МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1981

УДК 534.13

РАЗДЕЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ В ПАССИВНЫХ И АКТИВНЫХ ВИБРОЗАЩИТНЫХ СИСТЕМАХ С ЦИКЛИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

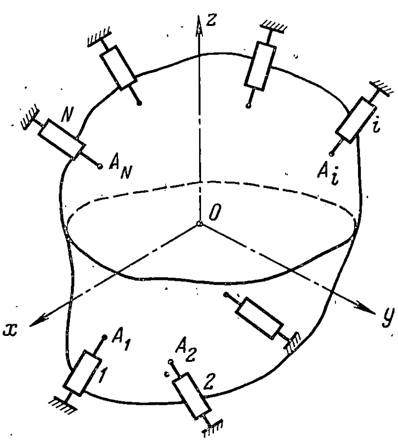
АВАНЕСОВ Ю. Л., ВЫГОВСКИЙ К. А., ЛЕБЕДЕВ Н. А.

Теоретическое исследование возможности разделения колебаний амортизированного твердого тела в виброзащитном подвесе приведено в ряде работ; подробно этот вопрос рассмотрен в [1]. Задача о разделении колебаний в активных виброзащитных системах в общей постановке изучалась в [2].

При наличии одной плоскости симметрии колебания разделяются на две группы трехсвязных колебаний, а в случае двух плоскостей симметрии выделяются два главных направления и две группы связанных колебаний в плоскостях симметрии. Для полного разделения колебаний необходимо и достаточно, чтобы система имела центр жесткости, совпадающий с центром инерции твердого тела. Главные оси жесткости должны при этом совпадать с главными центральными осями инерции тела. Условия частичного разделения колебаний легко осуществимы. Условия же полного разделения колебаний на практике реализовать оказывается довольно сложно.

В публикуемой работе рассматривается определенный класс виброзащитных систем, обладающих циклической симметрией, в котором всегда возможно полное разделение колебаний. Колебания твердого тела полагаются малыми, и рассматривается линейная модель подвески.

1. Рассматривается твердое тело, подвешенное на N упругих линейных амортизаторах. Крепление амортизаторов к телу и жесткому основанию осуществляется при помощи шарниров (фиг. 1). Положение системы координат $Oxyz$, связанной с главными центральными осями инерции тела, относительно системы координат O_1XYZ, связанной с вибрирующим основанием, определяется вектором $\mathbf{q}=[\delta_x, \delta_y, \delta_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z]^T$, где δ_x, δ_y, δ_z — смещения центра инерции O, φ_x, φ_y, φ_z — углы поворота тела относительно соответствующих осей; верхний индекс T означает транспонирование. Предполагается, что в положении статического равновесия оси координатных систем $Oxyz$ и O_1XYZ совпадают.

