A-C)\Omega^2-K][(2A-C+2A_1-C_1)\Omega^2-K] = (2A-C)^2\Omega^4 \quad (2.1)$$

Учитывая, что моменты инерции кольца много меньше моментов инерции ротора, и пренебрегая величинами порядка

$$\begin{aligned} \frac{A_1^2}{A^2} \ll 1, \quad \frac{A_1^2}{C^2} \ll 1, \quad \frac{C_1^2}{C^2} \ll 1, \\ \frac{K^2}{A^2} \ll 1, \quad \frac{K^2}{C^2} \ll 1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

можно приближенно записать условие (2.1) в виде

$$K \simeq 1/2(2A_1-C_1)\Omega^2 \quad (2.3)$$

При выполнении условия (2.1) система линейных уравнений

$$\begin{aligned} (A+A_1)\alpha'' - (2A-C)\Omega\beta' + [(C-A+C_1-A_1)\Omega^2+K]\alpha = 0 \\ A\beta'' + (2A-C)\Omega\alpha' + [(C-A)\Omega^2+K]\beta = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

имеет две собственные частоты

$$\omega_1 = \Omega, \quad \omega_2 = \omega \simeq (C-A)\Omega/A \quad (2.5)$$

Таким образом, условие настройки (2.1) можно интерпретировать как условие равенства угловой скорости вращения вала и одной из собственных частот динамически настраиваемого гироскопа.

Поясним, почему при выполнении условия настройки (2.1) гироскоп работает аналогично свободному. Действительно, система уравнений (2.4)

имеет собственное решение

$$\alpha = \alpha_0 \cos \psi + \beta_0 \cos \theta, \quad \beta = s_1 \alpha_0 \sin \psi + s_2 \beta_0 \sin \theta \quad (2.6)$$

$$\psi = \Omega t + \vartheta, \quad \theta = \omega t + \mu \quad (2.7)$$

s_1 и s_2 — постоянные, определяемые через параметры системы, а ϑ и μ — фазовые постоянные.

Предположим, что ось Oz (апекс гироскопа) отклонена на некоторый угол α в системе координат $O\xi\eta\zeta$, а начальная скорость апекса в этой системе координат равна нулю. Очевидно, что во вращающейся системе координат $Ox_2y_2z_2$ это эквивалентно заданию следующих начальных условий:

$$\alpha(0) = a, \quad \dot{\alpha}(0) = 0, \quad \beta(0) = 0, \quad \dot{\beta}(0) \cong -a\Omega \quad (2.8)$$

Учитывая, что согласно (2.2) и (2.7) $s_1 \cong -1$, $s_2 \cong 1$, из выражений (2.6) следует, что реализуется одночастотный колебательный процесс ($\alpha_0 = a$, $\beta_0 = 0$, $\vartheta = \mu = 0$):

$$\alpha \cong a \cos \psi, \quad \beta \cong s_1 a \sin \psi \quad (2.9)$$

и апекс гироскопа описывает на изображающей плоскости эллипс с полуосями a и $-s_1 a \cong a$. Направление движения апекса по эллипсу противоположно направлению вращения вала.

Суперпозиция двух движений: конического движения оси гироскопа Oz относительно вращающейся системы координат $Ox_2y_2z_2$ и вращения самой системы координат $Ox_2y_2z_2$ (вместе с валом) в противоположном направлении с той же самой угловой скоростью Ω (условия настройки!) — означает, что ось Oz сохраняет неизменным свое положение в инерциальной системе координат $O\xi\eta\zeta$. В этом и состоит геометрическая интерпретация интегрирующего режима работы динамически настраиваемого гироскопа.

Полученная геометрическая интерпретация позволяет решить вопрос об уходе гироскопа. Рассматриваемый уход можно разбить на две составляющих.

Первая — так называемый несинхронный уход, возникающий вследствие того, что частота колебаний нелинейной системы отличается от собственной частоты Ω линеаризованной системы — это тангенциальная составляющая ухода; вторая составляющая представляет собой уход вследствие тяжения в радиальном направлении — это нормальная составляющая ухода.

