МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1981

УДК 531.36

К РЕГУЛЯРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ

ЧЕЛНОКОВ Ю. Н.

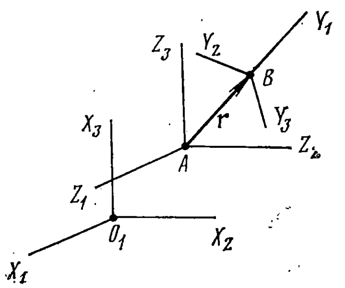
Указано регуляризующее преобразование уравнений пространственной задачи двух тел, обобщающее регуляризующее преобразование Кустаанхеймо – Штифеля. Дана кинематическая интерпретация этого преобразования. Выведены регулярные уравнения пространственной задачи двух тел, из которых регулярные уравнения Кустаанхеймо – Штифеля следуют как частные.

1. Дифференциальные уравнения движения тела B относительно центрального тела A имеют вид [1, 2]:

$$d^2z_i/dt^2+\mu r^{-3}z_i=p_i \quad (i=1,2,3) \tag{1.1}$$

Здесь z_1, z_2, z_3 — координаты центра масс тела B в системе координат $AZ_1Z_2Z_3(Z)$, оси которой параллельны одноименным осям инерциальной системы координат $O_1X_1X_2X_3(X)$, а начало находится в центре масс тела A (фиг. 1); p_1, p_2, p_3 — проекции вектора $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения на оси системы координат $Z(X)$; величина μ равна произведению постоянной тяготения на сумму масс тел A и B.

$$r^2=z_1^2+z_2^2+z_3^2 \tag{1.2}$$



Фиг. 1

Система трех дифференциальных уравнений (1.1) эквивалентна одному векторному

$$d^2\mathbf{r}/dt^2+\mu r^{-3}\mathbf{r}=\mathbf{p} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, определяющий положение центра масс тела B относительно системы координат Z.

Дифференцирование в уравнении (1.3) проведено в системе координат $Z(X)$.

Уравнения (1.1) (а также уравнение (1.3)) имеют особенность в начале системы координат Z (при соударении тел A и B). В связи с этим при изучении движения тела B вблизи центрального тела возникают значительные трудности. Существуют различные методы регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел, направленные на устранение указанных трудностей. Плодотворным является метод спинорной регуляризации [1]. В основе этого метода лежит регуляризующее преобразование Кустаанхеймо — Штифеля [1]:

$$\begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Vmatrix} \tag{1.4}$$

обобщающее преобразование Леви-Чивита для движения в плоскости и билинейное соотношение [1]:

$$u_4u_1'-u_3u_2'+u_2u_3'-u_1u_4'=0 \qquad (1.5)$$

где u_k ($k=1, 2, 3, 4$) — некоторые параметры, штрих означает дифференцирование по фиктивному времени t^*, связанному с реальным временем t формулами [1]:

$$\frac{d}{dt^*}=r\frac{d}{dt},\quad dt=rdt^*,\quad t=\int rdt^* \qquad (1.6)$$

Регулярные уравнения пространственной задачи двух тел, полученные методом спинорной регуляризации, имеют вид [1]:

$$\begin{gathered} u_k''+{}^1/_2hu_k={}^1/_2rq_k \quad (k=1, 2, 3, 4) \\ h'=-2(u_1'q_1+u_2'q_2+u_3'q_3+u_4'q_4),\quad t'=r \end{gathered} \qquad (1.7)$$

$$\begin{gathered} q_1=u_1p_1+u_2p_2+u_3p_3,\quad q_2=-u_2p_1+u_1p_2+u_4p_3 \\ q_3=-u_3p_1-u_4p_2+u_1p_3,\quad q_4=u_4p_1-u_3p_2+u_2p_3 \\ r=u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2 \end{gathered} \qquad (1.8)$$

В уравнениях (1.7) — h является кеплеровской энергией

$$h=\mu r^{-1}-{}^1/_2V^2,\quad V=|\mathbf{V}|=|d\mathbf{r}/dt|$$

штрих означает дифференцирование по фиктивному времени t^*; переменные u_k, h, t рассматриваются как неизвестные функции фиктивного времени t^*.

Покажем, что регуляризующее преобразование Кустаанхеймо — Штифеля (1.4) является частным случаем более общего преобразования и что это преобразование (1.4) и билинейное соотношение (1.5) имеют ясный кинематический смысл.

Введем в рассмотрение систему координат $BY_1Y_2Y_3(Y)$ с началом в центре масс тела B, движение которой относительно системы координат Z характеризуется мгновенным винтом скоростей [3]:

$$\mathbf{U}\rightleftarrows\boldsymbol{\omega}+s\mathbf{V}=\boldsymbol{\omega}+sd\mathbf{r}/dt \qquad (1.9)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор абсолютной угловой скорости вращения системы координат Y относительно X (а также относительно Z), $\mathbf{V}=d\mathbf{r}/dt$ — вектор скорости центра масс тела B относительно системы координат Z, s — символ Клиффорда: $s^2=0$; $\rightleftarrows$ — знак соответствия.

