МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1981

УДК 534.014

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С КУБИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ И СЛУЧАЙНОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

ДИМЕНТБЕРГ М. Ф., ИСИКОВ Н. Е., МОДЕЛЬ Р.

Исследуются методом усреднения стохастические колебания нелинейной системы при одновременном периодическом и широкополосном случайном параметрическом возбуждении. Проводится сравнение аналитического решения с результатами моделирования на ЭЦВМ, полученными прямым численным интегрированием нелинейного стохастического уравнения.

1. Рассмотрим колебания системы с одной степенью свободы, описываемые уравнением

$$x^{\cdot\cdot}+(2\delta+bx^2+\beta x^{\cdot 2})x^{\cdot}+\Omega^2[1+r\sin\nu t+\xi(t)]x=0 \tag{1}$$

в котором $\xi(t)$ — стационарный центрированный широкополосный случайный процесс со спектральной плотностью $\Phi(\omega)$. Уравнение (1) представляет, в частности, простейшую модель маховых колебаний лопасти винта вертолета с учетом горизонтальных турбулентных пульсаций скорости воздуха [1] (по сравнению с уравнениями этой работы здесь добавлены слагаемые с кубически-нелинейным демпфированием и сохранена лишь первая гармоника ряда Фурье для периодического возбуждения).

Полагая величины δ, b, β, r, Φ и $\Delta=|2\Omega-\nu|$ малыми, перейдем в (1) к новым переменным $A(t)$, $\varphi(t)$ согласно зависимостям $x=A\cos\theta$, $x^{\cdot}=-{}^1/_2A\nu\sin\theta$, $\theta=\Omega t+\varphi$.

Тогда из (1) получится система двух уравнений первого порядка в стандартной форме относительно медленных переменных $\varphi(t)$ и $u(t)=\ln A$. Применение к этой системе операции усреднения за период с учетом второго приближения для флуктуационных членов [2—4] приводит к следующим укороченным стохастическим уравнениям в смысле Ито:

$$u^{\cdot}=-\delta-\gamma\exp 2u+{}^1/_4\,\Omega r\cos 2\varphi+D_1+D_1^{1/2}\zeta_1(t) \tag{2}$$

$$\varphi^{\cdot}={}^1/_4\Delta-{}^1/_4\Omega r\sin 2\varphi+{}^1/_4\pi\Omega^2\Psi(2\Omega)+D_2^{1/2}\zeta_2(t) \tag{3}$$

$$D_1={}^1/_4\pi\Omega^2\Phi(2\Omega),\quad D_2={}^1/_4\pi\Omega^2[\Phi(2\Omega)+2\Phi(0)]$$

$$\gamma={}^1/_8[b+3\Omega(\Omega-\Delta)\beta],\quad \Psi(\omega)=\int_0^\infty K(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau$$

Здесь $\zeta_1(t)$, $\zeta_2(t)$ — некоррелированные процессы типа белого шума единичной интенсивности, $K(\tau)$ — корреляционная функция процесса $\xi(t)$).

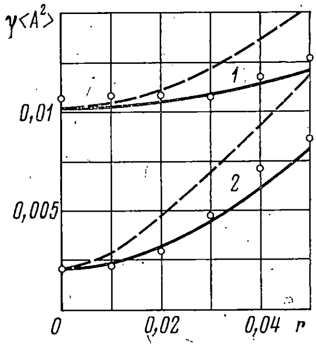
Для случая линейной системы ($\beta=b=0$) уравнения (2), (3) были получены и исследованы в [2, 5].

Для случая $\gamma=0$ в [2, 5] найдено критическое значение коэффициента демпфирования (операцию определения математического ожидания будем обозначать угловыми скобками):

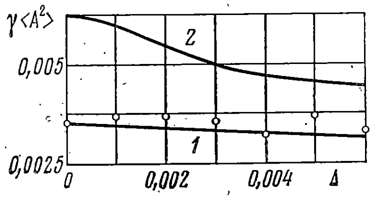
$$\delta_* = D_1 + {}^1/_4 \Omega r \langle \cos 2\varphi \rangle \tag{4}$$

такое, что система (1) с $\gamma=0$ является устойчивой при $\delta>\delta_*$ и неустойчивой при $\delta<\delta_*$. Математическое ожидание $\langle\cos 2\varphi\rangle$ определяется по плотности вероятности $p(\varphi)$ фазы $\varphi(t)$, которая находится из решения уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова, соответствующего стохастическому уравнению (3).

Для рассматриваемой здесь нелинейной задачи этот метод позволяет определить также среднее значение квадрата $\langle A^2\rangle$ амплитуды установив-



Фиг. 1



Фиг. 2

шихся колебаний при $\delta<\delta_*$. Будем рассматривать в качестве $\xi(t)$ процесс типа белого шума с интенсивностью D, так что $\Phi(0)=\Phi(2\Omega)=D/2\pi$, $\Psi(2\Omega)=0$. Условие равенства нулю математического ожидания правой части уравнения (2) дает

$$\gamma\langle A^2\rangle = \delta_* - \delta = {}^1/_8 \Omega^2 D + {}^1/_4 \Omega r \langle\cos 2\varphi\rangle - \delta \quad (\delta<\delta_*) \tag{5}$$

