

УДК 539.3:534.1

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ
ОПТИМИЗАЦИИ УСТОЙЧИВОСТИ И ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ
УПРУГИХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

БРАТУСЬ А. С., КАРТВЕЛИШВИЛИ В. М.

Многие задачи оптимального проектирования упругих тонкостенных конструкций формулируются как задачи выбора распределения толщин [1-4]. Если границы варьирования искомой толщины заключены в относительно малых пределах, то это позволяет применять в задачах оптимизации метод возмущений. В настоящее время имеется небольшое число работ по оптимизации многомерных конструкций [5-10]. При этом решение прямых задач сопряжено с известными трудностями. Эффективным методом получения приближенных решений указанных задач является метод возмущений, позволяющий обойти эти трудности, так как для нулевого приближения достаточно иметь решения соответствующих задач для конструкций, например, постоянной толщины, которые во многих случаях известны в явном аналитическом виде.

В данной работе при помощи метода возмущений получены приближенные аналитические решения двумерных задач оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций переменной толщины. Рассмотрены также двойственные задачи минимизации веса конструкции при заданных собственных значениях. Найдена асимптотическая оценка собственных значений. Выведены достаточные условия оптимальности и предложен способ получения аналитических решений. В задаче устойчивости исследован вопрос о применимости решений плоского напряженного состояния для пластин переменной толщины. Проводится анализ и сравнение оптимальных форм распределения толщин.

1. **Постановка задачи.** Задачи о нахождении частот колебаний и потери устойчивости упругих пластин переменной толщины могут быть сформулированы как задачи отыскания собственных значений дифференциальных операторов вида

$$A(h)w(x, y) = \lambda T(h)w(x, y) \quad (1.1)$$

Здесь $w(x, y)$ — неизвестная функция, имеющая смысл перемещения точек срединной поверхности пластинки и определенная в ограниченной области D с кусочно-гладкой границей Γ ; λ — параметр потери устойчивости или квадрат частоты колебаний. Дифференциальные операторы $A(h)$ и $T(h)$ с коэффициентами, зависящими от функции $h(x, y)$, имеющей смысл толщины упругой пластины, для задач о потере устойчивости записываются в форме

$$A(h)w(x, y) = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right\} \frac{E}{12(1-\nu^2)}$$

$$T(h)w(x, y) = h \left\{ \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \quad (1.3)$$

В случае задачи определения частот колебаний оператор $A(h)$ сохраняет указанный вид, а $T(h)$ имеет более простую структуру

$$T(h)w(x, y) = hw(x, y)\rho \quad (1.4)$$

В соотношениях (1.2)–(1.4) E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты напряжений, действующие в плоскости пластины, ρ – плотность материала.

Предполагается, что на части Γ_1 границы Γ пластинка оперта, а на остальной части Γ_2 – жестко закреплена ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$):

$$(w)_{\Gamma} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{\Gamma_2} = 0, \quad \left(h^3 \Delta w + \frac{1-\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial n} \right)_{\Gamma_1} = 0 \quad (1.5)$$

где $\partial w / \partial n, R$ и Δ – производная функции по внешней нормали к границе, радиус-кривизны контура и оператор Лапласа.

Множество функций Q , задающих толщину пластинки, определяется равенством

$$Q = \{h(x, y) : h(x, y) \in W_2^1(D), \|h\|_{W_2^1(D)} \leq C_1, 0 < e_1 \leq h_1 \leq e_2, \quad (1.6)$$

$$\iint_D h(x, y) dx dy = V \}$$

где e_1, e_2, C_1 и V – постоянные. Величины e_1 и e_2 характеризуют интервал изменения распределения толщин, V – фиксированное значение объема (веса) пластинки.

Через $W_2^1(D)$ обозначено пространство функций Соболева С. Л., состоящее из функций, имеющих суммируемые с квадратом производные первого порядка в D :

$$\|h\|_{W_2^1(D)} = \left(\iint_D \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right)^{1/2} \quad (1.7)$$

Постоянная C_1 , входящая в (1.6), характеризует скорость изменения толщины $h(x, y)$.

Известно [11], что оператор $A(h)$ положительно определен и самосопряжен при всех $h(x, y) \in Q$ на функциях из множества W . Множество W получается замыканием в пространстве $W_2^2(D)$ множества бесконечно дифференцируемых в \bar{D} функций, удовлетворяющих соответствующим краевым условиям на Γ . Здесь $W_2^2(D)$ – пространство функций С. Л. Соболева, суммируемых с квадратом вместе со своими вторыми производными в D .

Оператор $T[h]$, определенный формулой (1.3), положительно определен и самосопряжен [11] на функциях из множества U . Множество U получается замыканием множества бесконечно дифференцируемых в \bar{D} функций, удовлетворяющих условию $(w)_{\Gamma} = 0$ в пространстве $W_2^1(D)$.

В случае (1.4) в качестве области определения оператора $T(h)$ достаточно взять множество функций $L_2(D)$, где $L_2(D)$ – суммируемые с квадратом в D функции.

В силу компактности вложения пространств $W_2^2 \rightarrow W_2^1$ и $W_2^2 \rightarrow L_2$ [11] спектральная задача (1.1)–(1.5) имеет полную систему собственных функций $w_i(x, y)$ ($i=1, 2, \dots$), а уравнение (1.1) имеет счетное множество собственных чисел $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$, причем $\lambda_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$.

Первая собственная функция $w_1(x, y)$ разрешает вариационную задачу нахождения минимума отношения Рэлея

$$R_h(w) = \frac{r_1}{r_2}, \quad r_1 = \iint_D w A(h) w dx dy, \quad r_2 = \iint_D w T(h) w dx dy$$

Минимум вычисляется по всем $w(x, y) \in W$, $w(x, y) \neq 0$. Элемент h предполагается фиксированным из множества Q .

Перейдем к формулировке оптимизационной задачи. При заданном объеме V требуется найти распределение толщины пластинки $h(x, y) \in Q$, при котором первое собственное число задачи (1.1)–(1.5) будет достигать своей верхней грани. Иначе, требуется найти функцию $h^*(x, y) \in Q$ и соответствующую пару $(w^*(x, y), \lambda_1^*)$, для которых

$$\lambda_1^* = \sup_{h \in Q} \inf_{w \in W} R_h(w) \quad (w \neq 0) \quad (1.8)$$

В [12] показано¹, что верхняя грань (1.8) существует при сделанных выше предположениях.

Наряду с этой задачей рассмотрим двойственную к (1.8) задачу. Требуется найти такое распределение толщин пластинки, при котором объем (вес) пластинки

$$V(h) = \iint_D h(x, y) dx dy \quad (1.9)$$

будет достигать своей нижней грани при условиях $h(x, y) \in Q^*$:

$$Q^* = \{h(x, y) : h \in W_2^1(D), \|h\|_{W_2^1(D)} \leq C_2, 0 < e_1 \leq h \leq e_2\} \quad (1.10)$$

$$\lambda_1(h) = \min_{w \in W} R_h(w) \geq \Lambda \quad (\Lambda = \text{const}, w \neq 0) \quad (1.11)$$

Известно [13], что решение прямой задачи позволяет найти решение двойственной и наоборот. Поэтому достаточно найти решение одной из этих задач, например задачи (1.8).

Полагая, что изменение толщины осуществляется в относительно малых пределах, применим к поставленным задачам оптимизации метод возмущений.

2. Метод возмущений. Оценка погрешности. Предположим, что функция $h(x, y)$ — толщина упругой пластинки, меняется в относительно малых пределах по закону

$$h(x, y) = h_0 + \alpha h_1(x, y) \quad (0 < \alpha < 1, h_0 - \alpha |h_1| > 0) \quad (2.1)$$

где h_0 — постоянная величина, h_1 — функция независимых переменных (x, y) .

Будем полагать, что изменение толщины пластинки происходит таким образом, что объем (вес) пластинки остается неизменным, равным объему (весу) пластинки постоянной толщины h_0 . С учетом равенства (1.6) это означает, что множество функций $h_1(x, y)$, задающих толщину пластинки по формуле (2.1), принадлежит множеству

$$Q_1 = \left\{ h_1(x, y) : h_1(x, y) \in W_2^1(D), \|h_1\|_{W_2^1(D)} \leq C, |h_1(x, y)| \leq 1, \iint_D h_1(x, y) dx dy = 0 \right\} \quad (C = \text{const}) \quad (2.2)$$

Здесь норма элемента в пространстве W_2^1 определена равенством (1.7).