Конечное перемещение системы координат Y относительно системы координат Z будем характеризовать дуальным вектором конечного винтового перемещения Θ [3]. Винту Θ соответствуют параметры λ_j, λ_j^0 ($j=0, 1, 2, 3$) винтового движения системы координат Y относительно Z [4, 5], комплексные комбинации $\lambda_j+s\lambda_j^0$ которых являются дуальными параметрами Родрига — Гамильтона винтового перемещения Θ. Проекции z_i вектора $\mathbf{r}$ на оси системы координат $Z(X)$ определяются через параметры λ_j, λ_j^0 в соответствии с матричным соотношением [4]:

$$\begin{Vmatrix} 0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Vmatrix} = 2\begin{Vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \lambda_0^0 \\ \lambda_1^0 \\ \lambda_2^0 \\ \lambda_3^0 \end{Vmatrix} = 2n^T \begin{Vmatrix} \lambda_0^0 \\ \lambda_1^0 \\ \lambda_2^0 \\ \lambda_3^0 \end{Vmatrix} \qquad (1.10)$$

Здесь T — символ транспонирования. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что регуляризующее преобразование (1.4) получается из преобразования (1.10), если положить в нем

$$\lambda_0=r^{-1/2}u_4,\ \lambda_i=-r^{-1/2}u_i\ \ (i=1,2,3) \qquad (1.11)$$

$$\lambda_0^\circ={}^1/_2r^{1/2}u_1,\ \lambda_1^\circ={}^1/_2r^{1/2}u_4,\ \lambda_2^\circ=-{}^1/_2r^{1/2}u_3,\ \lambda_3^\circ={}^1/_2r^{1/2}u_2 \qquad (1.12)$$

$$r=u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=2(\lambda_0^{\circ2}+\lambda_1^{\circ2}+\lambda_2^{\circ2}+\lambda_3^{\circ2})^{1/2}$$

т. е. когда

$$\lambda_0^\circ=-{}^1/_2r\lambda_1,\quad \lambda_1^\circ={}^1/_2r\lambda_0,\quad \lambda_2^\circ={}^1/_2r\lambda_3,\quad \lambda_3^\circ=-{}^1/_2r\lambda_2 \qquad (1.13)$$

Это говорит о том, что регуляризующее преобразование Кустаанхеймо — Штифеля заключается по сути в переходе от декартовых координат z_1, z_2, z_3 центра масс тела B к параметрам некоторого винтового движения системы координат Y относительно Z. Рассмотрим это винтовое движение. Проекции y_1, y_2, y_3 вектора $\mathbf{r}$ на оси координатного трехгранника Y выражаются через параметры λ_j, λ_j° его винтового движения следующим образом [4]:

$$\begin{Vmatrix}0\\y_1\\y_2\\y_3\end{Vmatrix}=2\begin{Vmatrix}\lambda_0^0 & -\lambda_1^0 & -\lambda_2^0 & -\lambda_3^0\\ \lambda_1^0 & \lambda_0^0 & \lambda_3^0 & -\lambda_2^0\\ \lambda_2^0 & -\lambda_3^0 & \lambda_0^0 & \lambda_1^0\\ \lambda_3^0 & \lambda_2^0 & -\lambda_1^0 & \lambda_0^0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\lambda_0\\-\lambda_1\\-\lambda_2\\-\lambda_3\end{Vmatrix}=2n^0\begin{Vmatrix}\lambda_0\\-\lambda_1\\-\lambda_2\\-\lambda_3\end{Vmatrix} \qquad (1.14)$$

С учетом связей (1.13) из матричного равенства (1.14) находим $\|0\ y_1\ y_2\ y_3\|^T=\|0\ r\ 0\ 0\|^T$. Следовательно, ось BY_1 системы координат Y в рассматриваемом случае все время направлена по вектору $\mathbf{r}$.

Теперь можно выяснить, чему равны проекции ω_1, ω_2, ω_3 вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости трехгранника Y на его же оси. Вектор скорости центра масс тела B в системе координат Y:

$$\mathbf{V}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_1+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \qquad (1.15)$$

где локальная производная $(d\mathbf{r}/dt)_1=\mathbf{e}_1'dr/dt$, а $\mathbf{r}=r\mathbf{e}_1'$ ($\mathbf{e}_1'$ — орт оси BY_1).

Из уравнения (1.15) получаем

$$\omega_2=-r^{-1}V_3,\ \omega_3=r^{-1}V_2 \qquad (1.16)$$

Здесь V_2, V_3 — проекции вектора $\mathbf{V}$ на оси BY_2, BY_3.