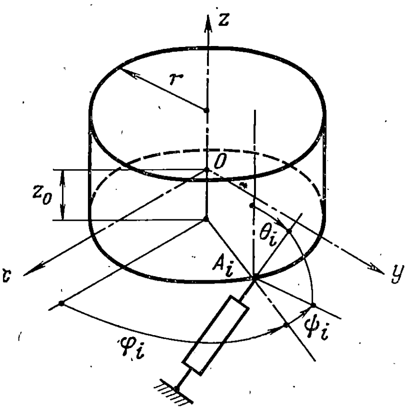


Фиг. 1

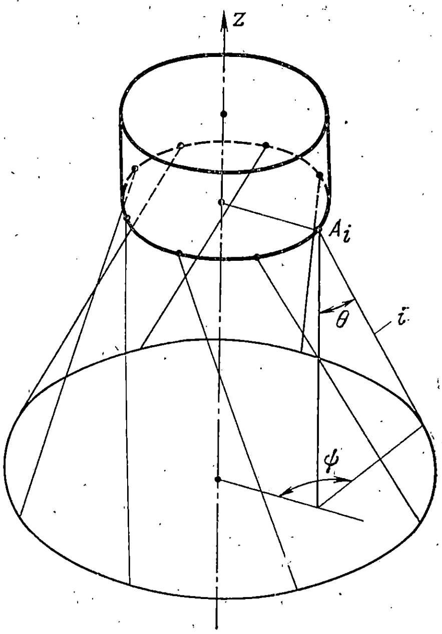
Расположение амортизаторов характеризуется матрицей L, каждая строка которой образована шестью плюккеровыми координатами [3, 4] соответствующего амортизатора (строка состоит из трех направляющих косинусов оси амортизатора l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} и трех проекций l_{i4}, l_{i5}, l_{i6} на оси x, y, z момента единичного вектора, направленного по оси амортизатора). В этом случае матрица жесткости виброзащитной системы C представляется в виде $C=L^T\Lambda_1 L$, где Λ_1 — диагональная матрица с коэффициентами жесткости i-го амортизатора c_i. (Далее в тексте диагональные матрицы с положительными элементами обозначены Λ_m, $m=1, 2, \ldots$).

Примем, что точки крепления амортизаторов к телу A_i находятся в одной плоскости $z=z_0$. Расположим точки крепления амортизаторов к телу равномерно на окружности радиуса r. Координаты точек крепления ξ_i, η_i и ζ_i при этом выражаются так: $\xi_i=r\cos\varphi_i$, $\eta_i=r\sin\varphi_i$, $\zeta_i=z_0$, $\varphi_i=2\pi(i-1)/N$, где φ_i – фазовый угол точки крепления A_i $(i=1,2,\ldots,N)$.

Положение оси i-го амортизатора зададим двумя углами: θ_i – между осью амортизатора и осью z и ψ_i – между проекциями на плоскость $z=z_0$ радиус-вектора точки A_i и оси амортизатора (фиг. 2). Если при этом $\psi_i=\psi$, $\theta_i=\theta$ и $c_i=c$ для всех i, то виброзащитная система обладает цикли-



Фиг. 2



Фиг. 3

ческой симметрией относительно оси z, т. е. система полностью повторяет себя при повороте вокруг оси z на угол $2\pi/N$; порядок симметрии равен N (фиг. 3).

Плюккеровы координаты для системы с циклической симметрией определяются выражениями

$$l_{i1}=\sin\theta\cos(\varphi_i+\psi),\quad l_{i2}=\sin\theta\sin(\varphi_i+\psi)$$

$$l_{i3}=\cos\theta,\quad l_{i4}=r\cos\theta\sin\varphi_i-z_0\sin\theta\sin(\varphi_i+\psi) \tag{1.1}$$

$$l_{i5}=-r\cos\theta\cos\varphi_i+z_0\sin\theta\cos(\varphi_i+\psi),\quad l_{i6}=r\sin\theta\sin\psi$$

Нетрудно показать, что в данном случае оси амортизаторов направлены по одному семейству прямолинейных образующих гиперболоида вращения, в частных случаях (при $\psi=0$, π) – по образующим конуса, а при $\theta=0$ – по образующим цилиндра.

Плюккеровы координаты не меняют своих значений при переносе точки A_i вдоль оси i-го амортизатора, поэтому в выражениях (1.1) можно считать, что параметры r, ψ, θ и φ_i относятся к произвольному сечению гиперболоида плоскостью $z=z_0$. В частности, если в плоскости $z=z_0$ расположена шейка гиперболоида (наиболее узкое его сечение), то $\psi=\pi/2$.