Разложим операторы $A(h_0 + \alpha h_1)$ и $T(h_0 + \alpha h_1)$ в конечные суммы по степеням α

¹ Лигвинов В. Г. Оптимальное управление коэффициентами в эллиптических системах. — Препринт Ин-та матем. АН УССР. Киев, 1979, № 79.4. 50 с.

$$\begin{aligned} A(h_0 + \alpha h_1) &= A_0(h_0) + \alpha A_1(h_1) + \alpha^2 A_2(h_1) + \alpha^3 A_3(h_1) \\ T(h_0 + \alpha h_1) &= T_0(h_0) + \alpha T_1(h_1) \\ A_1(h_1) &= 3h_0^2 A(h_1), \quad T_1(h_1) = T(h_1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из результатов [14, 15] следует, что в этом случае собственные функции и собственные значения исходной задачи (1.1) могут быть представлены в виде ряда по степеням α :

$$w_i(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k w_i^{(k)}(x, y), \quad \lambda_i = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \lambda_i^{(k)} \quad (2.4)$$

где $w_i(x, y)$, λ_i ($i=1, 2, 3 \dots$) — i -я собственная функция и собственное значение задачи (1.1)–(1.5). Вопрос о возмущении спектра операторов изучался в [16, 17].

Подставляя в (1.1) разложения (2.3) и используя (2.4), формально перемножая ряды и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α , получим для нулевого приближения уравнение

$$A_0(h_0) w_i^{(0)}(x, y) = \lambda^{(0)} T_0(h_0) w_i^{(0)}(x, y) \quad (2.5)$$

Далее для простоты записи индекс i внизу у функции $w_i^{(k)}$ будем опускать.

Аналогичным образом выводится уравнение для первого приближения

$$\begin{aligned} &A_0(h_0) w^{(1)}(x, y) + A_1(h_1) w^{(0)}(x, y) = \\ &= \lambda^{(0)} T_0(h_0) w^{(1)}(x, y) + \lambda^{(1)} T_1(h_1) w^{(0)}(x, y) + \lambda^{(1)} T_0(h_0) w^{(0)}(x, y) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь $w^{(1)}(x, y)$ и $\lambda^{(1)}$ — первые поправки к собственной функции w и собственному значению λ .

Умножая уравнение (2.6) на функцию $w^{(0)}$ и интегрируя по всей области D с учетом самосопряженности операторов $A_0(h_0)$ и $T_0(h_0)$, а также принимая во внимание равенство (2.5), получим формулу

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)}(h_1) &= \frac{r_3}{r_4}, \quad r_3 = \iint_D w^{(0)} [A_1(h_1) w^{(0)} - \lambda^{(0)} T_1(h_1) w^{(0)}] dx dy \\ r_4 &= \iint_D w^{(0)} T_0(h_0) w^{(0)} dx dy \end{aligned} \quad (2.7)$$

После вычисления $\lambda^{(1)}(h_1)$ при заданном $h_1 \in Q_1$ можно найти функцию $w^{(1)}(x, y)$, решая неоднородную задачу (2.6). Аналогичным образом можно вывести уравнение для вторых приближений $w^{(2)}$ и $\lambda^{(2)}$.

Отметим, что для вычисления $\lambda^{(1)}$ при заданном h_1 при известной функции $w^{(0)}(x, y)$, кроме элементарных операций, требуются только квадратуры. В итоге i -е собственное значение можно представить в асимптотическом виде

$$\lambda_i(h_1) = \lambda^{(0)} + \alpha \lambda^{(1)}(h_1) + \alpha^2 \Omega(\alpha, h_1), \quad \Omega(\alpha, h_1) = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha^{k-2} \lambda^{(k)}(h_1) \quad (2.8)$$

Вернемся к исходной задаче (1.8), сформулированной в п. 1, учитывая полученное разложение (2.8). Найдем такое распределение толщин пластинки $h(x, y)$, заданное формулой (2.1), которое максимизирует первое собственное значение с точностью до членов, имеющих порядок $O(\alpha^2)$. Для

этого рассмотрим верхнюю грань функционала (2.7) по всем функциям $h_1 \in Q_1$, где Q_1 определено равенством (2.2).

Заметим, что функционал (2.7) в силу сделанных построений линеен по h_1 , а множество Q_1 — выпуклое и замкнутое в топологии пространства W_2^1 . Следовательно, функционал (2.7) достигает в Q_1 максимального значения.

Можно показать², что разложение (2.4) будет справедливо при достаточно малых α для всех $h_1 \in Q_1$.

Пусть h_1^\sim — элемент, на котором достигается верхняя грань функционала (2.7), $\lambda^{(1)}(h_1^\sim)$ — соответствующее значение функционала (2.7) при $h_1(x, y) = h_1^\sim(x, y)$. Из (2.8) следует, что

$$\begin{aligned} \max_{h_1 \in Q_1} \lambda(h_1) &\leq \lambda^{(0)} + \alpha \max_{h_1 \in Q_1} \lambda^{(1)}(h_1) + \alpha^{(2)} \max_{h_1 \in Q_1} \Omega(\alpha, h_1) = \\ &= \lambda^{(0)} + \alpha \lambda^{(1)}(h_1^\sim) + \alpha^2 \max_{h_1 \in Q_1} \Omega(\alpha, h_1^\sim) \end{aligned} \quad (2.9)$$

С другой стороны, справедливо равенство [18]:

$$\max_{h_1 \in Q_1} \lambda(h_1) \geq \lambda^{(0)} + \alpha \lambda^{(1)}(h_1^\sim) + \alpha^2 \Omega(\alpha, h_1^\sim) \quad (2.10)$$

Из (2.9) и (2.10) следует асимптотическая оценка первого максимального собственного значения

$$\alpha^2 \Omega(\alpha, h_1^\sim) \leq \max_{h_1 \in Q_1} \lambda(h_1) - [\lambda^{(0)} + \alpha \lambda^{(1)}(h_1^\sim)] \leq \alpha^2 \max_{h_1 \in Q_1} \Omega(\alpha, h_1)$$

Последняя оценка показывает, что погрешность в вычислении максимального первого собственного значения по формуле $\max_{h_1 \in Q_1} \lambda(h_1) \approx \lambda^{(0)} + \alpha \lambda^{(1)}(h_1^\sim)$ имеет порядок $O(\alpha^2)$, если функция $h(x, y)$, задающая распределение толщин пластинки, изменяется по закону (2.1).

В случае двойственной задачи (1.9) — (1.11), полагая, что распределение толщин пластинки $h(x, y)$ меняется по закону (2.1) и проводя рассуждения, аналогичные предыдущему, получим вариационную задачу отыскания минимума функционала $V(h_1)$, равного интегралу от h_1 по области D , при ограничениях $h_1 \in Q_1^\sim$:

$$\begin{aligned} Q_1^\sim &= \{h_1(x, y) : h_1 \in W_2^1(D), \|h_1\|_{w_2^1(D)} \leq C_3, \\ &|h_1| \leq 1\}, \lambda^{(1)}(h_1) \geq (\Lambda - \lambda^{(0)})/\alpha \end{aligned}$$

Здесь $\lambda^{(1)}(h_1)$ — функционал, определенный равенством (2.7), $\lambda^{(0)}$ — собственное значение исходной задачи (1.1) — (1.5) с $h(x, y) = h_0 = \text{const}$, Λ — постоянная, фигурирующая в ограничении (1.11), $C_3 = \text{const}$.

Из последнего ограничения следует, что двойственная задача может иметь решение при любых $0 < \alpha < 1$, если $\Lambda - \lambda^{(0)} = \alpha \Lambda_1$ с некоторой постоянной Λ_1 . В итоге, последнее ограничение примет вид $\lambda^{(1)}(h_1) \geq \Lambda_1$.

3. Достаточные условия оптимальности. Регуляризация вариационной задачи. Как уже отмечалось в п. 2, функционал $\lambda^{(1)}(h_1)$, определенный равенством (2.7) с вычисленной заранее функцией $w^{(0)}$ (являющейся решением задачи (2.5)), линейный и может быть представлен во всех рассмот-

² Братусь А. С., Каргвелишвили В. М. Метод возмущений в задачах оптимизации устойчивости, частот колебаний, изгиба и прочности упругих пластин переменной толщины. — Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1981, № 180. 65 с.

ренных далее задачах в виде

$$\lambda^{(1)}(h_1) = \iint_D h_1(x, y) \Phi(x, y) dx dy \quad (3.1)$$

где $\Phi(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция от x и y в D .

В силу выпуклости и замкнутости множества Q_1 , определенного равенством (2.2), функционал $\lambda^{(1)}(h_1)$ достигает в Q_1 экстремальных значений. Причем линейность $\lambda^{(1)}(h_1)$ означает, что всякий локальный экстремум будет и глобальным. Следовательно, необходимые условия экстремума будут одновременно и достаточными. Найдем эти условия в случае прямой задачи (2.7) с ограничениями (2.2).

Прежде всего заметим, что условия $|h_1| \leq 1$ и $\|h_1\| \leq C$ в W_2^1 , которое в развернутом виде с учетом (1.7) имеет вид

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \leq C^2 \quad (C = \text{const}) \quad (3.2)$$

(C — параметр задачи), не являются независимыми. Действительно, из (3.2) следует, что постоянная C характеризует степень скорости роста функции $h_1(x, y)$ в D , поэтому возможен такой ее выбор, при котором ограничение $|h_1| \leq 1$ будет выполнено в D везде, кроме множества меры нуль.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \kappa_1, \kappa_2) = h_1 \Phi(x, y) - \kappa_1 h_1(x, y) - \kappa_2 |\text{grad } h_1|^2$$

Здесь постоянная κ_1 отвечает за выполнение изопериметрического условия: интеграл по области D от функции h_1 равен нулю, постоянная κ_2 — за выполнение условия (3.2).

