

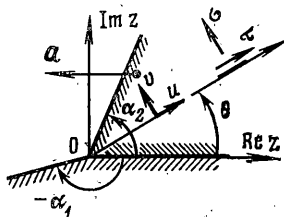
УДК 539.3.01

ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ
УГЛОВ УПРУГО КОНТАКТИРУЮЩИХ ПЛОСКИХ КЛИНЬЕВ
ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

ДЫХНОВ А. Е.

Решения уравнений плоской теории упругости в окрестности угла изучались в работах [1-3], особенности пространственного контакта клиньев со сцеплением — в [4]. В публикуемой работе рассматриваются особенности плоской задачи о контакте двух клиньев вдоль одной из сторон при наличии трения. В частном случае принятая схема соответствует взаимодействию режущего инструмента с обрабатываемым материалом при малых толщинах срезаемого слоя. Предсказываемое теорией наличие предельных передних углов у режущего клина подтверждается экспериментально.

1. Совместим вершины углов клиньев с началом координат комплексной плоскости $z=r \exp(i\theta)$. Воспользуемся комплексным представлением Колосова — Мусхелишвили в полярных координатах [5, с. 132]:



$$\sigma + i\tau = \overline{\Phi(z)} + \Phi(z) + (\overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z)) \exp(2i\theta) \quad (1)$$

$$2G \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \kappa \overline{\Phi(z)} - \Phi(z) - (\overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z)) \exp(2i\theta)$$

Здесь σ , τ — нормальное и касательное напряжения, действующие на площадку, расположенную вдоль луча $\theta = \text{const}$ (фигура), u , v — смещения вдоль координатных линий r и θ , G , κ — постоянные упругости.

Пусть k свободным от контакта сторонам приложены ограниченные в окрестности углов исчезающие на бесконечности усилия с конечным главным вектором, а поверхность клиньев имеет малые отклонения от идеальной, не нарушающие однако сплошность контакта.

Краевые условия запишутся в следующем виде:

$$\sigma_1 + i\tau_1 = \zeta_1(r) \text{ при } \theta = -\alpha_1; \quad \sigma_2 + i\tau_2 = \zeta_2(r) \text{ при } \theta = \alpha_2 \quad (2)$$

$$\sigma_1 + i\tau_1 = \sigma_2 + i\tau_2, \quad \tau_1 = k\sigma_1, \quad \frac{\partial v_1}{\partial r} = \frac{\partial v_2}{\partial r} + f_2'(r) - f_1'(r) \text{ при } \theta = 0$$

Здесь и далее индексы 1, 2 указывают на принадлежность к нижнему (верхнему) клину на фигуре, $f_1(r)$, $f_2(r)$ — правые части явных уравнений контактирующих границ до деформации, $k = \text{arctg } \delta$ — коэффициент трения, который считается положительным при относительном движении верхнего тела на фигуре в направлении вектора a , $|\delta| < \pi/2$.

Функции $\zeta_1(r)$ и $\zeta_2(r)$, задающие напряжения на несоприкасающихся сторонах углов, а также $f_1'(r)$ и $f_2'(r)$ предполагаем ограниченными в окрестности нуля и интегрируемыми по модулю в интервале $(0, \infty)$, так, что изображения по Меллину этих функций голоморфны в полосе

$$0 < \text{Re}(p) < 1 \quad (3)$$

При перечисленных условиях напряжения и функции $|\Phi(z)|$, $|\Psi(z)|$ убывают при больших r не медленнее $r^{-1} \text{const}$, а в окрестности начала координат не превосходят $r^{-1+\varepsilon} \text{const}$, где $\varepsilon > 0$ [2, с. 126]. Удобно преобразование Меллина для $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ выразить через следующие интегралы:

$$\int_0^{\infty} \Phi(z) z^{-p} dz = A(p), \quad \int_0^{\infty} \Psi(z) z^{-p} dz = B(p) \quad (4)$$

$$0 < \text{Re}(p) < \varepsilon \quad (5)$$

Линия интегрирования, идущая из начала координат в бесконечность, может внутри угла выбираться произвольно в силу голоморфности подынтегральных функций (у z^{-p} берется подходящая ветвь). Изображения по Меллину (с заменой p на $1-p$) при фиксированном θ для функций $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ будут соответственно: $A(p) \exp(i\theta(p-1))$, $\bar{A}(p) \exp(-i\theta(p-1))$, $B(p) \exp(i\theta(p-1))$, где $\bar{A}(p) = \overline{A(\bar{p})}$.

Преобразование, обратное интегральному преобразованию (4), запишется так:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L A(p) z^{p-1} dp, \quad \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L B(p) z^{p-1} dp \quad (6)$$

где L — прямая, расположенная в полосе (5) и направленная в сторону увеличения $\text{Im}(p)$.