Обычно начальные условия произвольные, но величина отклонений от условий (2.8) мала, так как гироскоп работает на объекте, совершающем медленное по сравнению со скоростью вращения вала эволюционное движение. Возмущения начальных условий (2.8) приводят к появлению двухчастотных колебаний. Геометрически это эквивалентно нутации апекса ротора гироскопа относительно некоторого среднего положения, медленно изменяющегося во времени.

Представляет интерес решение вопроса о влиянии нутационных колебаний с частотой ω на величину ухода гироскопа.

Перейдем к нахождению тангенциальной и нормальной составляющих этого ухода.

3. Произведем замену переменных в системе уравнений (1.3):

$$\alpha = \varepsilon \xi, \quad \beta = \varepsilon \eta \quad (3.1)$$

где ε — малый безразмерный параметр, являющийся масштабным коэффициентом величин α и β .

В результате замены переменных получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (A+A_1)\ddot{\xi} - (2A-C)\Omega\dot{\eta} + [(C-A + \\ + C_1-A_1)\Omega^2 + K]\xi = \varepsilon^2 \{ \frac{2}{3}(C-A + \\ + C_1-A_1)\Omega^2\xi^3 - (2A-C)\Omega\xi^2\dot{\eta} / 2 + \\ + (C-A)(2\Omega\dot{\eta}\eta^2 - 2\dot{\xi}\eta\dot{\eta} + \Omega^2\xi\eta^2) + \\ + (C-A)(A+A_1)^{-1} [-(2A-C)\Omega\dot{\eta}\eta^2 + \\ + ((C-A+C_1-A_1)\Omega^2 + K)\xi\eta^2] \} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} A\ddot{\eta} + (2A-C)\Omega\dot{\xi} + [(C-A)\Omega^2 + K]\eta = \\ = \varepsilon^2 \{ \frac{1}{2}(2A-C)\Omega\dot{\xi}\xi^2 + (C-A)[\xi^2\dot{\eta} - 2\Omega\xi\dot{\eta}^2 + \\ + \Omega^2(\frac{2}{3}\eta^3 + \xi^2\eta)] \} \end{aligned}$$

Обозначив

$$\begin{aligned} \kappa_1 = (2A-C)(A+A_1)^{-1}\Omega, \quad \kappa_2 = (2A-C)A^{-1}\Omega \\ n_1^2 = [(C-A+C_1-A_1)\Omega^2 + K](A+A_1)^{-1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} n_2^2 = [(C-A)\Omega^2 + K]A^{-1}, \quad f(\xi, \dot{\xi}, \eta, \dot{\eta}) = (A+A_1)^{-1} \{ \frac{2}{3}(C-A + \\ + C_1-A_1)\Omega^2\xi^3 - \frac{1}{2}(2A-C)\Omega\xi^2\dot{\eta} + (C-A)(2\Omega\dot{\eta}\eta^2 - 2\dot{\xi}\eta\dot{\eta} + \Omega^2\xi\eta^2) + \\ + (C-A)(A+A_1)^{-1} [-(2A-C)\Omega\dot{\eta}\eta^2 + ((C-A+C_1-A_1)\Omega^2 + K)\xi\eta^2] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\xi, \dot{\xi}, \eta, \dot{\eta}) = A^{-1} \{ (2A-C)\Omega\dot{\xi}\xi^2 / 2 + \\ + (C-A)[\xi^2\dot{\eta} - 2\Omega\xi\dot{\eta}^2 + \Omega^2(\frac{2}{3}\eta^3 + \xi^2\eta)] \} \end{aligned}$$

приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - \kappa_1\dot{\eta} + n_1^2\xi = \varepsilon^2 f(\xi, \dot{\xi}, \eta, \dot{\eta}) \\ \ddot{\eta} + \kappa_2\dot{\xi} + n_2^2\eta = \varepsilon^2 g(\xi, \dot{\xi}, \eta, \dot{\eta}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Порождающее решение соответствующей однородной системы уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \xi = a \cos \psi + b \cos \theta, \quad \eta = s_1 a \sin \psi + s_2 b \sin \theta \\ \psi = \Omega t + \vartheta, \quad \theta = \omega t + \mu \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$s_1 = (n_1^2 - \Omega^2)(\kappa_1\Omega)^{-1} = (n_2^2 - \Omega^2)^{-1}(\kappa_2\Omega)$$

$$s_2 = (n_1^2 - \omega^2)(\kappa_1\omega)^{-1} = (n_2^2 - \omega^2)^{-1}(\kappa_2\omega)$$