Уравнение Эйлера — Лагранжа с соответствующими краевыми условиями имеет вид

$$\Delta h_1(x, y) = \frac{\kappa_1 - \Phi(x, y)}{2\kappa_2}, \quad \left(\frac{\partial h_1}{\partial n}(x, y) \right)_\Gamma = 0 \quad (3.3)$$

где Δ — оператор Лапласа, n — внешняя нормаль к границе Γ области D . Постоянная κ_1 может быть определена заранее из условия

$$\iint_D [\kappa_1 - \Phi(x, y)] dx dy = 0 \quad (3.4)$$

Действительно, интегрируя (3.3) по области D , получим

$$\iint_D \Delta h_1(x, y) dx dy = \int_\Gamma \frac{\partial h_1}{\partial n} ds = 0$$

Решение уравнения (3.3) для всех рассмотренных ниже задач может быть получено в явном аналитическом виде. Постоянная κ_2 и постоянная C в (3.2) находятся из условия $|h_1| \leq 1$, причем $|h_1| = 1$ допускается лишь на множестве меры нуль (точки и линии).

Для приложений интересны те случаи, когда функция $h_1(x, y)$ выходит на ограничения $|h_1| = 1$. Ясно, что при этом экстремальное значение функционала (3.1) будет больше, чем в только что рассмотренном случае.

Пусть $|h_1| = 1$ на множестве $\Sigma \subset D$. Предположим, что функция $h_1(x, y)$ имеет производные по направлению нормали к границе Γ_Σ множества Σ ,

равные нулю. Последнее означает, что функция выходит на ограничения $|h_1|=1$ гладким образом.

Краевая задача (3.3) переходит в задачу отыскания решения уравнения

$$\Delta h_1(x, y) = \frac{1}{2}(\kappa_1 - \Phi(x, y)) / \kappa_2 \quad (3.5)$$

в области Σ с неизвестной границей Γ_Σ , для определения которой заданы условия

$$(h_1)_{\Gamma_\Sigma^+} = 1, \quad (h_1)_{\Gamma_\Sigma^-} = -1, \quad \frac{\partial h_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_\Sigma} = 0 \quad (3.6)$$

Здесь Γ_Σ^+ — часть границы Γ_Σ , на которой функция h_1 выходит на верхнее ограничение, Γ_Σ^- — соответственно на нижнее ($\Gamma_\Sigma^+ \cup \Gamma_\Sigma^- = \Gamma_\Sigma$).

Постоянная κ_1 , как и в случае задачи (3.3), определяется из условия (3.4) с заменой D на Σ .

Кроме того, на положение частей границ Γ_Σ^+ и Γ_Σ^- необходимо задать дополнительное условие, выражающее равенство мер площадей, на которых функция h_1 достигает верхнего и нижнего ограничения. Пусть D^+ — часть множества D , где $h(x, y) = 1$, а D^- — часть D , где $h(x, y) = -1$. Тогда указанное условие имеет вид $S_{D^+} = S_{D^-}$, где S_{D^\pm} — мера площади множеств D^+ и D^- соответственно. Введение ограничения обеспечивает выполнение изопериметрического условия постоянства объема

$$\iint_D h_1 dx dy = 0 \quad (3.7)$$

Заметим, что условие на рост производных функции $h_1(x, y)$ в виде (3.2) имеет однородный вид по переменным x и y . Однако в тех случаях, когда линейные размеры области D по одной из переменных в несколько раз больше, чем линейные размеры D по другой переменной, целесообразно рассматривать условие (3.2), содержащее квадраты производных, с весами K_1 и K_2 , $K_i = \text{const}$ ($i=1, 2$) вида

$$\iint_D \left[K_1^2 \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 + K_2^2 \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.8)$$

Решение задачи с неизвестной границей (3.5), (3.6) в случае более одной переменной имеет известные математические трудности, первопричиной которых является учет ограничения по модулю $|h_1| \leq 1$.

Заменим ограничение $|h_1(x, y)| \leq 1$ на интегральное ограничение

$$\|h_1\|_{L_p} = \left(\iint_D |h_1(x, y)|^p dx dy \right)^{1/p} \leq 1 \quad (p=2n \geq 1) \quad (3.9)$$

При достаточно больших значениях p ограничение (3.9) близко к ограничению по модулю, поскольку

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|h_1\|_{L_p} = \sup_{(x, y) \in D} |h_1|.$$

В [10] показано, что погрешность в выполнении условия $|h_1| \leq 1$ при замене его интегральным ограничением (3.9) имеет порядок $\ln p/p$.

Введение условия (3.9) приводит к регуляризации исходной вариационной задачи (3.1), позволяя получать решения в явном аналитическом виде.

Составим функцию Лагранжа, учитывая лишь условие (3.9) и изопериметрическое условие (3.7).

$$L(x, y, \kappa_1, \kappa_2) = h_1 \Phi(x, y) - \kappa_1 h_1 - \kappa_2 |h_1|^p$$

Соответствующее решение уравнения Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$h_1(x, y) = (\Phi(x, y) - \kappa_1)^q / \kappa_2', \quad \kappa_2' = (p\kappa_2)^q, \quad q = (p-1)^{-1} \quad (3.10)$$

Постоянная κ_1 находится из условия (3.7) и определяется сразу по функции $\Phi(x, y)$ из равенства

$$\iint_D [\kappa_1 - \Phi(x, y)]^q dx dy \quad (3.11)$$

Постоянная κ_2' определяется из условия

$$\iint_D [\Phi(x, y) - \kappa_1]^{p^q} dx dy \leq (\kappa_2')^p \quad (3.12)$$

После отыскания κ_1 и κ_2' по формулам (3.11) и (3.12) необходимо найти постоянную C , при которой выполняется условие (3.2), подставив h_1 , вычисленную по формуле (3.10), в правую часть (3.2) и вычислив соответствующий интеграл.

Из анализа решения (3.10) можно заключить, что при $p \rightarrow \infty$ значение $C \rightarrow \infty$ и в пределе полученное таким образом решение выходит на релейный режим. Ошибка метода, согласно п. 2, имеет порядок $O(\alpha^2)$, поэтому необходимо выбрать значение p в (3.9) таким образом, чтобы $\ln p/p \approx \alpha^2$, что делает предложенный подход оправданным.

Сделаем несколько замечаний относительно решения двойственной задачи. В этом случае ограничение $\lambda^{(1)}(h_1) \geq \Lambda_1$ имеет вид

$$\iint_D h_1(x, y) \Phi(x, y) dx dy \geq \Lambda_1 \quad (\Lambda_1 = \text{const}) \quad (3.13)$$

где $\Phi(x, y)$ — непрерывная и дифференцируемая в D функция.

Составим функцию Лагранжа: $L(x, y, \delta_1, \delta_2) = h_1 - \delta_1 h_1 \Phi(x, y) - \delta_2 |\text{grad } h_1|^2$. Здесь постоянная δ_1 отвечает за выполнение изопериметрического условия (3.13), δ_2 — за выполнение условия (3.2).

Уравнение Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$\Delta h_1(x, y) = (\delta_1 \Phi(x, y) - 1) / (2\delta_2), \quad (\partial h_1 / \partial n)_\Gamma = 0$$

Постоянная δ_1 может быть определена заранее из условия

$$\iint_D [\delta_1 \Phi(x, y) - 1] dx dy = 0$$

Из анализа (3.7) и последнего условия можно заключить, что $\delta_1 = \kappa_1^{-1}$, где κ_1 — постоянный множитель Лагранжа в прямой задаче (3.1). Таким образом, решение двойственной задачи отличается от решения прямой задачи лишь значениями множителей Лагранжа и может быть получено, если известно решение прямой задачи. Такой же вывод справедлив и в других рассмотренных выше случаях.

4. Примеры асимптотического управления спектром упругого стержня. Прежде чем перейти к решению двумерных задач, в качестве иллюстративного примера применения предложенных методов рассмотрим задачи оптимизации критической силы и частот колебаний свободно опертого

стержня переменного сечения. В рассмотренных ниже случаях известны точные решения, что позволяет сравнить их с результатами, полученными по методу возмущений. Отметим, что одномерным задачам оптимизации посвящено большое количество работ, достаточно полную библиографию которых можно найти, например, в [3, 4, 19, 20].

Предполагая, что стержень длины l имеет прямоугольное поперечное сечение постоянной ширины b и переменной высоты $h(x)$, запишем основные соотношения задачи максимизации значения критической силы потери устойчивости

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(h^3 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) + \lambda \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

$$w(0) = w(1) = 0, \quad d^2 w(0)/dx^2 = d^2 w(1)/dx^2 = 0 \quad (4.1)$$

$$x' = x/l, \quad h' = h/h_0, \quad \lambda' = 12l^2 P / (h_0^3 E b)$$

Здесь E — модуль Юнга, P — величина силы, при которой происходит потеря устойчивости, h_0 — начальная высота поперечного сечения стержня. В (4.1) и далее штрихи у безразмерных переменных опущены.