При вычислении коэффициентов матрицы жесткости воспользуемся известными соотношениями

$$\sum_{i=1}^{N} \sin\varphi_i = \sum_{i=1}^{N} \cos\varphi_i = \sum_{i=1}^{N} \sin\varphi_i \cos\varphi_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sin^2\varphi_i = \sum_{i=1}^{N} \cos^2\varphi_i = \frac{1}{2}N \quad (N\geqslant 3)$$

которые позволяют упростить конечные выражения для коэффициентов c_{jk} $(j, k=1, 2, \ldots, 6)$ симметричной матрицы C:

$$\begin{gathered} c_{11}=c_{22}={}^1/_2 cN\sin^2\theta, \quad c_{33}=cN\cos^2\theta \\ c_{44}=c_{55}={}^1/_2 cN(r^2\cos^2\theta-2rz_0\sin\theta\cos\theta\cos\psi+z_0{}^2\sin^2\theta) \\ c_{66}=cNr^2\sin^2\theta\sin^2\psi \\ c_{15}=-c_{24}={}^1/_2 cN\sin\theta(r\cos\theta\cos\psi-z_0\sin\theta) \\ c_{14}=c_{25}=-{}^1/_2 c_{36}={}^1/_2 cNr\sin\theta\cos\theta\sin\psi \end{gathered} \tag{1.2}$$

В (1.2) выписаны только отличные от нуля элементы матрицы C, которая является вырожденной. Ранг ее равен трем [5, 6].

Гиперболоид вращения имеет два семейства прямолинейных образующих, отличающихся лишь знаком угла ψ. Направим оси половины амортизаторов ($N/2$ — целое) вдоль одного семейства образующих, а оси остальных амортизаторов — вдоль другого так, чтобы система обладала циклической симметрией порядка $N/2$. Диагональные элементы матрицы C, а также элементы c_{15} и c_{24} в выражениях (1.2) не изменят своей величины. Элементы же с индексами 14, 25, 36 в силу нечетности функции $\sin\psi$ обратятся в нуль. При этом $\det C={}^1/_{16}(cNr\sin\theta\cos\theta\sin\psi)^6\neq 0$. Для диагонализации C, а следовательно, для разделения малых колебаний тела, необходимо и достаточно, чтобы $c_{15}=-c_{24}=0$. Последнее выполняется, если

$$\cos\psi=(z_0/r)\operatorname{tg}\theta \tag{1.3}$$

что возможно при $|z_0\operatorname{tg}\theta|\leqslant r$.

Условие (1.3) определяет множество соосных гиперболоидов вращения; располагая по их прямолинейным образующим амортизаторы, можно достичь разделения колебаний в пассивной виброзащитной системе. Геометрические центры этих гиперболоидов должны совпадать с центром инерции тела. Действительно, если $z_0=0$, то из условия (1.3) следует, что $\psi=\pi/2$ независимо от r и θ $(\theta\neq 0)$.

При $\theta=0$, $\pi/2$, а также при $\psi=0$ и π матрица C вырождается, поэтому область возможных значений θ и ψ в задаче о разделении колебаний определяется неравенствами $0<\theta<\pi/2$, $0<\psi<\pi$.

Из (1.2) и (1.3) находится условие равножесткости подвески $\theta=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}$. В этом случае $\cos\psi=\sqrt{2}z_0/r$, а для собственных частот твердого тела в виброзащитном подвесе получаются простые соотношения

$$\begin{gathered} \lambda_x=\lambda_y=\lambda_z=\lambda_0=(cN/3m)^{1/2}, \quad \lambda_{\varphi x}=0.5\lambda_0\rho/\rho_x \\ \lambda_{\varphi y}=0.5\lambda_0\rho/\rho_y, \quad \lambda_{\varphi z}=\lambda_0\rho/\rho_z, \quad \rho=[2(r^2-2z_0{}^2)]^{1/2} \end{gathered}$$

где m — масса тела, ρ_x, ρ_y, ρ_z — радиусы инерции тела.

Применение равножестких подвесов с разделением колебаний предпочтительно в большинстве задач виброзащиты аппаратуры. Особенно важно обеспечить эти свойства в виброзащитных системах гироскопических приборов. Такие подвески дополнительно должны иметь довольно высокие угловые жесткости [7], что может быть обеспечено в рассмотренных системах выбором достаточно большого r.

