

УДК 539.3:534.1

ВЛИЯНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ НАГРУЗКИ НА РЕАКЦИЮ ПЛАСТИНЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

ПОЖУЕВ В. И.

Действие подвижной линейной нагрузки, приложенной к пластине на упругом полупространстве, исследовано в [1]. Обобщение указанной задачи на случай многослойного основания проведено в [2]. Работа [3] посвящена определению области контакта пластины с многослойным основанием при односторонней связи между контактирующими телами и оценке влияния скорости движения нагрузки на размеры зоны контакта. Во всех этих исследованиях скорость движения нагрузки меньше скорости распространения волн сдвига в основании, поэтому движение основания описывается уравнениями эллиптического типа. Реакция пластины, лежащей на упругом полупространстве, на действие нормальной нагрузки, перемещающейся со сверхсейсмической скоростью, рассмотрена в [4]. Движение полупространства описывается при этом уравнениями гиперболического типа.

В публикуемой работе изучается влияние скорости движения нормальной линейной нагрузки на реакцию бесконечной пластины, лежащей на упругом слое конечной толщины. Нижней границей слой опирается на абсолютно жесткое полупространство. Контакт между пластиной и основанием принят скользящим, а связь — двусторонней. Скорость движения нагрузки с постоянна, но может принимать различные значения от меньшей скорости распространения волн сдвига в слое ($c < c_s$ — субсейсмический случай) до больших скорости распространения волн растяжения — сжатия ($c > c_p > c_s$ — суперсейсмический случай). При этом существенно изменяется вид решения, так как уравнения движения основания последовательно переходят из эллиптического типа через параболический в гиперболический. Получено распределение нормальных напряжений в слое для различных скоростей движения нагрузки.

1. Поскольку рассматривается линейная нагрузка, не зависящая от координаты z , то она вызывает в пластине и основании плоское деформированное состояние. Уравнение движения пластины с учетом нормальной реакции слоя можно записать в виде

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_c(x, t) - p(x, t), \quad D = \frac{Gh^3}{6(1-\nu)} \quad (1.1)$$

где $p(x, t) = p_0 f(x' - ct)$, $q_c(x, t)$ — интенсивность подвижной нагрузки и реакция со стороны основания.

Движение слоя в перемещениях описывается уравнениями Ламе

$$\begin{aligned} (\lambda_c + 2\mu_c) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu_c \nabla^2 u_x &= \rho_c \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ (\lambda_c + 2\mu_c) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu_c \nabla^2 u_y &= \rho_c \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$e = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \lambda_c = \frac{2\nu_c G_c}{1-2\nu_c}, \quad \mu_c = G_c$$

где G , ν , ρ , h , G_c , ν_c , ρ_c , H — модуль сдвига, коэффициент Пуассона, плотность, толщина для пластины и слоя.

Компоненты напряжения связаны с перемещениями законом Гука

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2G_c}{1-2\nu_c} \left[(1-\nu_c) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu_c \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] \\ \sigma_y &= \frac{2G_c}{1-2\nu_c} \left[\nu_c \frac{\partial u_x}{\partial x} + (1-\nu_c) \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] \\ \sigma_{xy} &= G_c \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Задача сводится к совместному интегрированию дифференциальных уравнений движения пластины (1.1) и основания (1.2) при выполнении граничных условий на поверхностях слоя, которые при указанных выше предположениях имеют вид

$$u_y = 0, \sigma_{xy} = 0 \text{ при } y' = 0 \quad (1.4)$$

$$u_y = w, \sigma_{xy} = 0, \sigma_y = -q_c \text{ при } y' = H$$

Начало координат выбрано на нижней границе слоя, а ось y' направлено вертикально вверх.

Поскольку скорость движения нагрузки постоянна и рассматривается установившийся процесс, решение проводится в безразмерной системе координат, движущейся вместе с нагрузкой, $x = (x' - ct)/h$, $y = y'/H$.