Первое собственное значение невозмущенной задачи (4.1) с $h_0 = 1$ и первая собственная функция определяются равенствами $\lambda^{(0)} = \pi^2$, $w^{(0)} = d \sin \pi x$, $d = \text{const}$.

Функционал $\lambda^{(1)}(h_1)$, определенный равенством (2.7), принимает вид

$$\lambda^{(1)}(h_1) = 3\pi^2 \int_0^1 h_1(x) (1 - \cos 2\pi x) dx \quad (4.2)$$

В соответствии с п. 3 найдем решение вариационной задачи, не выходящее на ограничение $|h_1| = 1$. Такое решение возможно при подходящем значении постоянной C в условии (3.2), которое запишется в виде

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 dx \leq C^2 \quad (4.3)$$

Используя равенство (3.4), получим $\kappa_1 = 3\pi^2$. Краевая задача (3.3) имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} h_1(x) = \frac{3\pi^2 \cos 2\pi x}{2\kappa_2}, \quad \frac{dh_1}{dx}(0) = \frac{dh_1}{dx}(1) = 0$$

Отсюда следует, что $\kappa_2 = 3/8$ и

$$h_1(x) = -\cos 2\pi x \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (4.4)$$

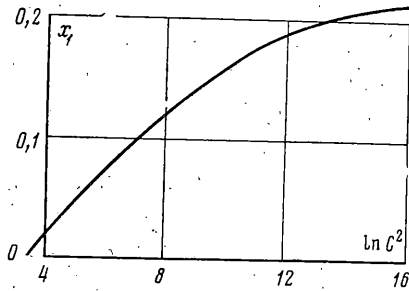
Соответствующее значение постоянной C^2 в (4.3) равно $2\pi^2$. Решение (4.4) дает качественную картину распределения сечений $h(x)$.

Найдем решение вариационной задачи, выходящее на ограничение $|h_1| = 1$. Из анализа решения (4.4) и соображений симметрии вытекает, что если x_1 — точка выхода на нижнее ограничение $h_1 = -1$, а x_2 — на верхнее ограничение $h_1 = 1$, то такими же точками будут точки $1 - x_1$ и $1 - x_2$ соответственно. Из условия $S_D^+ = S_D^-$ следует, что длины интервалов, где $h_1 = -1$ и $h_1 = 1$, должны быть равными и, следовательно, $x_2 = 1/2 - x_1$.

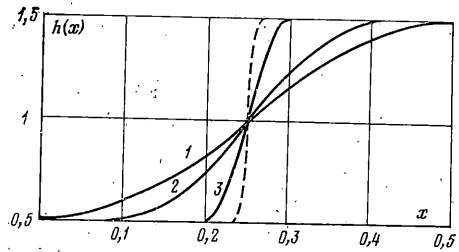
Рассмотрим краевую задачу (3.5), (3.6)

$$d^2 h_1 / dx^2 = [\kappa_1 - 3\pi^2 (1 - \cos 2\pi x)] / (2\kappa_2)$$

$$(h_1)_{x=x_1} = -1, \quad (h_1)_{x=x_2} = 1, \quad (dh_1/dx)_{x=x_1} = (dh_1/dx)_{x=x_2} = 0 \quad (4.5)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Постоянную κ_1 , отвечающую за выполнение изопериметрического условия постоянства объема, найдем по формуле (3.4):

$$\kappa_1 = \frac{3\pi^2}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} (1 - \cos 2\pi x) dx = 3\pi^2$$

Решение краевой задачи (4.5) при $0 \leq x \leq 1/2$ имеет вид

$$h_1(x) = -1 \quad (0 \leq x \leq x_1); \quad h_1(x) = \frac{3}{8\kappa_2} [\cos 2\pi x_1 - \cos 2\pi x - 2\pi(x - x_1) \sin 2\pi x_1] - 1, \quad \left(x_1 \leq x \leq \frac{1}{2} - x_1\right)$$

$$h_1(x) = 1 \quad (1/2 - x_1 \leq x \leq 1/2) \quad (4.6)$$

Точка x_1 выхода на нижнее ограничение и постоянная κ_2 определяется из равенства

$$\frac{9}{16} \frac{\pi^2}{\kappa_2^2} \left[\frac{1}{2} - 2x_1 + \frac{3}{4\pi} \sin 4\pi x_1 - \frac{1}{4} (1 - 4x_1) \cos 4\pi x_1 \right] \leq C^2$$

$$^{3/8} [\sin 2\pi(1/4 - x_1) - 2(1/4 - x_1) \sin 2\pi x_1] \kappa_2^{-1} = 2$$

где C — постоянная, фигурирующая в условии (4.3). В частности, при $\kappa_2 = 0$ решение вариационной задачи имеет релейную структуру

$$h_1 = -1 \quad (0 \leq x \leq 1/4), \quad h_1 = 1 \quad (1/4 < x < 3/4), \quad h_1 = -1 \quad (3/4 \leq x \leq 1)$$

что соответствует случаю неограниченных значений производных от функции $h_1(x)$ ($C = \infty$).

На фиг. 1 показана зависимость величины x_1 от значения величины $\ln C^2$. В общем случае значения x_1 и x_2 меняются в пределах $0 \leq x_1 \leq 1/4$, $1/4 \leq x_2 \leq 3/4$.

На фиг. 2 даны распределения сечений при $x_1 = 0,1$ (кривая 2), $x_1 = 0,2$ (кривая 3). Распределение сечений без выхода на ограничения, полученное по формуле (4.4), представлено кривой 1.

Применим к поставленной вариационной задаче метод регуляризации, заменяя ограничение по модулю интегральным ограничением (3.9).

В этом случае, согласно (3.10) — (3.12):

$$h_1(x) = -(\cos 2\pi x)^q \left[\int_0^1 (\cos 2\pi x)^{pq} dx \right]^{-1/p} \quad (p = 2n) \quad (4.7)$$

На фиг. 2 пунктиром отмечено решение, полученное по формуле (4.7) при $n = 50$.

Максимальное значение функционала $\lambda^1(h_1)$, определенного равенством (4.2), в случае решения (4.4) равно $3\pi^2/2$. В случае решения (4.6) с большими значениями постоянной C в условии (4.3) значение $\lambda^{(1)}(h_1)$ приближается к величине 6π . В решении, полученном по формуле (4.7), значение функционала при $p=2n=100$ близко к $2\pi^2$.

Относительный выигрыш по функционалу для решений, полученных по формуле $\eta=\alpha(\lambda^{(1)}/\lambda^{(0)})100\%$, колеблется от $3/2\alpha100\%$ до $2\alpha100\%$. Погрешность в вычислении выигрыша имеет порядок $\alpha^2100\%$.

Качественно характер распределения сечений близок к оптимальному, полученному в цитированных выше работах.

Как уже отмечалось в п. 3, решение двойственной задачи можно получить из решения прямой задачи. Непосредственные вычисления показывают, что в этом случае оба решения тождественно совпадают. Значение постоянной Λ_1 , при котором двойственная задача имеет решения, не превосходит величины $2\pi^2$. Относительный выигрыш в весе по сравнению со стержнем постоянного сечения, выдерживающим то же значение силы, что и полученный стержень переменного сечения, составляет от $1/2\alpha100\%$ до $3/2\alpha100\%$. Погрешность в оценке выигрыша имеет порядок $\alpha^2100\%$.

Аналогичные исследования можно провести в задаче максимизации первой частоты колебаний свободно опертого стержня переменного сечения. В этом случае уравнение состояния и граничные условия имеют вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(h^3(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) - \lambda h(x) w(x) = 0, \quad \lambda = \frac{12l^4 \rho \Omega^2}{E h_0^2}$$

$$w(0) = w(1) = 0, \quad \left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=1} = 0$$

Здесь использованы те же безразмерные переменные, что и в случае задачи о потере устойчивости, причем ρ — плотность материала, Ω — частота колебаний.

Решение вариационной задачи в этом случае отличается от только что рассмотренного лишь постоянным множителем, поскольку оптимизируемый функционал имеет вид

$$\lambda^{(1)}(h_1) = 2\pi^4 \int_0^1 h_1(x) (1 - \cos 2\pi x) dx$$

5. О применимости решений плоского напряженного состояния для пластин переменной толщины. При решении двумерных задач оптимизации устойчивости сжатых в своей плоскости пластин требуется отыскать напряженное состояние внутри пластин. Обычно значения компонент напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} в (1.3) для пластин постоянной толщины находятся из решений плоской, либо обобщенно плоской задачи теории упругости. Так как в рассматриваемом случае толщина пластины варьируется, необходимо проверить пригодность этих решений и оценить характер влияния на них малых, симметричных относительно срединной плоскости изменений толщины по закону (2.1). Задача о равновесии пластины переменной толщины рассматривалась ранее в [21, 22]. Предлагаемый ниже подход основан на использовании средних интегральных значений для напряжений.