Таким образом, в пределах области неустойчивости линейной системы (при $\delta<\delta_*$) величина $\langle A^2\rangle$ возрастает по линейному закону при уменьшении коэффициента линейного демпфирования δ, поскольку согласно (3) плотность вероятности $p(\varphi)$, а следовательно, и $\langle\cos 2\varphi\rangle$ не зависят от δ. Выражение для $p(\varphi)$ оказывается таким же, как и в линейной задаче (см. [2, 5], где задавался процесс $\xi(t)$ с $\Phi(0)=0$, $\Psi(2\Omega)=0$); в рассматриваемом случае белого шума $\xi(t)$ получим

$$p(\varphi) = {}^1/_2 \pi^{-2} \exp({}^1/_2 \pi q)\,[I_{iq}(v) I_{-iq}(v)]^{-1} \exp(2q\varphi + v\cos 2\varphi) \int\limits_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \exp(-2q\psi v \cos 2\psi)\, d\psi \tag{6}$$

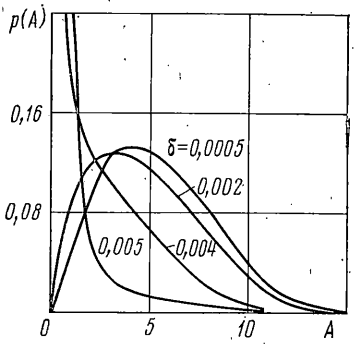
$$\langle\cos 2\varphi\rangle = {}^1/_2 \left[\frac{I_{iq+1}(v)}{I_{iq}(v)} + \frac{I_{-iq+1}(v)}{I_{-iq}(v)}\right] \tag{7}$$

где I — модифицированная функция Бесселя, $q={}^4/_3(\Delta/\Omega^2 D)$, $v={}^2/_3(r/\Omega D)$.

2. На фиг. 1 сплошными кривыми представлены результаты вычислений по формулам (5), (7) при $\delta=\Delta=10^{-3}$, $\Omega=1$ (кривые *1* соответствуют $D=0.09$, а кривые *2* — $D=0.025$). Штриховые кривые на фиг. 1 представляют результаты для возбуждения, задававшегося в [2, 5] (при таких же $\Phi(2\Omega)$). Видно, какое сильное влияние может оказывать низкочастотная компонента случайного процесса $\xi(t)$ на интенсивность параметрически

возбужденных колебаний. Как и следовало ожидать, это влияние тем сильнее, чем выше относительное влияние периодической компоненты параметрического возбуждения (большие r); при $r=0$ (чисто случайное возбуждение) низкочастотная компонента процесса $\xi(t)$ вообще не влияет на амплитуду колебаний (это вытекает и непосредственно из (2), (3)).

Последний вывод относится к сравнительному влиянию низкочастотных компонент $\xi(t)$ и компонент с частотами $\omega\approx2\Omega$ (при малых интенсивностях случайных возмущений $\xi(t)$ величина $\gamma\langle A^2\rangle$ определяется в первую очередь периодическим возбуждением, а влияние $\xi(t)$ вообще становится незначительным).



Фиг. 3

На фиг. 2 приведены графики зависимостей $\gamma\langle A^2\rangle$ от Δ при $\delta=0.002$, $r=0.03$, $\Omega=1$, $D=2\pi\Phi(2\Omega)=0.025$. Здесь также видно, как низкочастотные флуктуации собственной частоты приводят к ослаблению влияния периодического параметрического возбуждения: в случае $\Phi(0)=$ $=\Phi(2\Omega)$ (кривая *1*) значения $\langle A^2\rangle$ оказались меньшими, чем при $\Phi(0)=0$ (кривая *2*), причем они весьма медленно уменьшаются по мере возрастания расстройки Δ.

На фиг. 1, 2 также представлены результаты моделирования, полученные прямым численным интегрированием уравнения (1) на ЭЦВМ ЕС-1040 (отмечены светлыми точками). Процесс $\xi(t)$ вводился непосредственно с датчика случайных чисел без какой бы то ни было предварительной фильтрации, т. е. это был процесс типа белого шума. Видно, что значения $\gamma\langle A^2\rangle$, полученные моделированием, хорошо совпали с соответствующими аналитическими результатами для случая возбуждения с $\Phi(0)=\Phi(2\Omega)$.

На фиг. 3 приведены графики плотностей вероятности амплитуды $p(A)$, полученные численным моделированием при $\Omega=1$, $r=0.03$, $\Delta=0.001$, $\gamma=0.000125$, $D=0.025$. Из графиков видно, что качественный характер плотностей вероятности амплитуды оказывается таким же, как и при отсутствии периодической компоненты параметрического возбуждения [2]: при малых $\delta_*-\delta$ функция $p(A)$ — монотонно убывающая, тогда как при достаточном удалении от границы области устойчивости линейной ($\gamma=0$) системы появляется некоторая преобладающая амплитуда колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lin Y. K., Fujimori Y., Ariaratnam S. T.* Rotor blade stability in turbulent flows.— AIAA Journal, 1979, v. 17, t. 1, No. 6, p. 545; pt 2, No. 7, p. 673.
2. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 558 с.
3. *Хасьминский Р. З.* Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью.— Теория вероятностей и ее применения, 1966, т. 11, № 3, с. 444.
4. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Усреднение в стохастических системах.— Укр. матем. ж., 1971, т. 23, № 3, с. 318.
5. *Стратонович Р. Л., Романовский Ю. М.* Одновременное параметрическое воздействие гармонической и случайной силы на колебательные системы.— Научн. докл. высшей школы. Физ.-матем. науки, 1958, № 4, с. 161.

Москва – Берлин

Поступила в редакцию 18.XII.1979