В подвижной системе координат уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{6(1-\nu)\rho c^2}{G} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{6(1-\nu)h}{G} [q_c(x) - p(x)] \quad (1.5)$$

Для интегрирования уравнений (1.2) вводятся две потенциальные функции по формулам

$$u_x = \partial\varphi/\partial x - \partial\psi/\partial y, \quad u_y = \partial\varphi/\partial y + \partial\psi/\partial x \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.2), в подвижной системе координат получаем для определения φ и ψ видоизмененные волновые уравнения

$$m^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \kappa^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad m_s^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \kappa^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.7)$$

$$m^2 = 1 - M^2, \quad m_s^2 = 1 - M_s^2, \quad M = c/c_p, \quad M_s = c/c_s$$

$$\kappa = \frac{h}{H}, \quad c_p = \left[\frac{2G_c(1-\nu_c)}{\rho_c(1-2\nu_c)} \right]^{1/2}, \quad c_s = \left(\frac{G_c}{\rho_c} \right)^{1/2}$$

где c_p , c_s — скорости распространения волн растяжения — сжатия и сдвига в слое.

Компоненты напряжения выражаются через потенциальные функции следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{G_c} &= - \frac{(1+m_s^2)}{h^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{2\kappa}{h^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\sigma_{xy}}{G_c} &= \frac{2\kappa}{h^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{(1+m_s^2)}{h^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

В зависимости от значения скорости движения нагрузки c уравнения (1.7) могут быть: оба эллиптического типа (если $c < c_s < c_p$); одно эллиптического типа, другое параболического ($c = c_s < c_p$); одно эллиптического,

другое гиперболического типа ($c_s < c < c_p$); одно параболического, другое гиперболического типа ($c_s < c = c_p$) и наконец оба гиперболического типа ($c_s < c_p < c$). Поэтому необходимо рассмотреть все эти случаи отдельно.

2. Поскольку все функции вместе с их производными стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$, то к уравнениям (1.5), (1.7) и граничным условиям можно применить преобразование Фурье по переменной x :

$$f^\circ(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} f^\circ(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \quad (\delta > 0) \quad (2.1)$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению (1.5), находим трансформанту нагрузки, которая передается на слой со стороны пластины

$$q_c^\circ = p^\circ + \frac{G}{6(1-\nu)} \xi^2 [\xi^2 - 6(1-\nu)c_0^2] w_*^\circ \quad (2.2)$$

$$c_0 = c(\rho/G)^{1/2}, \quad w_*^\circ = w^\circ/h$$

Преобразованные уравнения (1.7) запишутся в виде

$$\frac{d^2\varphi^\circ}{dy^2} - \frac{m^2}{\kappa^2} \xi^2 \varphi^\circ = 0, \quad \frac{d^2\psi^\circ}{dy^2} - \frac{m_s^2}{\kappa^2} \xi^2 \psi^\circ = 0 \quad (2.3)$$

Решения уравнений (2.3) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi^\circ &= C_1 e^{k_1 y} + C_2 e^{-k_1 y}, & \psi^\circ &= C_3 e^{k_3 y} + C_4 e^{-k_3 y} \quad (c < c_s < c_p) \\ \varphi^\circ &= C_1 e^{k_1 y} + C_2 e^{-k_1 y}, & \psi^\circ &= C_3 + C_4 y \quad (c = c_s < c_p) \\ \varphi^\circ &= C_1 e^{k_1 y} + C_2 e^{-k_1 y}, & \psi^\circ &= C_3 \sin k_4 y + C_4 \cos k_4 y \quad (c_s < c < c_p) \\ \varphi^\circ &= C_1 + C_2 y, & \psi^\circ &= C_3 \sin k_4 y + C_4 \cos k_4 y \quad (c_s < c = c_p) \\ \varphi^\circ &= C_1 \sin k_2 y + C_2 \cos k_2 y, & \psi^\circ &= C_3 \sin k_4 y + C_4 \cos k_4 y \quad (c_s < c_p < c) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$k_1 = \frac{m\xi}{\kappa}, \quad k_2 = \frac{m^*\xi}{\kappa}, \quad k_3 = \frac{m_s \xi}{\kappa}, \quad k_4 = \frac{m_s^* \xi}{\kappa}, \quad m^* = \sqrt{M^2 - 1},$$