Рассмотрим случай нагружения пластинки переменной толщины $-h(x, y) \leq z \leq h(x, y)$ силами, лежащими в ее плоскости и симметричными относительно срединной поверхности $z=0$.

Пусть $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ — перемещения в точке x, y, z , $(x, y) \in D$, $|z| \leq h(x, y)$. В силу симметричности условий нагружения предположим, что напряженное состояние пластинки характеризуется таким распределением смещения $w(x, y, z)$, что $w(x, y, z) = -w(x, y, -z)$. В соответствии с гипотезой Кирхгофа — Лява полагаем, что компонента напряжения σ_z исчезает всюду в пластинке, т. е. $\sigma_z(x, y, z) = 0$. Для краткости записи обозначим далее символом ξ точку пластинки с координатами (x, y, z) , символом η — точку с координатами (x, y, h) ; символом γ — соответственно (x, y) .

Через $u^\circ(\gamma)$ и $v^\circ(\gamma)$ обозначим осредненные по толщине пластинки перемещения

$$u^\circ(\gamma) = \frac{1}{2h(\gamma)} \int_{-h(\gamma)}^{h(\gamma)} u(\xi) dz, \quad v^\circ(\gamma) = \frac{1}{2h(\gamma)} \int_{-h(\gamma)}^{h(\gamma)} v(\xi) dz \quad (5.1)$$

В соответствии со сделанными предположениями $w^\circ(\gamma) = 0$. Через ε_x^\sim обозначим среднее от компоненты деформации ε_x :

$$\varepsilon_x^\sim = \frac{1}{2h(\gamma)} \int_{-h(\gamma)}^{h(\gamma)} \frac{\partial u(\xi)}{\partial x} dz$$

Аналогично вводятся ε_y^\sim , γ_{xy}^\sim , γ_{xz}^\sim , γ_{yz}^\sim , ε_z^\sim . В силу симметрии условий нагружения $u(x, y, h) = u(x, y, -h)$, $v(x, y, h) = v(x, y, -h)$, поэтому будем иметь

$$\gamma_{xz}^\sim = \frac{1}{2h(\gamma)} \int_{-h(\gamma)}^{h(\gamma)} \left(\frac{\partial w(\xi)}{\partial x} + \frac{\partial u(\xi)}{\partial z} \right) dz = 0, \quad \gamma_{yz}^\sim = 0, \quad \varepsilon_z^\sim = \frac{w(\eta)}{h(\gamma)} \quad (5.2)$$

Интегрируя от $-h(\gamma)$ до $h(\gamma)$ и деля на $2h(\gamma)$ соотношения закона Гука, принимая во внимание гипотезу $\sigma_z = 0$ и последние равенства, получим (λ, μ — константы Ляме):

$$\sigma_x^\sim = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_x^\sim + \lambda \left(\varepsilon_y^\sim + \frac{w(\eta)}{h(\gamma)} \right)$$

$$\sigma_y^\sim = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_y^\sim + \lambda \left(\varepsilon_x^\sim + \frac{w(\eta)}{h(\gamma)} \right)$$

$$\sigma_z^\sim = (\lambda + 2\mu) \frac{w(\eta)}{h(\gamma)} + \lambda (\varepsilon_x^\sim + \varepsilon_y^\sim)$$

$$\tau_{xy}^\sim = \mu \gamma_{xy}^\sim, \quad \tau_{yz}^\sim = \tau_{xz}^\sim = 0$$

Выражая $w(\eta)/h(\gamma)$ из третьего уравнения и подставляя это значение в остальные уравнения, приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \sigma_x^\sim &= 2\mu \varepsilon_x^\sim + \lambda^* (\varepsilon_x^\sim + \varepsilon_y^\sim), & \sigma_y^\sim &= 2\mu \varepsilon_y^\sim + \lambda^* (\varepsilon_x^\sim + \varepsilon_y^\sim) \\ \tau_{xy}^\sim &= \mu \gamma_{xy}^\sim, & \tau_{yz}^\sim &= \tau_{xz}^\sim = 0, & \lambda^* &= 2\mu\lambda / (2\mu + \lambda) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Рассмотрим теперь компоненты деформации, полученные как производные от средних значений перемещений $u^\circ(\gamma)$ и $v^\circ(\gamma)$, определенных равенствами (5.1). В отличие от рассмотренных ранее компонент дефор-

мации будем обозначать их

$$\varepsilon_x^\circ = \partial u^\circ / \partial x, \quad \varepsilon_y^\circ = \partial v^\circ / \partial y, \quad \gamma_{xy}^\circ = \partial u^\circ / \partial y + \partial v^\circ / \partial x$$

Для сокращения дальнейшей записи введем обозначения

$$\ln h(\gamma) = H(\gamma), \quad u(\eta) - u^\circ(\gamma) = \delta u(\gamma) \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\eta) - \frac{1}{2h(\gamma)} \int_{-h(\gamma)}^{h(\gamma)} \frac{\partial u(\xi)}{\partial x} dz = \delta u_x(\gamma)$$

Аналогично вводятся: $\delta v(\gamma)$, $\delta u_y(\gamma)$, $\delta v_x(\gamma)$, $\delta v_y(\gamma)$.

Сравнивая (5.4) и (5.2), получим следующие соотношения между компонентами деформаций:

$$\varepsilon_x^\sim = \varepsilon_x^\circ - H_x(\gamma) \delta u(\gamma), \quad \varepsilon_y^\sim = \varepsilon_y^\circ - H_y(\gamma) \delta v(\gamma)$$

$$\gamma_{xy}^\sim = \gamma_{xy}^\circ - H_y(\gamma) \delta u(\gamma) - H_x(\gamma) \delta v(\gamma)$$

Здесь и далее индексы внизу у функции $H(\gamma)$ и других функций обозначают частные производные от функций по x и y .

Отсюда с учетом (5.3) следуют равенства

$$\sigma_x^\sim = 2\mu \varepsilon_x^\circ + \lambda^* (\varepsilon_x^\circ + \varepsilon_y^\circ) - 2\mu H_x \delta u - \lambda^* (H_x \delta u + H_y \delta v)$$

$$\sigma_y^\sim = 2\mu \varepsilon_y^\circ + \lambda^* (\varepsilon_y^\circ + \varepsilon_x^\circ) - 2\mu H_y \delta v - \lambda^* (H_y \delta v + H_x \delta u)$$

$$\tau_{xy}^\sim = \mu \tau_{xy}^\circ - \mu (H_y \delta u + H_x \delta v), \quad \tau_{xz}^\circ = \tau_{yz}^\circ = 0 \quad (5.5)$$

Проинтегрируем трехмерные уравнения равновесия теории упругости, записанные через компоненты напряжений $\sigma_x(\xi)$, $\tau_{xy}(\xi)$, $\sigma_y(\xi)$, $\tau_{yz}(\xi)$, $\tau_{xz}(\xi)$, $\sigma_z(\xi)$ по толщине пластинки. Вследствие того, что $\sigma_z = \sigma_z^\sim = 0$ и $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$, последнее из проинтегрированных уравнений тождественно выполняется. Первые два после интегрирования и деления на $2h$ примут вид (ср. [23] для пластинки постоянной толщины)

$$\partial \sigma_x^\sim / \partial x + \partial \tau_{xy}^\sim / \partial y = 0, \quad \partial \tau_{xy}^\sim / \partial x + \partial \sigma_y^\sim / \partial y = 0$$

Используя равенства (5.5) и введенные обозначения, получим уравнения, записанные через компоненты перемещений $u^\circ(\gamma)$ и $v^\circ(\gamma)$, первое из которых имеет вид

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial y^2} \right) + (\lambda^* + \mu) \left(\frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^\circ}{\partial x \partial y} \right) = & (2\mu + \lambda^*) H_x (\delta u_x + u_z(\eta) h_x - \\ & - H_x \delta u) + \lambda^* H_y (\delta v_x + v_z(\eta) h_x - H_x \delta v) + \mu H_y (\delta u_y + u_z(\eta) h_y - H_y \delta u) + \\ & + \mu H_x (\delta v_y + v_z(\eta) h_y - H_y \delta v) + \mu (H_{xx} + H_{yy}) \delta u + (\lambda^* + \mu) (H_{xx} \delta u + H_{xy} \delta v) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Второе уравнение имеет аналогичную структуру.

К этим уравнениям необходимо добавить проинтегрированные по толщине граничные условия на боковых поверхностях пластинки $u^\circ(\gamma) = f_1(\gamma)$, $v^\circ(\gamma) = f_2(\gamma)$ ($\gamma \in \Gamma$).

Положим $h(\gamma) = h_0 + \alpha h_1(\gamma)$, $h_0 = \text{const}$ (α — малый параметр) и предположим, что $h_1(\gamma)$ — гладкая, дважды дифференцируемая функция по x и y , такая, что $|h_{1x}|$, $|h_{1y}|$, $|h_{1xx}|$, $|h_{1xy}|$, $|h_{1yy}|$ не превосходят $M_1 \alpha^\delta$ с некоторой постоянной M_1 и $\delta > 0$ при любых $\gamma = (x, y) \in D$, и $(\partial h_1 / \partial n)_\Gamma = 0$.

