

УДК 539.3

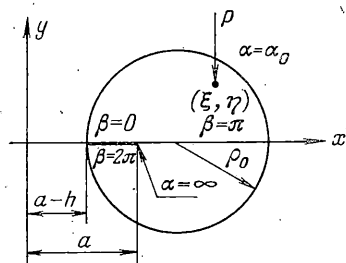
О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПЛАСТИН

СУСЛОВА И. Б.

При помощи биполярной системы координат и метода конечных интегральных преобразований получено в виде комбинации элементарных функций выражение функции Грина задачи изгиба круглой пластины, закрепленной по окружности и свободно-опертой по некоторому отрезку радиуса. Исследуется характер решения для различных соотношений длины опертого отрезка и радиуса пластины.

1. Рассмотрим круглую плиту радиуса ρ_0 , закрепленную по контуру и подпертую на участке радиуса длины h (фиг. 1). Изгиб происходит под действием силы P , приложенной в произвольной точке пластины.

В биполярных координатах (α, β) с полюсом $(\alpha = \infty)$ в вершине опертого отрезка краевая задача, определяющая прогиб пластины $W = W(\alpha, \beta)$, имеет вид [1]:



Фиг. 1

$$(\partial^4/\partial\alpha^4 + 2\partial^4/\partial\alpha^2\partial\beta^2 + \partial^4/\partial\beta^4 - 2\partial^2/\partial\alpha^2 + 2\partial^2/\partial\beta^2 + 1)gW = P\delta(\alpha - \xi)\delta(\beta - \eta)/(Dg) \quad (1.1)$$

$$gW = 0, \quad \partial(gW)/\partial\alpha = 0 \quad (\alpha = \alpha_0) \quad (1.2)$$

$$gW = 0, \quad \partial^2(gW)/\partial\beta^2 = 0 \quad (\beta = 0, 2\pi) \quad (1.3)$$

$$g = g(\alpha, \beta) = a^{-1}(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)$$

Здесь D — изгибная жесткость, принимаемая постоянной, $\alpha = \alpha_0$ — координатная линия, соответствующая в биполярной системе координат окружности, $a = \rho_0 \operatorname{sh} \alpha_0$ — расстояние от точки $x = 0, y = 0$ до точки $\alpha = \infty$ (фиг. 1), ξ, η — биполярные координаты точки приложения силы.

Из требования конечности упругой энергии вытекает, что изгибающий момент $M(\alpha, \beta)$ имеет порядок $\exp^{-1/2\alpha}$ при $\alpha \rightarrow \infty$, откуда следует, что $gW(\alpha, \beta) = O[\exp(-1/2\alpha)]$, $\alpha \rightarrow \infty$.

Применяя метод конечных интегральных преобразований [2], представим решение задачи (1.1)–(1.3) в форме

$$gW = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\alpha) \sin\left(\frac{1}{2}n\beta\right), \quad W_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} gW(\alpha, \beta) \sin\left(\frac{1}{2}n\beta\right) d\beta \quad (1.4)$$

При этом трансформанта $W_n(\alpha)$ находится из неоднородной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка:

$$W_n'''' - 2\left(\frac{n^2}{4} + 1\right)W_n'' + \left(\frac{n^2}{4} - 1\right)^2 W_n = \frac{P\delta(\alpha - \xi) \sin^{1/2} n\eta}{\pi Dg(\alpha, \eta)} \quad (1.5)$$

$$W_n(\alpha_0) = W_n'(\alpha_0) = 0, \quad W_n(\alpha) \sim \exp(-1/2\alpha), \quad \alpha \rightarrow \infty \quad (1.6)$$

Общий интеграл уравнения (1.5) будет определяться выражениями

$$\begin{aligned} W_1 &= c_{11} \exp(\sqrt[3]{2}\alpha) + c_{21} \exp(-\sqrt[3]{2}\alpha) + c_{31} \exp(-\sqrt[4]{2}\alpha) + c_{41} \exp(\sqrt[4]{2}\alpha) \\ W_2 &= c_{12} \exp(2\alpha) + c_{22} \exp(-2\alpha) + \alpha c_{32} + c_{42} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} W_n &= c_{1n} \exp(n\alpha) + c_{2n} \exp(-n\alpha) + c_{3n} \exp(\mu\alpha) + c_{4n} \exp(-\mu\alpha) \quad (n \geq 3) \\ v &= \sqrt[4]{2}n + 1, \quad \mu = \sqrt[4]{2}n - 1 \end{aligned}$$