$$m_s^* = \sqrt{M_s^2 - 1}$$

Имея выражения для φ° и ψ° при каждом значении c при помощи преобразованных уравнений (1.6), (1.8), получаем формулы для перемещений и напряжений. Определив $C_1 - C_4$ из граничных условий (1.4), находим трансформанты искомых величин. Так, при $c < c_s < c_p$ для нормального напряжения имеем

$$\sigma_y^\circ / G_c = -v_1(\xi, y) p^\circ(\xi) / G \det_4 \|a_{ij}\| \quad (i, j=1-4) \quad (2.5)$$

$$v_1(\xi, y) = \frac{1+m_s^2}{m \operatorname{ch} k_1} (A_{41} e^{k_1 y} + A_{42} e^{-k_1 y}) + \frac{2m_s}{\operatorname{ch} k_1} (A_{43} e^{k_3 y} - A_{44} e^{-k_3 y})$$

где A_{kl} — алгебраическое дополнение элемента a_{kl} .

Элементы определителя \det_4 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2, & a_{12} &= -2, & a_{13} &= 1+m_s^2, & a_{14} &= 1+m_s^2 \\ a_{21} &= 2e^{k_1} / \operatorname{ch} k_1, & a_{22} &= -2e^{-k_1} / \operatorname{ch} k_1, & a_{23} &= (1+m_s^2)e^{k_3} / \operatorname{ch} k_1 \\ a_{24} &= (1+m_s^2)e^{-k_3} / \operatorname{ch} k_1, & a_{31} &= 1, & a_{32} &= -1, & a_{33} &= 1, & a_{34} &= 1 \\ a_{41} &= [(1+m_s^2)/m\gamma + b_1] e^{k_1} / \operatorname{ch} k_1, & a_{42} &= [(1+m_s^2)/m\gamma - b_1] e^{-k_1} / \operatorname{ch} k_1 \\ a_{43} &= (b_1 + 2m/\gamma) e^{k_3} / \operatorname{ch} k_1, & a_{44} &= (b_1 - 2m/\gamma) e^{-k_3} / \operatorname{ch} k_1 \\ b_1 &= \xi [\xi^2 - 6(1-\nu)c_0^2] / [6(1-\nu)], & \gamma &= G/G_c \end{aligned}$$

Аналогично получаются решения для четырех других случаев.

$$\sigma_y^0 / G_c = -v_2(\xi, y) p^0(\xi) / G \det_2 \|a_{ij}\| \quad (i, j=1-4) \quad (c=c_s < c_p) \quad (2.6)$$

$$v_2(\xi, y) = \frac{\xi}{m \operatorname{ch} k_1} (A_{41} e^{k_1 y} + A_{42} e^{-k_1 y}) + \frac{2\kappa}{\operatorname{ch} k_1} A_{44}$$

$$a_{11}=2, \quad a_{12}=-2, \quad a_{13}=1, \quad a_{14}=0, \quad a_{21}=2e^{k_1} / \operatorname{ch} k_1$$

$$a_{22}=-2e^{-k_1} / \operatorname{ch} k_1, \quad a_{23}=a_{24}=1 / \operatorname{ch} k_1, \quad a_{31}=1, \quad a_{32}=-1, \quad a_{33}=1, \quad a_{34}=0$$

$$a_{41}=(1/m\gamma+b_1)\xi e^{k_1} / \operatorname{ch} k_1, \quad a_{42}=(1/m\gamma-b_1)\xi e^{-k_1} / \operatorname{ch} k_1$$