Так как $H(\gamma) = \ln h(\gamma)$, то H_x , H_y , H_{xx} , H_{yy} , H_{xy} имеют порядок малости, не превосходящий $\alpha^{1+\delta} M_1 h_0^{-1}$, $\delta > 0$. Величины δu , δv , δu_x , δu_y , δv_x , δv_y

могут быть легко оценены через постоянную M_2 . В итоге правые части уравнений (5.6) имеют порядок $M\alpha^{1+\delta}$, где $M=M_1M_2$ с точностью до членов порядка $o(\alpha^{1+\delta})$.

Рассмотрим прямоугольную пластинку $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ постоянной толщины h_0 . Пусть пластинка со смазанными торцами сжата в своей плоскости на величину u_0 и v_0 соответственно вдоль x и y . Решение плоской задачи теории упругости в перемещениях для данной пластинки имеет вид

$$u = -u_0 x/a, \quad v = -v_0 y/b, \quad w = (u_0/a + v_0/b)z/(1-\nu)$$

что в силу (5.7) отвечает действию постоянных сжимающих напряжений

$$\sigma_x \checkmark = -E \left(\frac{u_0}{a} + \frac{\nu v_0}{b} \right) / (1-\nu^2), \quad \sigma_y \checkmark = -E \left(\frac{v_0}{b} + \frac{\nu u_0}{a} \right) / (1-\nu^2), \quad \tau_{xy} \checkmark = 0 \quad (5.7)$$

Полученные таким образом напряжения $\sigma_x \checkmark$, $\sigma_y \checkmark$ и $\tau_{xy} \checkmark$ будем считать действующими в срединной поверхности пластинки переменной толщины и использовать их значения вместо напряжений σ_x , σ_y и σ_z , стоящих в правой части оператора $T(h)$ -в (1.3).

Из проведенных рассуждений следует, что ошибки в вычислении σ_x , σ_y и τ_{xy} при замене их на $\sigma_x \checkmark$, $\sigma_y \checkmark$, $\tau_{xy} \checkmark$ соответственно будут иметь порядок $M\alpha^{1+\delta}$. Заметим, что условие $(\partial h_i / \partial n)_\Gamma = 0$ в силу (3.3) является необходимым условием оптимальности для вариационной задачи (3.1), (3.2).

6. Оптимизация устойчивости и частоты колебаний прямоугольной пластины переменной толщины. Рассмотрим сжатую в своей плоскости вдоль осей x и y соответственно на u_0 и $u_0 b/a$ смазанную по торцам свободно опертую прямоугольную пластину $D = \{x, y: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, имеющую симметричную относительно срединной поверхности переменную толщину $2h(x, y)$. Компоненты напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} определяются при этом, согласно п. 5, с точностью до $O(\alpha^{1+\delta})$, $\delta > 0$ из решения плоской задачи теории упругости в перемещениях (5.6) и равны $\sigma_x = \sigma_y = -Eu_0/[a(1-\nu)]$, $\tau_{xy} = 0$.

Запишем уравнение равновесия пластины (1.1)–(1.3) и граничные условия свободного опирания (1.5) ($\Gamma_1 = \Gamma$) в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} x' &= x(ab)^{-1/2}, & y' &= y(ab)^{-1/2}, & u_0' &= u_0(ab)^{-1/2}, \\ \sigma_x' &= \sigma_x E^{-1}, & \sigma_y' &= \sigma_y E^{-1}, & \tau_{xy}' &= \tau_{xy} E^{-1}, \\ h' &= hh_0^{-1}, & k &= b^{1/2}a^{-1/2}, & \lambda' &= 3(1+\nu)bh_0^{-2}u_0. \end{aligned}$$

Толщина пластинки меняется по закону (2.1) и, следовательно, на границе прямоугольника $0 \leq x' \leq k^{-1}$, $0 \leq y' \leq k$ не обращается в нуль.

Поставим задачу оптимизации. Требуется максимизировать собственное число $\lambda' = \lambda'(h', u_0')$ при ограничениях на управляющую функцию (1.6). Штрихи у безразмерных переменных будем опускать. Применим для решения составленной оптимизационной задачи метод возмущений. Первое собственное значение невозмущенной задачи с $h_0 = 1$ определяется по формуле $\lambda^{(0)} = \pi^2 R$, $R = (k^2 + k^{-2})$, а первая собственная функция $w^{(0)}(x, y) = d \sin k\pi x \sin k\pi y$, $d = \text{const}$. Выражение (2.7), определяющее величину поправки первого собственного значения, примет вид

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)}(h_1) &= \frac{r_5}{r_6}, & r_5 &= \int_0^{k^{-1}} dx \int_0^k h_1(x, y) \{ 3[(w_{xx}^{(0)})^2 + (w_{yy}^{(0)})^2 + \\ &+ 2\nu w_{xx}^{(0)} w_{yy}^{(0)} + 2(1-\nu)(w_{xy}^{(0)})^2] - \lambda^{(0)}[(w_x^{(0)})^2 + (w_y^{(0)})^2] \} dy \end{aligned}$$

$$r_6 = \int_0^{h^{-1}} dx \int_0^h [(w_x^{(6)})^2 + (w_y^{(6)})^2] dy$$

Выполняя необходимые вычисления, получим

$$\lambda^{(1)}(h_1) = \int_0^{h^{-1}} dx \int_0^h h_1(x, y) \Phi^{h, \nu}(x, y) dy \quad (6.1)$$

$$\Phi^{h, \nu}(x, y) = 4\pi^2 [3(k^4 + k^{-4} + 2\nu) \sin^2 k\pi x \sin^2 k^{-1}\pi y +$$

$$+ 6(1-\nu) \cos^2 k\pi x \cos^2 k^{-1}\pi y - R(k^2 \cos^2 k\pi x \sin^2 k^{-1}\pi y +$$

$$+ k^{-2} \sin^2 k\pi x \cos^2 k^{-1}\pi y)] R^{-1}$$

Максимальное значение функционала (6.1) ищется по всем $h_1 \in Q_1$, определенного равенством (2.2). При этом интегральное ограничение на рост производных запишем с учетом того, что длины сторон b/a прямоугольника относятся как k^2 , $k \leq 1$. В соответствии с замечанием п. 3 запишем условие (3.2) в виде

$$\int_0^{h^{-1}} dx \int_0^h \left[k^{-2} \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 + k^2 \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} \right)^2 \right] dy \leq C^2 \quad (6.2)$$

Условие (6.2) обеспечивает более медленный рост производных вдоль длинной стороны прямоугольника и во столько же раз быстрый рост производных вдоль короткой стороны прямоугольника, сохраняя одинаковый порядок значений функции $h_1(x, y)$ вдоль длинных и коротких сторон прямоугольника.

Рассмотрим случай, когда функция $h_1(x, y)$ выходит на ограничения $|h_1(x, y)| = 1$ лишь на множестве нулевой меры (точки и линии на плоскости). В соответствии с п. 3 краевая задача (3.3) с учетом (6.2) запишется в виде

$$k^{-2} \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + k^2 \frac{\partial^2 h_1}{\partial y^2} = (2\kappa_2)^{-1} F^{h, \nu}(x, y) \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial h_1}{\partial x}(k^{-1}, y) = \frac{\partial h_1}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial h_1}{\partial y}(x, k) = 0$$

$$F^{h, \nu}(x, y) = 2\pi^2 R - \Phi^{h, \nu}(x, y)$$

Решение краевой задачи (6.3) находится в явном аналитическом виде

$$h_1(x, y) = \{R \cos 2k\pi x \cos 2\pi k^{-1}y - R^{-1} [(2k^4 + k^{-4} + 6\nu - 3) \cos 2\pi kx -$$

$$- (k^4 + 2k^{-4} + 6\nu - 3) \cos 2k^{-1}\pi y]\} (4\kappa_2)^{-1} \quad (6.4)$$

Постоянная κ_2 ищется из условия $|h_1(x, y)| \leq 1$. После чего из условия (6.2) находятся все значения параметра C , при которых исходная задача не выходит на ограничения $|h_1| = 1$ на множестве положительной меры.

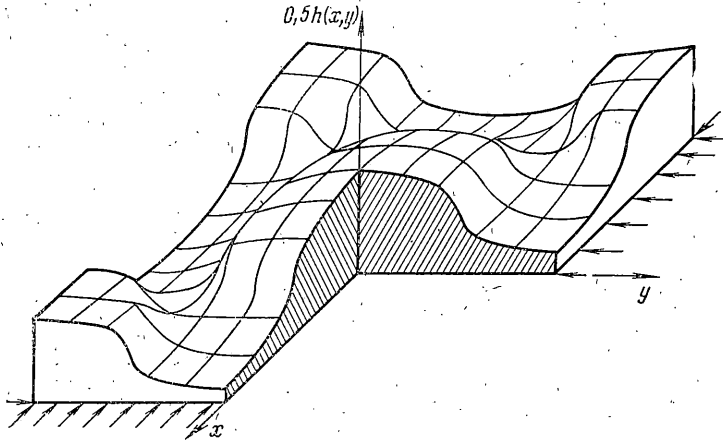
Для получения решения с учетом ограничения $|h_1| \leq 1$ применим метод регуляризации, предложенный в п. 3, заменяя ограничение по модулю интегральным ограничением (3.9) с $p = 2n \geq 2$ и полагая в формулах (3.10)–(3.12) $\Phi = \Phi^{h, \nu}(x, y)$, где функция $\Phi^{h, \nu}(x, y)$ определена равенством (6.1).