Проекция ω_1 вектора $\boldsymbol{\omega}$ на ось BY_1 остается пока неопределенной. Для ее нахождения используем кинематические уравнения сферического движения системы координат Y, связывающие вещественные параметры Родрига — Гамильтона λ_j и их производные с проекциями ω_i [6—8]. После подстановки в эти уравнения равенств (1.13), справедливых в случае Кустаанхеймо — Штифеля, имеем [1]

$$\begin{aligned}\omega_1&=2(\lambda_1^{\cdot}\lambda_0-\lambda_0^{\cdot}\lambda_1-\lambda_3^{\cdot}\lambda_2+\lambda_2^{\cdot}\lambda_3)=8r^{-2}(\lambda_1^{\cdot\circ}\lambda_0^\circ-\lambda_0^{\cdot\circ}\lambda_1^\circ-\lambda_3^{\cdot\circ}\lambda_2^\circ+\lambda_2^{\cdot\circ}\lambda_3^\circ)\\ \omega_2&=2(\lambda_2^{\cdot}\lambda_0+\lambda_3^{\cdot}\lambda_1-\lambda_0^{\cdot}\lambda_2-\lambda_1^{\cdot}\lambda_3)=8r^{-2}(-\lambda_2^{\cdot\circ}\lambda_0^\circ-\lambda_3^{\cdot\circ}\lambda_1^\circ+\lambda_0^{\cdot\circ}\lambda_2^\circ+\lambda_1^{\cdot\circ}\lambda_3^\circ)\\ \omega_3&=2(\lambda_3^{\cdot}\lambda_0-\lambda_2^{\cdot}\lambda_1+\lambda_1^{\cdot}\lambda_2-\lambda_0^{\cdot}\lambda_3)=8r^{-2}(-\lambda_3^{\cdot\circ}\lambda_0^\circ+\lambda_2^{\cdot\circ}\lambda_1^\circ-\lambda_1^{\cdot\circ}\lambda_2^\circ+\lambda_0^{\cdot\circ}\lambda_3^\circ)\end{aligned} \qquad (1.17)$$

Подставим в первое из уравнений (1.17) вместо параметров λ_j или λ_j° величины u_k в соответствии с соотношениями (1.11) или (1.12). Получаем

$$\omega_1=2r^{-1}(-u_4u_1^{\cdot}+u_1u_4^{\cdot}-u_2u_3^{\cdot}+u_3u_2^{\cdot})$$

[1] Здесь и далее точка означает дифференцирование по реальному времени t.

Переходя в этом уравнении от реального времени t к фиктивному t^* по формуле (1.6) и вспоминая билинейное уравнение (1.5), находим

$$\omega_1=0 \tag{1.18}$$

Изложенное позволяет дать регуляризующему преобразованию Кустаанхеймо — Штифеля (1.4) и билинейному соотношению (1.5) следующую кинематическую интерпретацию. Регуляризующее преобразование Кустаанхеймо — Штифеля означает переход от декартовых координат центра масс тела B в системе координат Z к параметрам λ_j, λ_j° винтового движения системы координат Y, связанной с центром масс тела B и движущейся относительно системы координат Z с мгновенным винтом скоростей (1.9). При этом ось BY_1 трехгранника Y во все время движения направлена по радиус-вектору $\mathbf{r}$, поэтому проекции ω_2 и ω_3 вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости вращения трехгранника Y на оси BY_2 и BY_3 определяются формулами (1.16). Билинейное соотношение (1.5) накладывает на вектор $\boldsymbol{\omega}$ дополнительное условие, заключающееся в равенстве нулю проекции ω_1 этого вектора на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ (ось BY_1).

2. Прямой вывод регулярных уравнений (1.7) пространственной задачи двух тел, который исходил бы из уравнений (1.1), регуляризующего преобразования (1.4) и билинейного соотношения (1.5), по мнению авторов работы [1], осуществить нельзя, так как переход от координат z_i к параметрам u_k в регуляризующем преобразовании (1.4) неоднозначен. Поэтому авторы [1] считают, что единственный путь избежать этой трудности состоит в постулировании уравнений (1.7) и проверки того, что при этом удовлетворяются старые уравнения (1.1). Уравнения же (1.7) были записаны ими в результате замены в матричном регулярном уравнении Леви-Чивита плоской задачи фигурирующих в них двумерных величин определенными четырехмерными величинами.

Покажем, что приведенная кинематическая интерпретация регуляризующего преобразования Кустаанхеймо — Штифеля позволяет осуществить прямой вывод не только регулярных уравнений (1.7), но и более общих регулярных уравнений пространственной задачи двух тел, из которых уравнения (1.7) следуют как частные.