$$a_{43}=b_1 \xi / \operatorname{ch} k_1, \quad a_{44}=(b_1 \xi + 2\kappa / \gamma) / \operatorname{ch} k_1$$

$$\sigma_y^0 / G_c = -v_3(\xi, y) p^0(\xi) / G \det_3 \|a_{ij}\| \quad (i, j=1-4) \quad (c_s < c < c_p) \quad (2.7)$$

$$v_3(\xi, y) = \frac{2-M_s^2}{\operatorname{ch} k_1} (A_{41} e^{k_1 y} + A_{42} e^{-k_1 y}) + \frac{2m_s^*}{\operatorname{ch} k_1} (A_{43} \cos k_4 y - A_{44} \sin k_4 y)$$

$$a_{11}=2m, \quad a_{12}=-2m, \quad a_{13}=0, \quad a_{14}=2-M_s^2, \quad a_{21}=2me^{k_1} / \operatorname{ch} k_1, \quad a_{22}=-2me^{-k_1} / \operatorname{ch} k_1$$

$$a_{23}=(2-M_s^2) \sin k_4 / \operatorname{ch} k_1, \quad a_{24}=(2-M_s^2) \cos k_4 / \operatorname{ch} k_1, \quad a_{31}=-a_{32}=m, \quad a_{33}=0, \quad a_{34}=1$$

$$a_{41}=[(2-M_s^2) / \gamma + b_1 m] e^{k_1} / \operatorname{ch} k_1, \quad a_{42}=[(2-M_s^2) / \gamma - b_1 m] e^{-k_1} / \operatorname{ch} k_1$$

$$a_{43} = \left(b_1 \sin k_4 + \frac{2m_s^*}{\gamma} \cos k_4 \right) / \operatorname{ch} k_1, \quad a_{44} = \left(b_1 \cos k_4 - \frac{2m_s^*}{\gamma} \sin k_4 \right) / \operatorname{ch} k_1$$

$$\sigma_y^0 / G_c = -v_4(\xi, y) p^0(\xi) / G \det_4 \|a_{ij}\| \quad (i, j=1-4) \quad (c_s < c = c_p) \quad (2.8)$$

$$v_4(\xi, y) = (2-M_s^2) (A_{41} + \xi y A_{42} / \kappa) + 2m_s^* (A_{43} \cos k_4 y - A_{44} \sin k_4 y)$$

$$a_{11}=0, \quad a_{12}=2, \quad a_{13}=0, \quad a_{14}=2-M_s^2, \quad a_{21}=0, \quad a_{22}=2$$

$$a_{23}=(2-M_s^2) \sin k_4, \quad a_{24}=(2-M_s^2) \cos k_4, \quad a_{31}=0, \quad a_{32}=1, \quad a_{33}=0, \quad a_{34}=1$$

$$a_{41}=(2-M_s^2) / \gamma, \quad a_{42}=b_1 + (2-M_s^2 \xi) / (\kappa \gamma)$$

$$a_{43}=b_1 \sin k_4 + 2m_s^* \cos k_4 / \gamma, \quad a_{44}=b_1 \cos k_4 - 2m_s^* \sin k_4 / \gamma$$

$$\sigma_y^0 / G_c = -v_5(\xi, y) p^0(\xi) / G \det_5 \|a_{ij}\| \quad (i, j=1-4) \quad (c_s < c_p < c) \quad (2.9)$$

$$v_5(\xi, y) = \frac{2-M_s^2}{m_s^*} (A_{41} \sin k_2 y + A_{42} \cos k_2 y) + 2m_s^* (A_{43} \cos k_4 y - A_{44} \sin k_4 y)$$

$$a_{11}=2, \quad a_{12}=a_{13}=0, \quad a_{14}=2-M_s^2, \quad a_{21}=2 \cos k_2, \quad a_{22}=-2 \sin k_2$$

$$a_{23}=(2-M_s^2) \sin k_4, \quad a_{24}=(2-M_s^2) \cos k_4, \quad a_{31}=a_{34}=1, \quad a_{32}=a_{33}=0$$

$$a_{41}=b_1 \cos k_2 + \frac{2-M_s^2}{m^* \gamma} \sin k_2, \quad a_{42} = \frac{2-M_s^2}{m^* \gamma} \cos k_2 - b_1 \sin k_2$$