На фиг. 3–5 в соответственном масштабе показаны распределения толщин пластинок, полученных методом регуляризации с $p = 100$ при $k = 1; 0,7; 0,5$ ($k = (b/a)^{1/2}$). Для наглядности оси координат перенесены в

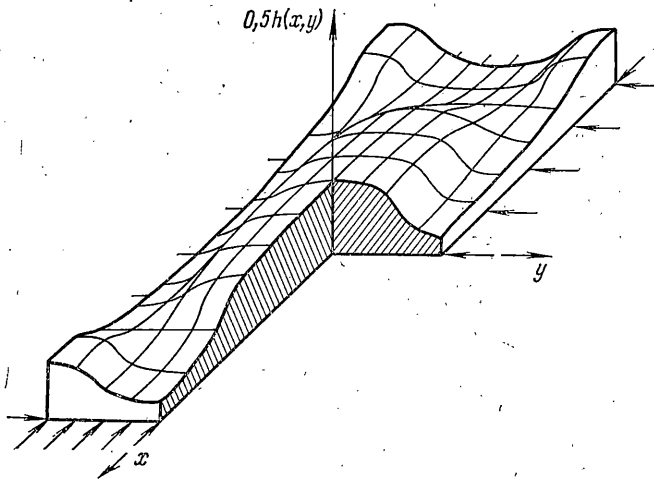
центр области D : $x=0,5$; $y=0,5$, а верхняя относительно срединной поверхности часть пластинки изображена с вырезанной четвертью.

При удлинении одной из сторон пластинки выпуклости в углах уменьшаются. При $k=0,5$ ($a/b=4$) пластинка по форме близка к стержню переменного сечения, полученного в задаче оптимизации устойчивости стержней [1].

На фиг. 6, 7 даны сечение $x=0,5$ и диагональное сечение квадратной пластинки при различных значениях коэффициента Пуассона. Индекса-



Фиг. 3



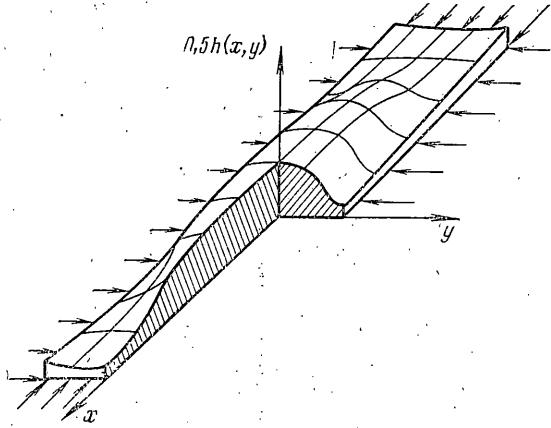
Фиг. 4

ми 1, 2 и 3 отмечены кривые, соответствующие значениям $\nu=0$; 0,25; 0,5. Кривые получены по формуле (6.4).

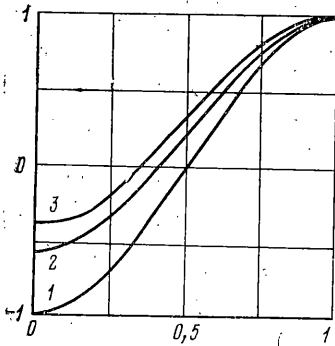
В случае квадратной пластинки при $\nu=1/3$ относительный выигрыш по функционалу $\eta=\alpha(\lambda^{(1)}/\lambda^{(0)})100\%$ равен $5/2\alpha100\%$. При $q=0,5$ ($a/b=4$) и том же значении ν выигрыш $\eta=4,23\alpha100\%$. Погрешность в вычислении выигрыша имеет порядок $\alpha^{1+\delta}100\%$.

В случае решения двойственной задачи относительный выигрыш в весе составляет при $k=1$ и $k=0,5$ ($\nu=1/3$) соответственно $5/6\alpha100\%$ и $1,41\alpha100\%$.

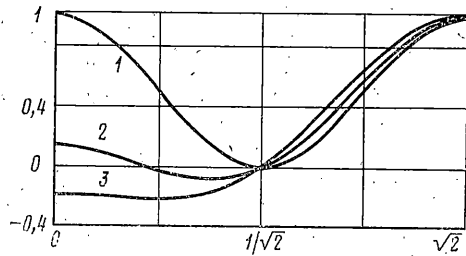
Применим метод возмущений к задаче оптимизации первой собственной частоты колебаний свободно опертой прямоугольной пластинки переменной толщины. Уравнение состояния имеет вид (1.1), где $T(h)$ определено формулой (1.3). Здесь и далее использованы безразмерные пере-



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

менные x' , y' , h' , причем $\lambda' = 3(1-\nu^2)\rho\omega^2 h_0^{-2} E^{-1} (ab)^2$, где ω — частота колебаний (штрихи опущены).

Первое собственное значение невозмущенной задачи с $h_0=1$ определяется по формуле $\lambda_1^{(0)} = \pi^4 R^2$ ($R = k^2 + k^{-2}$), а первая собственная функция $w^{(0)}(x, y) = d \sin k\pi x \sin k^{-1}\pi y$, $d = \text{const}$.

Формула (2.7) для поправки первого собственного значения имеет вид (6.1), где

$$\Phi^h, \nu(x, y) = 8\pi^4 [(k^4 + k^{-4} + 3\nu - 1) \sin^2 k\pi x \sin^2 k^{-1}\pi y + 3(1-\nu) \cos^2 k\pi x \cos^2 k^{-1}\pi y]$$

Точное аналитическое решение краевой задачи (6.3) имеет вид

$$h_1(x, y) = \pi^2 [1/2 R^2 \cos 2k\pi x \cos 2k^{-1}\pi y - (k^4 + k^{-4} + 6\nu - 4) (\cos 2k\pi x + \cos 2k^{-1}\pi y)] (4\kappa_2)^{-1} \quad (6.5)$$

Аналогичным образом ищутся решения с использованием метода регуляризации по формулам (3.10) — (3.12).

Второе собственное значение невозмущенной задачи и вторая собственная функция определяются по формулам

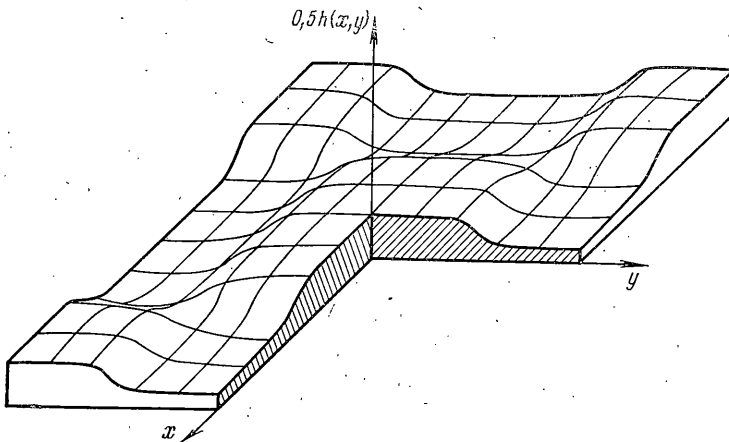
$$\lambda_2^{(0)} = \pi^4 (4k^2 + k^{-2})^2$$

$$w_2^{(0)}(x, y) = d \sin 2k\pi x \sin k^{-1}\pi y \quad (d = \text{const}, k \leq 1)$$

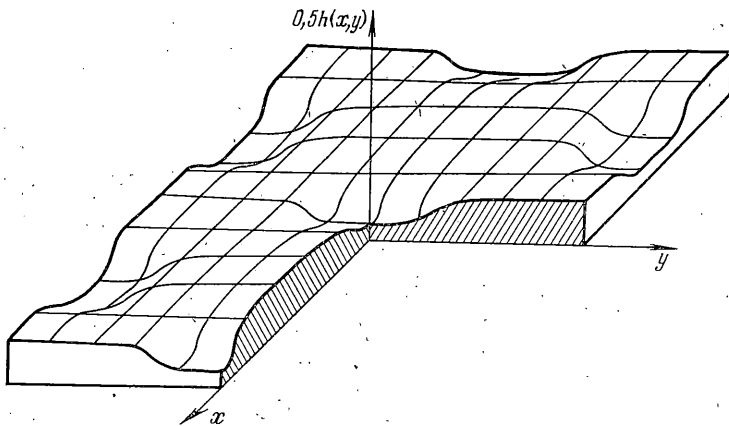
Проводя соответствующие вычисления по формуле (2.7), получим

$$\Phi^{h, \nu}(x, y) = 2(16k^4 + k^{-4} - 4 + 12\nu) \sin^2 2k\pi x \sin^2 k^{-1}\pi y + 24(1 - \nu) \cos^2 2k\pi x \cos^2 k^{-1}\pi y \quad (\kappa_1 = 1/2(2k^2 + k^{-2})^2)$$