Пренебрегая моментами инерции кольца по сравнению с моментами инерции ротора, согласно (2.2), имеем следующие приближенные выражения:

$$\kappa_1 \simeq \kappa_2 = A^{-1}(2A-C)\Omega, \quad n_1^2 \simeq n_2^2 = A^{-1}(C-A)\Omega^2 \quad (3.6)$$

$$\omega \simeq A^{-1}(C-A)\Omega, \quad s_1 \simeq -1, \quad s_2 \simeq 1$$

Таким образом, порождающее решение (3.5) имеет вид

$$\xi \simeq a \cos \psi + b \cos \theta, \quad \eta \simeq -a \sin \psi + b \sin \theta \quad (3.7)$$

Рассматривая a , b , ϑ и μ как медленно изменяющиеся функции времени, применим метод осреднения для решения нелинейной системы уравнений (3.4).

Полагая

$$\xi^* = -a\Omega \sin \psi - b\omega \sin \theta, \quad \eta^* = -a\Omega \cos \psi + b\omega \cos \theta \quad (3.8)$$

имеем следующую систему уравнений, разрешенных относительно a^* , b^* , θ^* , μ^* :

$$\begin{aligned} a^* &= -\varepsilon^2 \{f \sin \psi + g \cos \psi\} (\Omega + \omega)^{-1} \\ \theta^* &= -\varepsilon^2 \{f \cos \psi - g \sin \psi\} (\Omega + \omega)^{-1} \\ b^* &= -\varepsilon^2 \{f \sin \theta - g \cos \theta\} (\Omega + \omega)^{-1} \\ \mu^* &= -\varepsilon^2 \{f \cos \theta + g \sin \theta\} (\Omega + \omega)^{-1} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Подставляя в правые части системы (3.9) значения порождающего решения (3.7) и осредняя по времени, имеем следующие величины уходов:

$$\langle a^* \rangle = 0, \quad \langle \theta^* \rangle = -\frac{\varepsilon^2}{4} \left[a^2 + \left(1 + \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right) b^2 \right] \Omega \quad (3.10)$$

угловыми скобками обозначены средние по времени значения переменных.

Аналогично могут быть получены средние значения и для b^* и μ^* . Как и для $\langle a^* \rangle$, $\langle b^* \rangle = 0$. Величина $\langle \mu^* \rangle \neq 0$ показывает, что нутация относительно среднего положения, изменяющегося во времени, происходит с частотой $\omega + \langle \mu^* \rangle$.

Переход к переменным α и β дает

$$\langle \alpha^* \rangle = \langle \beta^* \rangle = 0, \quad (3.11)$$

$$\langle \theta^* \rangle = -\frac{1}{4} \left[\alpha^2 + \left(1 + \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right) \beta^2 \right] \Omega$$

4. Рассмотрим практически важный частный случай, соответствующий начальным условиям (2.8). При этих начальных условиях реализуются одночастотные колебания (2.9). Формулы для уходов (3.11) принимают вид

$$\langle \alpha^* \rangle = 0, \quad \langle \theta^* \rangle = -1/4 \alpha^2 \Omega \quad (4.1)$$

Таким образом, как показывает сравнение формул (3.11) и (4.1), при наложении на основное колебание (с частотой Ω) нутационного колебания (с частотой ω) нелинейные уходы динамически настраиваемого гироскопа возрастают на величину

$$\langle \Delta \theta^* \rangle = -1/4 (1 + \omega^2 / \Omega^2) \beta^2 \Omega \quad (4.2)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Брозгуль Л. И., Смирнов Е. Л. Вибрационные гироскопы. М.: Машиностроение, 1970. 215 с.
2. Бурмистров В. П., Виноградов Г. М., Родионов Е. М. Динамика гироскопа на упругом подвесе. - Изв. вузов. Приборостроение, 1971, т. 14, вып. 3, с. 70.
3. Павловский М. А., Збруцкий А. В. О повышении чувствительности роторных вибрационных гироскопов. - Прикладная механика, 1978, т. 14, № 9, с. 95.

Москва

Поступила в редакцию
30.IX.1980