Уравнение (1.3) описывает движение тела B в системе координат Z, движущейся относительно инерциальной X поступательно. Запишем уравнения движения тела B в системе координат Y, вращающейся относительно инерциальной, а следовательно, и относительно системы координат Z, с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{-1}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}=\mathbf{p}-\mu r^{-3}\mathbf{r}=\mathbf{W},$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_1+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}=\mathbf{V} \tag{2.1}$$

Если угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ известна как функция $\mathbf{r}$, $\mathbf{V}$, t и задана своими проекциями в системе координат Y, а вектор $\mathbf{p}$ возмущающего ускорения также задан своими проекциями p_{ii} в этой системе координат, то интегрирование уравнений (2.1) дает координаты $y_i^*=y_i$ и проекции V_i вектора $\mathbf{V}$ скорости центра масс тела B в системе координат Y^* с началом в центре масс тела A и осями, параллельными осям координатного трехгранника Y (фиг. 2).

Для нахождения координат z_i и проекций V_{i0} вектора $\mathbf{V}$ скорости центра масс тела B в системе координат Z уравнения (2.1) необходимо дополнить тремя кинематическими уравнениями Пуассона [6]:

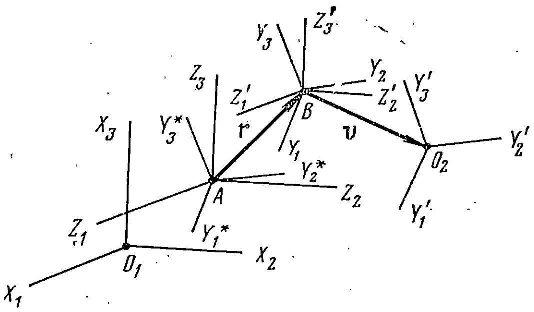
$$(d\mathbf{e}_i/dt)_1+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_i=0 \quad (i=1,\,2,\,3) \tag{2.2}$$

и алгебраическими соотношениями

$$V_{i0}=\mathbf{V}\cdot\mathbf{e}_i, \quad z_i=\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_i \quad (i=1,\,2,\,3) \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{e}_i$ — орты осей системы координат Z, определенные своими проекциями в системе координат Y.

Заметим, что для интегрирования уравнений (2.2) необходимо задание начальной ориентации трехгранника Y относительно Z. Следует отметить также, что в пространственной задаче двух тел проекции вектора $\mathbf{p}$



Фиг. 2

считаются известными в осях координатного трехгранника Z, а не Y. Поэтому интегрирование уравнений (2.2) должно предшествовать интегрированию уравнений (2.1) с тем, чтобы предварительно осуществить пересчет проекций вектора $\mathbf{p}$ на оси координатного трехгранника Y.

Уравнения (2.1) – (2.3), так же как и уравнение (1.3), доставляют решение пространственной задачи двух тел. Однако если алгоритм решения пространственной задачи двух тел, основанный на уравнении (1.3), при заданных начальных условиях $z_{i0}=z_i(t_0)$, $z_{i0}^{\cdot}=z_i^{\cdot}(t_0)$ однозначен, то алгоритм решения пространственной задачи двух тел, основанный на уравнениях (2.1)—(2.3), для тех же заданных начальных условий z_{i0}, $z_{i0}^{\cdot}$ неоднозначен. Эта неоднозначность связана с существующим произволом в задании углового движения системы координат Y: в общем случае угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ трехгранника Y может быть задана произвольной функцией $\mathbf{V}$, $\mathbf{r}$, t, кроме того, в выборе начальной ориентации системы координат Y может быть также определенный произвол.

Установленный кинематический смысл преобразования Кустаанхеймо — Штифеля указывает на то, что в этом случае имеет место именно такая неоднозначность. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ трехгранника Y в этом случае задается как функция $\mathbf{r}$, $\mathbf{V}$, t ее проекциями на оси системы координат Y формулами (1.16), (1.18). Начальная ориентация координатного трехгранника Y выбирается такой, чтобы ось BY_1 имела направление вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}(t_0)$. Угловое же положение системы координат Y относительно оси BY_1 в начальный момент времени может быть произвольным, что и обуславливает собой неоднозначность алгоритма решения пространственной задачи двух тел в случае Кустаанхеймо — Штифеля.