2. В задаче о разделении колебаний в активной виброзащитной системе ограничимся рассмотрением системы простейшего, но наиболее распространенного вида: будем предполагать, что каждый амортизатор управляется по сигналу только одного измерителя, а общее число амортизаторов равно минимальному необходимому числу, равному шести. Усилие в i-м амортизаторе можно представить выражением $U_i=-k_i\varkappa(s)u_i'$ ($i=1, 2, \ldots, 6$), где u_i' — перемещение (скорость или ускорение при управлении по скорости или ускорению объекта) i-й точки наблюдения в направлении оси чувствительности измерителя, $k_i>0$ — постоянные коэффициенты усиления, $\varkappa(s)$ — передаточная функция амортизаторов, s — оператор дифференцирования.

Вектор обобщенных сил, соответствующих U_i, определяется выражением

$$\mathrm{Q}=-\varkappa(s)L^T\Lambda_3L_B\mathbf{q},\quad L_B=\|l_{ij}'\| \tag{2.1}$$

где L_B — матрица размера 6×6, составленная из плюккеровых координат осей чувствительности измерителей, Λ_3 — матрица с элементами k_i.

Задача о разделении колебаний в такой системе заключается в выборе матриц L, L_B, Λ_3, отвечающих условию

$$L^T\Lambda_3L_B=\Lambda_4 \tag{2.2}$$

Рассмотрим условие (2.2) по отношению к системам, для которых матрица L удовлетворяет соотношению

$$L^T\Lambda_1L=\Lambda_2 \tag{2.3}$$

т. е. по отношению к системам, для которых расположение амортизаторов допускает возможность разделения колебаний в классе пассивных виброзащитных систем.

Справедлива *теорема*.

Если схема расположения амортизаторов при некоторых значениях коэффициентов жесткости допускает разделение колебаний, то для разделения колебаний в активной виброзащитной системе необходимо, чтобы схема расположения измерителей, при замене последних упругими элементами, также допускала разделение колебаний.

Доказательство. Если колебания в активной виброзащитной системе разделяются, то имеет место соотношение (2.2). Необходимо показать, что при выполнении соотношения (2.3) существует матрица Λ_5, для которой справедливо

$$L_B{}^T\Lambda_5L_B=\Lambda_6 \tag{2.4}$$

Из выражения (2.2) находим

$$L_B=\Lambda_3{}^{-1}(L^{-1})^T\Lambda_4,\qquad L_B{}^T=\Lambda_4L^{-1}\Lambda_3{}^{-1} \tag{2.5}$$

Рассмотрим произведение матриц $L_B{}^T\Lambda_5L_B$, причем $\Lambda_5=\Lambda_3\Lambda_1{}^{-1}\Lambda_3$. Используя (2.5), получаем

$$L_B{}^T\Lambda_5L_B=\Lambda_4L^{-1}\Lambda_1{}^{-1}(L^{-1})^T\Lambda_4 \tag{2.6}$$

Обращая матричное равенство (2.3) и подставляя полученное соотношение в (2.6), приходим к выражению (2.4), в котором $\Lambda_6=\Lambda_4\Lambda_2{}^{-1}\Lambda_4$.

Достаточные же условия разделения колебаний в активной виброзащитной системе существенно сложнее. Условия (2.2) и (2.3) приводят к соотношению, которому должна удовлетворять матрица L_B:

$$L_B=\Lambda_3^{-1}\Lambda_1 L\Lambda_2^{-1}\Lambda_4 \qquad (2.7)$$

или в скалярной форме

$$l_{ij}'=f_i d_j l_{ij} \quad (i,\, j=1,\, 2,\, \ldots,\, 6) \qquad (2.8)$$

где $f_i=c_i/k_i$, $d_j=p_j/c_{jj}$; c_i, c_{jj}, k_i, p_j — элементы матриц Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4.