Используя стандартную методику построения функции Грина $G_n(\alpha, \xi)$ краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения (см., например, [3]), находим:

$$\begin{aligned} G_1(\alpha, \xi) &= u_{11}(\alpha) u_{21}(\xi) + u_{31}(\alpha) u_{41}(\xi) \quad (\alpha < \xi) \\ G_1(\alpha, \xi) &= u_{11}(\xi) u_{21}(\alpha) + u_{31}(\xi) u_{41}(\alpha) \quad (\alpha > \xi) \\ u_{11}(\alpha) &= \exp \sqrt[3]{2}\alpha + \sqrt[4]{2} \exp(2\alpha_0 - \sqrt[3]{2}\alpha) - \sqrt[3]{2} \exp(\alpha_0 + \sqrt[4]{2}\alpha), \quad u_{21} = \exp(-\sqrt[3]{2}\alpha) \\ u_{31}(\alpha) &= \exp(-\sqrt[4]{2}\alpha) - \sqrt[4]{2} \exp(\sqrt[4]{2}\alpha - \alpha_0) - \sqrt[4]{2} \exp(\alpha_0 - \sqrt[3]{2}\alpha), \quad u_{41} = \exp(-\sqrt[4]{2}\alpha) \\ 4G_2(\alpha, \xi) &= (\alpha - \alpha_0) - \text{sh}(\alpha - \alpha_0) \exp(\alpha_0 - \alpha) - \\ &\quad - \text{sh}^2(\alpha - \alpha_0) \exp[2(\alpha_0 - \xi)] \quad (\alpha < \xi) \\ 4G_2(\alpha, \xi) &= (\xi - \alpha_0) - \text{sh}(\xi - \alpha_0) \exp(\alpha_0 - \xi) - \\ &\quad - \text{sh}^2(\xi - \alpha_0) \exp[2(\alpha_0 - \alpha)] \quad (\alpha > \xi) \\ G_n(\alpha, \xi) &= u_{1n}(\alpha) u_{2n}(\xi) + u_{3n}(\alpha) u_{4n}(\xi) \quad (\alpha < \xi) \\ G_n(\alpha, \xi) &= u_{1n}(\xi) u_{2n}(\alpha) + u_{3n}(\xi) u_{4n}(\alpha) \quad (\alpha > \xi) \\ u_{1n} &= \{1 + \sqrt[4]{2}n \exp[2v(\alpha_0 - \alpha)] - v \exp[n(\alpha_0 - \alpha)]\} \exp v\alpha \\ u_{2n} &= -\exp(-v\alpha) / 4nv \\ u_{3n} &= \{1 - \sqrt[4]{2}n \exp[2\mu(\alpha_0 - \alpha)] + \mu \exp[n(\alpha_0 - \alpha)]\} \exp \mu\alpha \\ u_{4n} &= \exp(-\mu\alpha) / 4n\mu \end{aligned} \quad (1.8)$$

При этом трансформанта будет равна

$$W_n(\alpha) = P \sin(\sqrt[4]{2}n\eta) G_n(\alpha, \xi) / \pi Dg(\xi, \eta) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в (1.4), получаем выражение для функции Грина данной смешанной задачи изгиба пластины в виде следующего равномерно сходящегося ряда:

$$G(\alpha, \beta, \xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(\alpha, \xi) \left\{ \cos \left[\frac{1}{2} n(\beta - \eta) \right] - \cos \left[\frac{1}{2} n(\beta + \eta) \right] \right\} \quad (1.10)$$