Сделанный переход в пространственной задаче двух тел от системы координат Z, движущейся поступательно относительно инерциальной X, к вращающейся системе координат Y сам по себе не дает регуляризующего эффекта. Необходим следующий шаг, заключающийся в переходе от уравнений (2.1) — (2.3) к уравнениям в параметрической форме, оперирующим с параметрами винтовых движений двух определенным образом выбранных систем координат. В качестве одной из этих систем координат возьмем введенную ранее систему координат Y, винтовое движение которой относительно системы координат Z характеризуется мгновенным винтом скоростей (1.9) и параметрами λ_j, λ_j° ($j=0, 1, 2, 3$) винтового движения. В качестве другой выберем систему координат Y' (фиг. 2), начало которой совмещено с концом O_2 вектора $\mathbf{V}$, а оси параллельны одноименным осям системы координат Y. Мгновенному винту скоростей $\mathbf{U}_+$ движения системы координат Y' относительно системы координат Z' с началом в точке B и осями, параллельными одноименным инерциальным осям, соответствует комплексный вектор $\boldsymbol{\omega}+s\mathbf{W}$:

$$\mathbf{U}_+ \rightleftarrows \boldsymbol{\omega}+s\mathbf{W}=\boldsymbol{\omega}+sd\mathbf{V}/dt=\boldsymbol{\omega}+s(\mathbf{p}-\mu r^{-3}\mathbf{r})$$

Положение системы координат Y' относительно Z' определим дуальным вектором конечного винтового перемещения $\boldsymbol{\Theta}_+$ [3]. Параметры винтового движения системы координат Y', соответствующие винту $\boldsymbol{\Theta}_+$, обозначим через λ_{j+}, λ_{j+}° ($j=0, 1, 2, 3$). Так как во все время движения одноименные оси систем координат Z и Z', Y и Y' параллельны, то $\lambda_j=\lambda_{j+}$ ($j=0, 1, 2, 3$).

Уравнения (2.1) — (2.3) аналогичны общим уравнениям инерциальной навигации [9]. В [5] получена параметрическая форма общих уравнений инерциальной навигации, использующая в качестве кинематических параметров параметры винтовых движений двух систем координат: системы координат, связанной с корпусом пространственного ньютонометра, и системы координат, связанной с концом вектора скорости чувствительной массы ньютонометра. Условия, наложенные на винтовые движения координатных трехгранников Y и Y', аналогичны условиям, наложенным на винтовые движения рассмотренных в [5] координатных трехгранников. Поэтому параметрические уравнения пространственной задачи двух тел могут быть записаны по аналогии с параметрическими уравнениями инерциальной навигации [5]:

$$2n^{\cdot}=n_\omega n,\quad 2n_+^{\cdot\circ}=n_\omega n_+^\circ+n_W n,\quad 2n^{\cdot\circ}=n_\omega n^\circ+2n_+^\circ \tag{2.4}$$

$$n_{V0}=2n^T n_+^\circ,\quad n_{r0}=2n^T n^\circ,\quad n_V=2n_+^\circ n^T,\quad n_r=2n^\circ n^T \tag{2.5}$$

В уравнениях (2.4), (2.5) матрицы n и n° параметров винтового движения системы координат Y определяются равенствами (1.10), (1.14), матрицы n_ω, n_W, n_V, n_r составлены из проекций векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{r}$ на оси координатного трехгранника Y, а матрицы n_{V0}, n_{r0} — из проекций векторов $\mathbf{V}$, $\mathbf{r}$ на оси координатного трехгранника $Z(X)$, матрица n_+° составлена из параметров λ_{j+}° винтового движения системы координат Y'. Все перечисленные матрицы имеют структуру матриц n, n°, так, например

$$n_\omega=\begin{Vmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{Vmatrix},\quad n_{r0}=\begin{Vmatrix} 0 & -z_1 & -z_2 & -z_3 \\ z_1 & 0 & z_3 & -z_2 \\ z_2 & -z_3 & 0 & z_1 \\ z_3 & z_2 & -z_1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Так как $\mathbf{W}=\mathbf{p}-\mu r^{-3}\mathbf{r}$, то с учетом последнего из матричных равенств (2.5) $n_W n=n_{p1}n-2\mu r^{-3}n^\circ$, где n_{p1} — матрица вида n, образованная из проекций p_{i1} вектора $\mathbf{p}$ на оси координатного трехгранника Y. В задаче двух тел проекции вектора $\mathbf{p}$ известны в осях координатного трехгранника $Z(X)$. В силу имеющего место равенства[2] $n_{p1}n=nn_p$, где n_p — матрица вида n, образованная из проекций p_i вектора $\mathbf{p}$ на оси трехгранника Z,

[2] Это равенство может быть установлено на основе соотношений (2.5).

получаем $n_W n = n n_p - 2\mu r^{-3} n^\circ$. Уравнения (2.4) при этом примут вид

$$2n^{\cdot} = n_\omega n, \quad 2n_+^{\cdot\circ} = n_\omega n_+^\circ - 2\mu r^{-3} n^\circ + n n_p, \quad 2n^{\cdot\circ} = n_\omega n^\circ + 2n_+^\circ \tag{2.6}$$