Применяя к равенствам (4) преобразование Меллина при $\theta = \text{const}$ и интегрируя по частям слагаемое, соответствующее $\bar{z}\Phi'(z)$, получим

$$N + iT = \bar{A}(p) e^{-i\theta(p-1)} + A(p) p e^{i\theta(p-1)} + B(p) e^{i\theta(p+1)} \quad (7)$$

$$2G(U - iV) = \kappa \bar{A}(p) e^{-i\theta(p-1)} - A(p) p e^{i\theta(p-1)} + B(p) e^{i\theta(p+1)}$$

где $N(p, \theta)$, $T(p, \theta)$, $U(p, \theta)$, $V(p, \theta)$ — изображения для напряжений σ , τ и производных от смещений $\partial u/\partial r$, $\partial v/\partial r$.

Формулы (6), (7) позволяют легко находить точные решения краевых задач для одного или нескольких контактирующих клиньев с краевыми условиями, тип которых меняется при переходе от одной стороны угла к другой. В частности, применяя преобразование Меллина к краевым условиям (2) и используя (7), приходим к линейной системе уравнений, относительно изображений $A_1(p)$, $\bar{A}_1(p)$, $A_2(p)$, $\bar{A}_2(p)$, $B_1(p)$, $\bar{B}_1(p)$, $B_2(p)$, $\bar{B}_2(p)$, через которые выражаются напряжения и деформации по формулам (1) с использованием (6).

2. Ограничимся исследованием особенностей в окрестности угловых точек. При этом можно отбросить все предположения о поведении функций при больших r и вычислять интеграл Меллина лишь в интервале $(0, 1)$, так как только эта часть изображения используется при обратном преобразовании для $r < 1$, что является следствием формул обобщенного преобразования Фурье [6, с. 11]. При надлежащем выборе масштаба можно рассматривать сколь угодно малые окрестности начала координат, отвлекаясь от формы тел и граничных условий вне этих окрестностей.

Для исследования особенностей представляет интерес определитель системы

$$\begin{aligned} \Delta(p, G_1, G_2, \kappa_1, \kappa_2, \alpha_1, \alpha_2, \delta) = \\ = 2 \sin \delta (1/G_2 - 1/G_1) (\sin^2 p\alpha_1 - p^2 \sin^2 \alpha_1) (\sin^2 p\alpha_2 - p^2 \sin^2 \alpha_2) + \\ + \frac{\kappa_1 + 1}{G_1} [\sin p\alpha_1 \cos(p\alpha_1 - \delta) + p \sin \alpha_1 \cos(\alpha_1 - \delta)] (\sin^2 p\alpha_2 - p^2 \sin^2 \alpha_2) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\kappa_2 + 1}{G_2} [\sin p\alpha_2 \cos(p\alpha_2 + \delta) + p \sin \alpha_2 \cos(\alpha_2 + \delta)] (\sin^2 p\alpha_1 - p^2 \sin^2 \alpha_1)$$

Из условий, наложенных ранее на $\xi_1(r)$, $\xi_2(r)$, $f_1'(r)$, $f_2'(r)$, следует, что в полосу (3) могут попасть только особые точки p_* функций $A(p)$ и $B(p)$, совпадающие с корнями определителя Δ . При этом в силу (4) комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ (а с ними и напряжения) будут иметь

Таблица 1

α_2	$\delta = -0,3$	$\delta = 0$	$\delta = 0,3$	$\delta = -0,3$	$\delta = 0$	$\delta = 0,3$
	$\alpha_1 = \pi$					
$\pi/3$	—	—	0,945	—	—	—
$\pi/2$	0,733	0,656	0,591	0,990	0,774	0,634
$2\pi/3$	0,547	0,533	0,519	0,613	0,559	0,511
$5\pi/6$	0,496	0,503	0,510	0,517	0,506	0,496
π	0,487	0,500	0,513	0,500	0,500	0,500
	$\alpha_1 = \pi/2$					
$\pi/2$	0,847	—	—	—	—	—
$2\pi/3$	0,716	0,907	—	0,728	0,822	0,931
$5\pi/6$	0,678	0,886	—	0,650	0,779	0,949
π	0,670	0,883	—	0,634	0,774	0,990
$7\pi/6$	0,685	0,749	0,745	0,651	0,731	0,729

в окрестности нуля бесконечные особенности вида $z^{p-1} (\ln z)^{n-1}$ ($n=1, \dots, m$), где m — порядок полюса p_* функций $A(p)$ и $B(p)$.

Как показывает численный анализ, корень p_* , лежащий в полосе (3), является действительным и простым, если ни один из углов не превосходит π . В частности, при $\kappa_1 = \kappa_2 = 1,8$, $G_1 = 0,37G_2$, $\alpha_1 = \pi/2$, $\delta = -0,3$ двойной корень $p_* = 0,70148$ соответствует лишь углу $\alpha_2 = 1,1797294\pi$. При больших значениях α_2 корни становятся комплексными, например, для $\alpha_2 = 4\pi/3$ — пара корней $p_* = 0,636 \pm 0,013i$.