2. Ряд (1.10) может быть просуммирован, и его сумма представляет собой комбинацию элементарных функций. Как видно из (1.8), ряд (1.10) можно преобразовать к конечному числу сумм вида

$$\sum_k \frac{\exp(-kx) \cos(ky)}{k+m}, \quad \sum_k \frac{\exp(-kx) \sin(ky)}{k+m}, \quad m=0, \pm 2$$

Используя соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-kx) \cos(ky)}{k} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 (\text{ch } x - \cos y)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-kx) \sin(ky)}{k} = \operatorname{arctg} \left[\frac{\exp(-x) \sin y}{1 - \exp(-x) \cos y} \right]$$

и выделяя члены ряда, соответствующие $k=1, 2$, после несложных, но весьма громоздких выкладок, которые здесь не приводятся, приходим к следующему выражению для прогиба круглой пластины со смешанными граничными условиями под действием сосредоточенной силы:

$$\begin{aligned} W(\alpha, \beta, \xi, \eta) = & \frac{P}{8\pi g(\alpha, \beta) g(\xi, \eta)} \left\{ [\operatorname{ch}(\xi - \alpha) - \right. \\ & \left. - \cos(\beta - \eta)] \ln \frac{\operatorname{ch}^{1/2}(\xi - \alpha) - \cos^{1/2}(\beta - \eta)}{\operatorname{ch}^{1/2}\gamma - \cos^{1/2}(\beta - \eta)} - \right. \\ & \left. - [\operatorname{ch}(\xi - \alpha) - \cos(\beta + \eta)] \ln \frac{\operatorname{ch}^{1/2}(\xi - \alpha) - \cos^{1/2}(\beta + \eta)}{\operatorname{ch}^{1/2}\gamma - \cos^{1/2}(\beta + \eta)} + \right. \\ & \left. + 8[\exp(\alpha_0 - \alpha) + \exp(\alpha_0 - \xi) - \exp \gamma] \operatorname{sh}^{1/2}(\alpha - \alpha_0) \times \right. \\ & \left. \times \operatorname{sh}^{1/2}(\xi - \alpha_0) \sin^{1/2}\beta \sin^{1/2}\eta \right\}, \quad \gamma = \xi + \alpha - 2\alpha_0 \\ & \alpha_0 \leq \alpha < \infty \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi \end{aligned} \quad (2.1)$$

Решение задачи для пластины под произвольной нагрузкой $Q(\alpha, \beta)$ получается интегрированием функции Грина (2.1) по области действия нагрузки, именно:

$$W(\alpha, \beta) = \int_{\alpha_0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{W(\alpha, \beta, \xi, \eta) Q(\xi, \eta) d\xi d\eta}{g^2(\xi, \eta)} \quad (2.2)$$

Рассмотрим наиболее интересные с точки зрения приложений полученного решения характеристики напряженно-деформированного состояния пластины.

Значение прогиба в точке приложения силы определяется выражением

$$\begin{aligned} W(\xi, \eta) = & \frac{P}{8\pi D g^2(\xi, \eta)} \left\{ (\operatorname{ch} 2\eta - 1) \ln \frac{1 - \cos \eta}{\operatorname{ch}(\xi - \alpha_0) - \cos \eta} + \right. \\ & \left. + 8\{2 \exp(\alpha_0 - \xi) - \exp[2(\alpha_0 - \xi)]\} \operatorname{sh}^2{}^{1/2}(\xi - \alpha_0) \sin^2{}^{1/2}\eta \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Изгибающий момент в заделке (на контуре пластины при $\alpha = \alpha_0$) равен

$$\begin{aligned} \frac{M}{P} = & \frac{g(\alpha_0, \beta)}{2\pi g(\xi, \eta)} \left\{ 2 \exp \left[\frac{1}{2}(\alpha_0 - \xi) \right] - \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2}(\xi - \alpha_0) \right] \times \right. \\ & \left. \times [\operatorname{ch}^{1/2}(\xi - \alpha_0) - \cos^{1/2}(\beta - \eta)]^{-1} [\operatorname{ch}^{1/2}(\xi - \alpha_0) - \cos^{1/2}(\beta + \eta)]^{-1} \right\} \times \\ & \times \operatorname{sh}^2{}^{1/2}(\xi - \alpha_0) [\cos^{1/2}(\beta - \eta) - \cos^{1/2}(\beta + \eta)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