Уравнения (2.5), (2.6) являются параметрическими уравнениями пространственной задачи двух тел. Первое из уравнений (2.6) представляет собой матричное кинематическое уравнение в параметрах Родрига — Гамильтона λ_j сферического движения системы координат Y (а также Y') относительно $Z(X)$. В уравнениях (2.6) элементы матрицы n_ω в общем случае являются произвольными заданными функциями $\mathbf{r}$, $\mathbf{V}$, t, а также произвольными являются значения параметров λ_j в начальный момент времени t_0 (начальная ориентация трехгранника $Y(Y')$). Поэтому алгоритм решения пространственной задачи двух тел, основанный на уравнениях (2.5), (2.6), так же как и алгоритм решения этой задачи на основе уравнений (2.1) — (2.3), неоднозначен. При задании конкретных законов изменения компонент ω_i вектора ω и начальных значений параметров λ_j алгоритм решения пространственной задачи двух тел становится однозначным, так как получается конкретное частное решение первого из уравнений (2.6); однозначен будет при этом и переход от координат z_i вектора $\mathbf{r}$ к параметрам λ_j°.

В случае Кустаанхеймо — Штифеля в уравнениях (2.6) ω_i определяются формулами (1.16), (1.18), а начальные значения параметров λ_j должны браться такими, чтобы ось BY_1 в начальный момент времени была направлена вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}(t_0)$. Но это условие, наложенное на начальные значения параметров λ_j, не позволяет полностью исключить произвол в их задании, так как угловое положение системы координат Y относительно оси BY_1 в начальный момент времени может быть произвольным (что, как уже указывалось, является причиной неоднозначности алгоритма решения пространственной задачи двух тел в случае Кустаанхеймо — Штифеля). Таким образом, для этого случая в задании параметров Родрига — Гамильтона λ_j, характеризующих ориентацию трехгранника Y, существует произвол, обусловленный имеющимся произволом в задании начальной ориентации трехгранника Y. Поэтому переход от координат z_i вектора $\mathbf{r}$ к параметрам λ_j°, определяемый вторым соотношением из совокупности соотношений (2.5), является неоднозначным. Поскольку параметры λ_j° однозначно связаны соотношениями (1.12) с параметрами u_k, то сказанное раскрывает физический смысл неоднозначности перехода от координат z_i к параметрам u_k. Эта неоднозначность исчезает при задании начальных значений параметров Родрига — Гамильтона λ_j, т. е. при задании начальной ориентации трехгранника Y. Ясно, что такого рода неоднозначность не может служить препятствием для вывода регулярных уравнений пространственной задачи двух тел, если исходить из уравнений (2.6).

В дальнейшем при выводе регулярных уравнений будем полагать, что, как и в случае Кустаанхеймо — Штифеля, на компоненты ω_2 и ω_3 угловой скорости ω трехгранника Y наложены связи (1.16), а компоненту ω_1 для большей общности будем считать произвольной заданной функцией $\mathbf{r}$, $\mathbf{V}$, t.

Из первого уравнения системы (2.6) имеем

$$n_\omega = 2n^{\cdot} n^T \tag{2.7}$$

В рассматриваемом случае параметры λ_j связаны с λ_j° зависимостями (1.13). Поэтому проекции ω_i вектора $\boldsymbol{\omega}$ выражаются через параметры λ_j° и их производные в соответствии с равенствами (1.17). Учитывая эти равенства, выражение (2.7) можно представить в виде

$$n_\omega = -8r^{-2} n^{\cdot\circ} n^{\circ T} + 2r^{-1} iE + 2\omega_1 E_1 \tag{2.8}$$

Здесь E — единичная матрица размерами 4×4, а E_1 — матрица, которая получается из матрицы n_ω, если в ней положить

$$\omega_1=1, \quad \omega_2=\omega_3=0$$

Подставив соотношение (2.8) в третье уравнение системы (2.6) и имея в виду, что $n^{\circ T}={}^1/_4 r^2 n^{\circ -1}$, находим

$$n_+^\circ=2n^{\cdot\circ}-r^{-1}r^\cdot n^\circ-\omega_1E_1n^\circ \tag{2.9}$$

Запишем скалярные равенства (1.11), (1.12) в матричной форме

$$n=r^{-1/2}n_u^T, \quad n^\circ={}^1/_2 r^{1/2}n_u^\circ \tag{2.10}$$

Здесь матрицы n_u и n_u° имеют структуру матрицы n и составлены из элементов u_4, u_1, u_2, u_3 и u_1, u_4, $-u_3$, u_2:

$$n_u=\begin{Vmatrix} u_4 & -u_1 & -u_2 & -u_3 \\ u_1 & u_4 & u_3 & -u_2 \\ u_2 & -u_3 & u_4 & u_1 \\ u_3 & u_2 & -u_1 & u_4 \end{Vmatrix}, \quad n_u^0=\begin{Vmatrix} u_1 & -u_4 & u_3 & -u_2 \\ u_4 & u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_3 & -u_2 & u_1 & u_4 \\ u_2 & -u_3 & -u_4 & u_1 \end{Vmatrix} \tag{2.11}$$