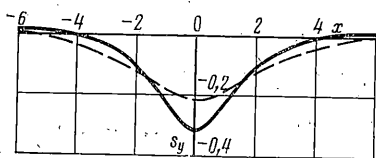
$$a_{43}=m^* b_1 \sin k_4 + \frac{2m_s^*}{\gamma} \cos k_4, \quad a_{44}=m^* b_1 \cos k_4 - \frac{2m_s^*}{\gamma} \sin k_4$$

Чтобы найти напряжения в слое, следует воспользоваться формулой обращения. Однако вычисление интегралов обращения существенно зависит от значения скорости движения нагрузки. Проиллюстрируем результаты вычисления для сосредоточенной линейной нагрузки $p=p_0 \delta(x)$. В этом случае правые части формул (2.5) — (2.9) являются четными функциями относительно ξ .

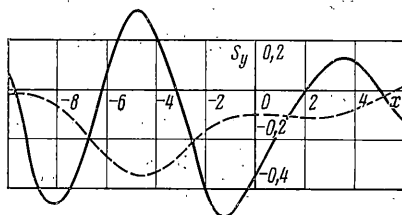
3. Прежде чем перейти к оригиналам в соотношениях (2.5) — (2.9), необходимо проанализировать знаменатели полученных формул и определить критическую скорость движения нагрузки. В случае $c < c_s < c_p$ для некоторого значения c^* , называемого критическим, знаменатель имеет двойной положительный корень, интеграл обращения не существует даже

в смысле главного значения, появляется резонансный эффект и нормальные напряжения стремятся к бесконечности. Алгоритм отыскания критической скорости описан в [2].

В качестве примера проведены расчеты для следующих значений безразмерных параметров: $v=v_c=0,25$, $\gamma=10$, $\theta=\rho/\rho_c=1$, $\kappa=0,1$. Для этих значений параметров $c^*=0,918$ с. Если ограничиться докритическими



Фиг. 1



Фиг. 2

скоростями движения нагрузки $c < c^*$, то формула обращения для сосредоточенных сил имеет вид

$$s_y = \frac{\sigma_y h}{p_0} = -\frac{1}{\pi \gamma} \int_0^{\infty} \frac{v_1(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi}{\det_1 \|a_{ij}\|} \quad (i, j=1-4) \quad (3.1)$$

причем интеграл не имеет особенностей и его значение находится численным интегрированием по формулам Файдона [5].

На фиг. 1 показано распределение нормальных напряжений в слое для $c=0,3$ с., причем сплошная кривая соответствует значению $y=1$ (т. е. на границе контакта пластины со слоем), а для пунктирной кривой $y=0,8$. Как видно из фиг. 1, для таких скоростей движения имеется полная симметрия нормальных напряжений относительно точки приложения нагрузки, что следует также и из формулы (3.1). С удалением от точки приложения силы контактные напряжения меняют знак, что является следствием предположения о двустороннем характере связи между пластиной и основанием. Если принять связь односторонней [3], то станет возможным выключение связей на тех участках, где возникают растягивающие напряжения и произойдет отрыв пластины от основания.