На фиг. 2 приведено распределение момента по контуру пластины для случая, когда сила приложена в центре (кривая 1), а также зависимость значения момента в точке $\beta = \pi$ контура, лежащей на оси симметрии, от координаты η точки приложения силы при $\xi = 2\alpha_0$ (кривая 2). Характерно, что изгибающий момент меняет знак при изменении β от 0 до π , а его абсолютная величина достигает наибольшего значения при $\beta = \pi$. Это значение является максимальным и среди тех, которые получаются при указанном изменении координаты η .

Главное слагаемое разложения изгибающего момента в окрестности вершины подпертого участка ($\rho \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \infty$) имеет вид

$$\frac{M_0}{P} = - \frac{3a^{1/2} \operatorname{sh}^{1/2}(\xi - \alpha_0) \exp^{1/2}(\alpha_0 - \xi)}{4\pi(2\rho)^{1/2}(\operatorname{ch} \xi + \cos \eta)} \left\{ 2 \operatorname{sh} \left[\frac{1}{2}(\xi - \alpha_0) \right] \times \right. \\ \left. \times \sin^{1/2} \eta \sin^{1/2} \varphi \exp^{1/2} \alpha_0 +^{1/3} [1 - \operatorname{ch}^{1/2}(\xi - \alpha_0) \exp^{3/2}(\alpha_0 - \xi)] \times \right. \\ \left. \times \sin^{3/2} \eta \sin^{3/2} \varphi \exp^{1/2} \xi \right\} \quad (2.5)$$

где ρ, φ — локальные полярные координаты.

Выражение (2.5) принимает наибольшее значение при $\varphi = \pi$, т. е. в направлении оси симметрии пластины. Тогда, в соответствии с [4], коэффициент интенсивности момента определяется формулой

$$k_M = \frac{3a^{1/2} \operatorname{sh}^{1/2}(\xi - \alpha_0) \exp^{1/2}(\alpha_0 - \xi)}{4\pi(2\rho_0)^{1/2}(\operatorname{ch} \xi + \cos \eta)} \times \\ \times \left\{ 2 \operatorname{sh}^{1/2}(\xi - \alpha_0) \sin^{1/2} \eta \exp^{1/2} \alpha_0 - \right. \\ \left. -^{1/3} [1 - \operatorname{ch}^{1/2}(\xi - \alpha_0) \exp^{3/2}(\alpha_0 - \xi)] \times \right. \\ \left. \times \sin^{1/2} \eta \exp^{1/2} \xi \right\}$$

Для случая, когда сила приложена в центре пластины, зависимость величины k_M от размеров подпертого участка, т. е. от величины отношения h/ρ_0 , имеет вид

$$k_M = \frac{3}{8\pi\sqrt{2}} \left(2 - \frac{h}{\rho_0} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{h^2}{\rho_0^2} \right) \sqrt{\frac{h(2-h/\rho_0)}{2\rho_0(1-h/\rho_0)}}$$

Как и следовало ожидать, коэффициент интенсивности момента монотонно убывает с уменьшением отношения h/ρ и стремится к нулю при $h/\rho \rightarrow 0$ как $(h/\rho)^{1/2}$.

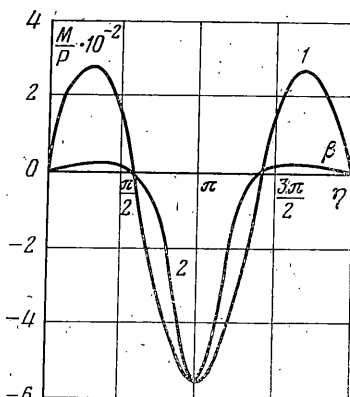
Автор глубоко признателен А. С. Зильберглейту и Н. Н. Лебедеву за помощь и полезные обсуждения полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. М.—Л.: Гостехиздат, 1950. 232 с.
2. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 728 с.
3. Наймарк М. А. Ливейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
4. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
4.XII.1979



Фиг. 2