Вычислим производную по времени от матрицы n°:

$$n^{\cdot\circ}={}^1/_4 r^{-1/2}r^\cdot n_u^\circ+{}^1/_2 r^{1/2}n_u^{\cdot\circ} \tag{2.12}$$

Подставим выражения (2.10), (2.12) матриц n° и $n^{\cdot\circ}$ в правые части равенств (2.8) и (2.9). Получим

$$n_\omega=r^{-1}(r^\cdot E-2n_u^{\cdot\circ}n_u^{\circ T})+2\omega_1E_1, \quad n_+^\circ=r^{1/2}n_u^{\cdot\circ}-\omega_1E_1n^\circ \tag{2.13}$$

Видно, что переход к параметрам u_k позволил устранить из выражения матрицы n_+° нежелательный член, содержащий $r^\cdot$.

Следуя известным методам регуляризации [1], перейдем от реального времени t к фиктивному времени t^* по одной из формул (1.6): $dt=rdt^*$. Тогда

$$n_\omega=r^{-2}(r'E-2n_u^{\circ\prime}n_u^{\circ T})+2\omega_1E_1, \quad n_+^\circ=r^{-1/2}n_u^{\circ\prime}-\omega_1E_1n^\circ \tag{2.14}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по фиктивному времени t^*, которое принимается в дальнейшем в качестве новой независимой переменной, а реальное время t рассматривается как неизвестная функция t^*.

Переходя во втором из уравнений (2.6) к новой независимой переменной t^*, подставляя в него выражения (2.10), (2.14) и учитывая тождество $n_u^{\circ T}n_u^{\circ\prime}-r'E\equiv-n_u^{\circ\prime T}n_u^\circ$, получим

$$n_u^{0\prime\prime}+\frac{1}{2}r^{-1}\left(\mu-2\sum_{k=1}^{4}u_k^{\prime 2}\right)n_u^0-\frac{3}{2}r\omega_1E_1n_u^{0\prime}-$$

$$-\frac{1}{2}(\omega_1n_u^{0\prime}n_u^{0T}E_1+r^2\omega_1^2E+r^2\varepsilon_1E_1)n_u^0=\frac{1}{2}rn_u^Tn_p \tag{2.15}$$

где ε_1 — проекция вектора углового ускорения трехгранника Y на ось BY_1 $(\varepsilon_1=\omega_1^\cdot)$.

Кеплеровскую энергию — h

$$h=r^{-1}\left(\mu-2\sum_{k=1}^{4}u_k^{\prime 2}\right) \tag{2.16}$$

примем в качестве новой неизвестной функции переменного t^*. Она удовлетворяет дифференциальному уравнению [1]:

$$h'=-2(u_1'q_1+u_2'q_2+u_3'q_3+u_4'q_4) \tag{2.17}$$

$$\begin{gathered} q_1=u_1p_1+u_2p_2+u_3p_3, \quad q_2=-u_2p_1+u_1p_2+u_4p_3 \\ q_3=-u_3p_1-u_4p_2+u_1p_3, \quad q_4=u_4p_1-u_3p_2+u_2p_3 \end{gathered} \tag{2.18}$$

Подставляя выражения (2.11), (2.16) в уравнение (2.15) и используя равенства $n_u°\|1\ 0\ 0\ 0\|^T=\|u_1\ u_4 - u_3\ u_2\|^T$, $n_p\|1\ 0\ 0\ 0\|^T=\|0\ p_1\ p_2\ p_3\|^T$, преобразуем это уравнение к виду

$$\begin{Vmatrix} u_1'' \\ u_4'' \\ -u_3'' \\ u_2'' \end{Vmatrix} - \frac{1}{2}\omega_1 \begin{Vmatrix} 0 & -z_1-3r & -z_2 & -z_3 \\ z_1+3r & 0 & -z_3 & z_2 \\ z_2 & z_3 & 0 & -z_1+3r \\ z_3 & -z_2 & z_1-3r & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u_1' \\ u_4' \\ -u_3' \\ u_2' \end{Vmatrix} +$$

$$+\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} h-\omega_1^2r^2 & r^2\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -r^2\varepsilon_1 & h-\omega_1^2r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h-\omega_1^2r^2 & -r^2\varepsilon_1 \\ 0 & 0 & r^2\varepsilon_1 & h-\omega_1^2r^2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_4 \\ -u_3 \\ u_2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}r \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_4 \\ -q_3 \\ q_2 \end{Vmatrix} \tag{2.19}$$

$$\begin{gathered} z_1=u_1^2-u_2^2-u_3^2+u_4^2, \quad z_2=2(u_1u_2-u_3u_4) \\ z_3=2(u_1u_3+u_2u_4), \quad r=u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2 \end{gathered} \tag{2.20}$$

Уравнения (2.17) — (2.20) вместе с уравнением

$$t'=r \tag{2.21}$$

представляют собой регулярные уравнения пространственной задачи двух тел.