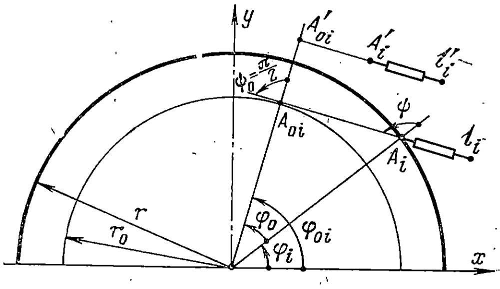
Полученные условия (2.7) и (2.8) можно рассматривать как определяющие уравнения для матрицы L_B. Выбор постоянных f_i и d_j ограничен условиями [3], которым должны удовлетворять плюккеровы координаты l_{ij}' (здесь и далее $i=1, 2, \ldots, 6$):

$$l_{i1}'^2+l_{i2}'^2+l_{i3}'^2=1 \qquad (2.9)$$

$$l_{i1}'l_{i4}'+l_{i2}'l_{i5}'+l_{i3}'l_{i6}'=0 \qquad (2.10)$$

Таким образом, достаточное условие разделения колебаний в активной виброзащитной системе представляется в виде системы определяющих уравнений (2.8) для L_B, в которых постоянные f_i и d_j являются решениями систем уравнений (2.9) и (2.10).

Введем обозначения $\alpha_i=f_i d_1$, $\beta_i=f_i d_2$, $\gamma_i=f_i d_3$. Очевидно, уравнения (2.9) и (2.10) удовлетворяются при $\alpha_i=\beta_i=\gamma_i=1$, т. е. при $l_{ij}'=l_{ij}$ ($j=1, 2, 3$) и при $l_{ij}'=dl_{ij}$ для $j=4, 5, 6$ (d — произвольный положительный параметр).



Фиг. 4

Геометрически это решение характеризует схему расположения измерителей, подобную расположению амортизаторов: центр подобия расположен в центре инерции тела, d — коэффициент подобия. При заданной схеме расположения амортизаторов существует бесконечное число различных схем расположения измерителей, обеспечивающих разделение колебаний в активной виброзащитной системе.

Ограничимся рассмотрением таких систем, введение измерителей в которые не изменяет симметрии, присущей расположению амортизаторов. В активных виброзащитных системах с циклической симметрией оси чувствительности измерителей и оси амортизаторов должны быть ориентированы вдоль семейств прямолинейных образующих соосных гиперболоидов вращения. В этом случае $c_i=c$, $k_i=k$, $\alpha_i=\alpha=fd_1$, $\beta_i=\beta=fd_2$, $\gamma_i=\gamma=d_3$, $f=ck^{-1}$.

Так как условие (2.3) при этом имеет вид (1.3), то, не теряя общности, будем полагать $z_0=0$, $\psi=\psi_0=\pi/2$. Запишем условия (2.9) в виде

$$\alpha^2\sin^2\theta\sin^2\varphi_{0i}+\beta^2\sin^2\theta\cos^2\varphi_{0i}+\gamma^2\cos^2\theta=1 \qquad (2.11)$$

где φ_{0i} — фазовые углы, соответствующие точкам пересечения осей амортизаторов с плоскостью $z=0$ (фиг. 4), имеющие значения $\varphi_{01}=\varphi_0$, $\varphi_{02}=-\varphi_0$, $\varphi_{03}=\sigma+\varphi_0$, $\varphi_{04}=\sigma-\varphi_0$, $\varphi_{05}=2\sigma+\varphi_0$, $\varphi_{06}=2\sigma-\varphi_0$, $\sigma=2\pi/3$.

Выражения (2.11) представляют систему трех линейных уравнений относительно α^2, β^2 и γ^2 с особенной матрицей, ранг которой равен двум.

Такой же ранг имеет расширенная матрица системы, поэтому решение существует. Оно имеет вид

$$d_1=d_2=\tau/(f\sin\theta),\quad d_3=p,\quad \tau=(1-p^2f^2\cos^2\theta)^{1/2} \tag{2.12}$$

где p — произвольный положительный параметр.