В таблице приведены наименьшие положительные действительные корни из интервала $(0, 1)$ при $\kappa_1 = \kappa_2 = 1,8$ (первые три столбца значений корней соответствуют $G_1 = 0,37G_2$, а последние три — $G_1 = G_2$).

Случай $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$ отвечает контакту с трением двух тел, близких к полуплоскостям, рассмотренному в [7, с. 156]. Для $\alpha_1 = \pi$, $G_2 = \infty$ принятая схема соответствует окрестности угловой точки при контакте жесткого штампа с полуплоскостью, при этом с увеличением коэффициента трения степень сингулярности $(1-p_*)$ уменьшается¹.

Из табл. 1 следует, что при некоторых параметрах корни не попадают в полосу (3) и напряжения в окрестности углов остаются ограниченными, даже исчезают при $r \rightarrow 0$. Из условия повышенной кратности корня $p=1$ можно вывести уравнение границы области параметров, в которой напряжения в окрестности углов конечны (точнее, это уравнение поверхности, разделяющей области с различным числом действительных корней в интервале $(0, 1)$):

$$\frac{\kappa_1 + 1}{G_1} \cos(\alpha_1 - \delta) (\alpha_2 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2) + \frac{\kappa_2 + 1}{G_2} \cos(\alpha_2 + \delta) (\alpha_1 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1) = 0 \quad (8)$$

¹ Это утверждение находится в противоречии с рис. 26 [8, с. 142], для исправления которого необходимо поменять на рисунке направление касательного усилия T .

Уравнение (8) находит следующее практическое применение. Значение $\alpha_1 = \pi$ (фигура) соответствует взаимодействию режущего инструмента с обрабатываемым материалом при весьма тонких срезаемых слоях, много меньших длины контакта под задней гранью. Как известно, бесконечность напряжений в окрестности угловой точки означает практически мгновенное возникновение там зоны пластических деформаций, облегчающей последующее резание. Если же напряжения конечны и исчезают в окрестности вершины, то для образования зоны пластических деформаций потребуется большее усилие и процесс резания будет неустойчивым. Та-

Таблица 2

	$G_1 \cdot 10^{-4}$, Н/мм ²	κ_1	k	q , Н/мм	γ_*	γ_*°
1	7,7	1,8	0,17	50	20...25	20
2	2,6	1,64	0,25	20	35...40	31
3	2,6	1,64	0,8	20	50...55	45
4	3,7	1,64	0,18	80	25...30	26
5	0,112	1,44	0,2	5	60...70	62

ким образом, предпочтение следует отдать инструментам, для которых теория упругости дает бесконечные напряжения в окрестности угловой точки. Формальным условием последнего является знакоположительность левой части уравнения (8).

Для проверки производились опыты по определению врезания резцов из быстрорежущей стали Р18 ($G_2 = 8,7 \cdot 10^4$ Н/мм², $\kappa_2 = 1,92$) в пластины из различных материалов: 1 — сталь 20, 2 — алюминий, 3 — алюминий без смазки, 4 — латунь, 5 — оргстекло). Результаты этих исследований приводятся в табл. 2.

Ширина резца и пластин была одинаковой — 3,5 мм, задние углы $0,5^\circ, \dots, 1^\circ$; для смазки применялось машинное масло. Углы при вершинах резцов изменялись через 5° . Поверхность резцов доводилась алмазной пастой, радиус округления вершины не превышал 15 мкм. Удельная нагрузка q в десятки раз превосходила усилие «минимального» среза (см. [9]) резцом с нулевым передним углом. Длина контакта под задней гранью составляла $0,3, \dots, 1$ мм.

Критический передний угол $\gamma_* = (\pi/2 - \alpha_2)$ (в град.) определялся по отсутствию или по неустойчивости резания (γ_*° — расчетное значение критического угла).

Результаты свидетельствуют об удовлетворительном согласовании между расчетными и экспериментальными значениями критических углов. Некоторые расхождения могут быть объяснены отличием коэффициента трения в окрестности вершины резца от усредненного коэффициента трения, измеряемого в эксперименте, а также погрешностями при определении остальных параметров формулы (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension.— J. Appl. Mech., 1952, v. 19, No. 4, p. 526–528.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 401 с.
3. Каландия А. И. Замечания об особенностях упругих решений вблизи углов.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 1, с. 132–135.
4. Аксентян О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 178–186.

5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
6. Тигчари Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л.: Гостехиздат, 1948. 479 с.
7. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
8. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
9. Матвеев В. В., Мирнов И. Я. Силы резания при минимальных толщинах срезаемого слоя титановых сплавов и сталей.— Вестник машиностроения, 1970, № 8, с. 72—74.

Челябинск

Поступила в редакцию
26.IX.1978