В уравнениях (2.17) — (2.19) p_i — заданные функции реального времени t, проекция ω_1 угловой скорости и проекция ε_1 углового ускорения задаются как функции переменных t, z_i, $z_i^{\cdot}=V_{i0}$ (они могут быть заданы как функции переменных t, y_i, V_i). Переходя от z_i к u_k и от $z_i^{\cdot}$ к u_k', u_k по матричным формулам

$$n_{r0}=n_u{}^Tn_u{}^0, \quad \frac{dn_{r0}}{dt}=n_{V0}=r^{-1}\frac{d}{dt^*}(n_u{}^Tn_u{}^0)$$

следующим из формул (2.5), (2.10), получим ω_1 и ε_1 в функции переменных t, u_k, u_k'.

Полагая $\omega_1=0$, $\varepsilon_1=0$, из уравнений (2.17) — (2.21) получаем регулярные уравнения (1.7), (1.8) Кустаанхеймо — Штифеля.

Представляет интерес задача определения таких ω_1 и ε_1, при которых регулярные уравнения пространственной задачи двух тел обладали бы наилучшей численной устойчивостью в смысле, указанном в работе [1].

В заключение рассмотрим подробнее вопрос нахождения параметров u_k по известным координатам z_i в любой заданный момент времени. Из соотношений (2.5) для выбранного характера движения трехгранника Y имеем

$$2n°n^T=n_r=rE_1, \quad 2n^Tn°=n_{r0} \tag{2.22}$$

Эти равенства можно использовать для нахождения либо параметров λ_j, либо $\lambda_j°$ через координаты z_i. Удобнее отыскивать параметры λ_j. Из равенств (2.22) следует

$$rE_1n=nn_{r0} \tag{2.23}$$

Матричное уравнение (2.23) эквивалентно следующей системе однородных линейных уравнений:

$$\begin{aligned} &(r-z_1)\lambda_1-z_2\lambda_2-z_3\lambda_3=0, \quad (z_1-r)\lambda_0-z_3\lambda_2+z_2\lambda_3=0 \\ &z_2\lambda_0+z_3\lambda_1-(r+z_1)\lambda_3=0, \quad z_3\lambda_0-z_2\lambda_1+(z_1+r)\lambda_2=0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Эта система имеет относительно неизвестных величин λ_j два линейно-независимых решения, так как ранг матрицы системы равен двум.

Следует однако иметь в виду, что параметры Родрига — Гамильтона λ_j подчинены условию

$$\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1 \tag{2.25}$$

Поэтому параметры λ_j необходимо отыскивать исходя из совокупности уравнений (2.24) — (2.25). Из первых двух уравнений системы (2.24) находим

$$\lambda_0=\frac{z_2\lambda_3-z_3\lambda_2}{r-z_1}, \quad \lambda_1=\frac{z_2\lambda_2+z_3\lambda_3}{r-z_1} \tag{2.26}$$

Для этих значений параметров λ_0 и λ_1 последние два уравнения системы (2.24) обращаются в тождества. Параметры λ_2 и λ_3 выберем так, чтобы удовлетворялось соотношение

$$\lambda_2^2+\lambda_3^2={}^1/_2 r^{-1}(r-z_1) \tag{2.27}$$

которое получается в результате подстановки выражений (2.26) в равенство (2.25).

Соотношения (2.26), (2.27) позволяют находить параметры λ_j через заданные координаты z_i.

Если исходить из последних двух уравнений системы (2.24) и равенства (2.25), то для нахождения λ_j получаем формулы

$$\lambda_0^2+\lambda_1^2=\frac{1}{2}r^{-1}(r+z_1), \quad \lambda_2=\frac{z_2\lambda_1-z_3\lambda_0}{z_1+r}, \quad \lambda_3=\frac{z_2\lambda_0+z_3\lambda_1}{r+z_1} \tag{2.28}$$

Для получения параметров u_k через заданные координаты z_i необходимо воспользоваться соотношениями (1.11). Подставляя в них λ_j, определенные по формулам (2.26), (2.27) или (2.28), получаем выражения для u_k, совпадающие с выражениями, найденными в [1] другим способом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stiefel E. L., Scheifele G.* Linear and regular celestial mechanics. Berlin — Heidelberg — New York: Springer-Verlag, 1971.– Рус. перев.: М.: Наука, 1975. 304 с.
2. *Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 864 с.
3. *Диментберг Ф. М.* Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 328 с.
4. *Челноков Ю. Н.* Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 32–38.
5. *Челноков Ю. Н.* Об одной форме уравнений инерциальной навигации.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 5, с. 20–28.
6. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
7. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
8. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
9. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации. Автономные системы. М.: Наука, 1966. 580 с.

Саратов

Поступила в редакцию 15.III.1979