Условие (2.10) для рассматриваемой системы представляется в форме

$$d_1d_4\sin^2\varphi_{0i}+d_2d_5\cos^2\varphi_{0i}-d_3d_6=0$$

Это однородная система трех линейных алгебраических уравнений относительно d_4, d_5 и d_6 с особенной матрицей. Система имеет семейство решений

$$d_4=d_5=v,\quad d_6=vd_1/p \tag{2.13}$$

зависящее от двух произвольных параметров p и v.

Обозначим через φ_i', θ', ψ' и r' параметры плюккеровых координат осей чувствительности измерителей, отнесенные к точкам пересечения осей чувствительности измерителей с плоскостью $z=0$. Определяющие уравнения для φ_i', θ', ψ' и r' находятся из уравнений (2.8) после подстановки в них найденных решений (2.12) и (2.13), а также выражений (1.1) для плюккеровых координат амортизаторов и аналогичных им выражений для измерителей

$$\begin{gathered}\sin\theta'\cos(\varphi_i'+\psi_i')=\tau\cos(\varphi_{0i}+\pi/2)\\ \sin\theta'\sin(\varphi_i'+\psi_i')=\tau\sin(\varphi_{0i}+\pi/2)\\ \cos\theta'=pf\cos\theta,\quad r'\cos\theta'\sin\varphi_i'=vfr_0\cos\theta\sin\varphi_{0i}\\ r'\cos\theta'\cos\varphi_i'=vfr_0\cos\theta\cos\varphi_{0i}\\ r'\sin\theta'\sin\psi_i'=vr_0\tau/p\end{gathered} \tag{2.14}$$

Их решение

$$\varphi_i'=\varphi_{0i},\quad \psi'=\pi/2,\quad r'=vr_0/p,\quad \theta'=\arccos(pf\cos\theta) \tag{2.15}$$

Таким образом, колебания в активной виброзащитной системе с циклической симметрией разделяются, если оси амортизаторов и измерителей направлены по двум семействам прямолинейных образующих соосных гиперболоидов вращения, имеющих общий центр, и этот центр совпадает с центром инерции тела. При этом фазовые углы измерителей и амортизаторов одинаковы (фиг. 4).

Рассмотрим условие равножесткости активной виброзащитной системы $p_1=p_2=p_3$. Оно выполняется, если $d_1c_{11}=d_3c_{33}$. Используя выражения (1.2), (2.12) и (2.15), находим

$$\theta'=\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{ctg}\theta) \tag{2.16}$$

Следовательно, в активных виброзащитных системах в отличие от пассивных можно обеспечить равножесткость подвеса при любом выбранном угле θ. Это достигается выбором угла θ' в соответствии с выражением (2.16).

Приведенные результаты показывают, что в классе пассивных и активных виброзащитных систем с циклической симметрией всегда можно добиться разделения колебаний и равножесткости подвеса твердого тела.

Авторы благодарны Коловскому М. З. за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О.* Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976. 431 с.
2. *Коловский М. З.* Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 319 с.
3. *Диментберг Ф. М.* Метод винтов в прикладной механике. М.: Машиностроение, 1971. 264 с.
4. *Синев А. В.* Синтез пространственной системы виброзащиты твердого тела при стационарных случайных воздействиях.– В кн.: Колебания и динамическая прочность элементов машин. М.: Наука, 1976, с. 7.
5. *Лебедев Н. А.* Собственные частоты твердого тела на стержневой подвеске с циклической симметрией.– Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 2, с. 37.
6. *Аванесов Ю. Л., Лебедев Н. А.* Амортизирующая подвеска гиперболоидного типа.– Машиноведение, 1978, № 3, с. 3.
7. *Троицкая З. В.* О выборе угловой жесткости системы амортизации гироскопического прибора.– Инж. ж. МТТ, 1967, № 2, с. 54.

Ленинград

Поступила в редакцию
26.XI.1979