На фиг. 8 показаны распределения толщин квадратной пластинки, доставляющих максимум функционалу $\lambda_1^{(1)}(h_1)$ (максимизация первой соб-



Фиг. 8

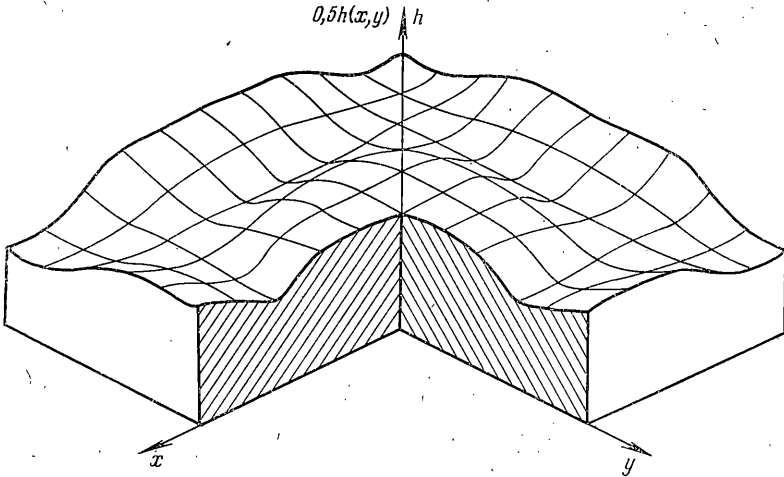


Фиг. 9

ственной частоты). Распределения, соответствующие максимуму функционала $\lambda_2^{(1)}(h_1)$ (максимизация второй собственной частоты), представлены на фиг. 9. Первая пластинка (фиг. 8) по форме близка к пластинке (фиг. 3), соответствующей задаче оптимизации устойчивости при сжатии вдоль оси x и y .

Выигрыш в случае квадратной пластинки при $\nu=1/3$ для решения (6.5) равен $2\alpha 100\%$. При $k=0,5$ ($k=(b/a)^{1/2}$) выигрыш равен $1,66\alpha 100\%$. Выигрыш получен с ошибкой порядка $\alpha^2 100\%$. Относительный выигрыш в весе для двойственной задачи составляет соответственно $2/3\alpha 100\%$ и $0,5\alpha 100\%$ с погрешностью $\alpha^2 100\%$.

Рассмотрим задачу о потере устойчивости равномерно сжатой в направлении оси x и оси y квадратной пластинки, жестко закрепленной на



Фиг. 10

контуре Г. Для определения компонент напряжения, так же как и в случае свободно опертой пластинки, используем решение (5.7).

Первое собственное значение невозмущенной задачи (1.1) при соответствующих граничных условиях согласно [24] заключено в пределах от $5,3036 \pi^2$ до $5,31173 \pi^2$.

Рассмотрим функцию $w^{(0)}=d(1-\cos 2\pi x)(1-\cos 2\pi y)$ в качестве приближения к первой собственной функции невозмущенной задачи. Соответствующая этой функции приближенная величина первого собственного значения равна $5,33 \pi^2$ [25] и отличается от истинного с относительной погрешностью, не превышающей $0,5\%$.

Выражения для поправки величины первого собственного значения согласно (2.7) имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)}(h_1) = & 16\pi^4 \int_0^1 dx \int_0^1 \{ (12 - 17,33 \sin^2 2\pi y) \sin^4 \pi x + \\ & + (12 - 17,33 \sin^2 2\pi x) \sin^4 \pi y + 24[\nu \cos 2\pi x \cos 2\pi y + \\ & + 4(1 - \nu^2) \cos^2 \pi x \cos^2 \pi y] \sin^2 \pi x \sin^2 \pi y \} h_1(x, y) dy \end{aligned}$$

На фиг. 10 показано оптимальное распределение толщины, полученное методом регуляризации по формулам (3.10)–(3.12). В отличие от свободно опертой пластинки жестко закрепленная имеет впадины в углах и утолщения в центральной части границы.

Аналогичные рассмотрения для задачи оптимизации первой собственной частоты колебаний в случае жестко закрепленной квадратной пластинки приводит к функционалу

$$\lambda^{(1)}(h_1) = 16\pi^4 \int_0^1 dx \int_0^1 \{ 12 \cos^2 2\pi x \sin^4 \pi y + 12 \cos^2 2\pi y \sin^4 \pi x +$$

$$+ (24\nu \cos 2\pi x \cos 2\pi y + 96(1-\nu) \cos^2 \pi x \cos^2 \pi y - \\ - 14,22 \sin^2 \pi x \sin^2 \pi y) \sin^2 \pi x \sin^2 \pi y \} h_1(x, y) dy$$

Здесь, в качестве приближения к первому собственному значению, взята та же функция $w^{(0)}$, что и в задаче устойчивости. Однако относительная ошибка в вычислении первого собственного значения составляет 6,6%, поскольку истинное значение заключено в интервале ($13,282 \pi^4$; $13,384 \pi^4$) [25], а приближенная величина первого собственного значения, полученного при помощи функции $w^{(0)}$, равна $14,222 \pi^4$.

Качественно картина распределения толщин в этом случае идентична распределению, полученному в задаче о потере устойчивости (фиг. 10).

Ранее в [7, 8, 10] численно и аналитически³ изучались аналогичные задачи оптимизации жесткости и прочности. На основании сравнения качественных картин распределения толщин в задачах оптимизации устойчивости, первой частоты колебаний, жесткости и прочности можно заключить: характер распределения толщин во всех перечисленных оптимизационных задачах зависит лишь от граничных условий и на него слабо влияет оптимизируемый функционал (параметр потери устойчивости, частота колебаний, жесткость, прочность). Это позволяет сделать вывод о том, что найденное распределение толщин является универсальным для задач оптимизации устойчивости, первой частоты колебаний, жесткости и прочности. Полученные решения дают дополнительную информацию о рациональном направлении подкрепляющих элементов с целью оптимизации перечисленных выше функционалов (устойчивость, частота, жесткость, прочность). Так, для свободно опертых квадратных пластинок такими направлениями будут диагонали пластинки, а для жестко закрепленных — направления, перпендикулярные серединам сторон пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ниордсен Ф., Педерсон Р. Обзор исследований по оптимальному проектированию конструкций.— Механика: Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1973, № 2, с. 136—158.
2. Лепик Ю. Р. Применение принципа максимума Понтрягина в задачах прочности, устойчивости и колебаний тонкостенных конструкций.— Механика: Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1974, № 6, с. 126—141.
3. Olhoff N. A survey of optimal design of vibrating structural elements.— Shock and vibration digest, 1976, v. 8, p. 3—10.
4. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
5. Olhoff N. Optimal design of vibrating rectangular plates.— Internat. J. Solids Struct., 1974, v. 10, No. 10, p. 93—109.
6. Арман Ж.-Л. П. Приложения теории оптимального управления системами. М.: Мир, 1977. 142 с.
7. Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Миронов А. А. Численное решение двумерных задач оптимизации упругих пластин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1, с. 68—77.
8. Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Миронов А. А. Задачи оптимизации с локальными критериями качества в теории изгиба пластин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 1, с. 124—131.
9. Haug E. J., Arora J. S. Applied Optimal Design (Mechanical and Structural Systems). N. Y.: Wiley, 1979. 506 p.
10. Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Миронов А. А. Об одном численном методе решения двумерных задач оптимизации в теории упругости.— Материалы V Всес. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1978, с. 3—14.
11. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.

³ Братусь А. С., Каргвелишвили В. М. Указ. публ., с. 123.

12. Лигвинов В. Г. Задача оптимального управления собственной частотой пластины переменной толщины.— Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1979, № 4, с. 866—877.
13. Seyranian A. P. Homogeneous functionals and structural optimization problems.— Internat. J. Solids Struct., 1979, v. 15, No. 4, p. 749—759.
14. Rellich F. Störungstheorien der Spektralzerlegung. II.— Math. Ann., 1936, v. 113, p. 600—619.
15. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.
16. Коллатц Л. Задачи на собственное значение. М.: Наука, 1968. 503 с.
17. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.—Л.: Гостехиздат, 1933. 525 с.
18. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
19. Троицкий В. А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л.: Машиностроение, 1976. 248 с.
20. Гринев В. Б., Филиппов А. П. Оптимизация стержней по спектру собственных значений. Киев: Наукова думка, 1979. 211 с.
21. Лурье А. И. К задаче о равновесии пластины переменной толщины.— Тр. Ленингр. индустр. ин-та, 1936, № 6, с. 57—80.
22. Колос А. В. Об уравнениях напряженного состояния пластинки переменной толщины.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 6, с. 1050—1065.
23. Новожилов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
24. Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: Мир, 1970. 328 с.
25. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1946. 532 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.II.1981