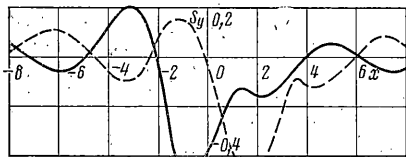
Для $c=c_s < c_p$ знаменатель формулы (2.6) имеет на действительной оси четыре корня, симметричные относительно начала координат, и тогда контур интегрирования в формуле обращения (2.1) эквивалентен контуру с вырезами в комплексной ξ -плоскости. Интеграл вдоль такого контура можно заменить суммой главного значения интеграла и суммой всех вычетов, умноженной на $-\pi i$ [6]. В этом случае при $c=c_s$ формула обращения имеет вид

$$s_y = -\frac{1}{\pi \gamma} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{\xi_1 - \varepsilon} U(x, y, \xi) d\xi + \int_{\xi_1 + \varepsilon}^{\xi_2 - \varepsilon} U(x, y, \xi) d\xi + \int_{\xi_2 + \varepsilon}^{\infty} U(x, y, \xi) d\xi \right) - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^2 \frac{v_2(\xi_k, y) \sin(\xi_k x)}{\det_2 \|a_{ij}\|_{\xi=\xi_k}} \quad (3.2)$$

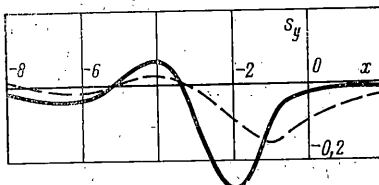
$$U(x, y, \xi) = v_2(\xi, y) \cos(\xi x) / \det_2 \|a_{ij}\|$$

Здесь ξ_1, ξ_2 — корни знаменателя в интервале $[0, \infty)$, \det_2' — производная знаменателя по ξ , ε — сколь угодно малое положительное число.

Изменение нормальных напряжений в слое для этого случая показано на фиг. 2. Если условно назвать напряжения впереди и позади нагрузки прямой и обратной волнами, то из фиг. 2 видно, что при $c=c_s$ симметрия относительно начала подвижной системы координат нарушается и прямая волна затухает быстрее обратной. Аналогичная картина имеет место и внутри слоя.



Фиг. 3



Фиг. 4

Если $c_s < c < c_p$, то в этом случае $\det_3 \|a_{ij}\|$ имеет на действительной оси бесконечное число нулей, τ то связано с появлением в решении гармонических функций. Решение представляется формулой вида (3.2), однако число интегралов и вычетов равно бесконечности. Получение численных результатов облегчается тем, что через некоторое число корней намечается периодичность нулей функции $\det_3 \|a_{ij}\|$, причём расстояние между двумя соседними нулями равно половине периода функций $\sin k_i$ или $\cos k_i$. Численные расчеты проведены для $c=1,5c_s$. Тогда из условия $k_i = \pi$ находим, что период корней знаменателя $T \approx 0,281$.

Для $c_s < c = c_p$ и $c_s < c_p < c$ определители $\det_4 \|a_{ij}\|$ и $\det_5 \|a_{ij}\|$ также имеют бесконечное число нулей и при $c=c_p=1,732c_s$ период $T \approx 0,222$, а для $c > c_p$ ($c=2,2c_s$) знаменатель $\det_5 \|a_{ij}\|$ является комбинацией гармонических функций с различными периодами, и поэтому нули на действительной оси располагаются неравномерно; однако в этом случае можно также указать закономерность в их расположении (двухпериодичность).

Расчеты проводились для этих трех случаев по формулам, аналогичным (3.2), с учетом замечания о бесконечном числе слагаемых в правой части.

На фиг. 3 приведены результаты для $c=1,5c_s$, а на фиг. 4 — нормальные напряжения при $c=2,2c_s$. Видно, что с ростом скорости прослеживается тенденция все большего нарушения симметрии, причем прямая волна затухает намного быстрее и для суперсейсмического случая практически отсутствует, однако полностью не исчезает, это объясняется, по-видимому, наличием на границе слоя пластины.

Отметим, что качественно подобная картина наблюдается в задаче о воздействии подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку с упругим наполнителем [7]. Правда, там проведена другая классификация скоростей движения нагрузки: не по типу уравнений движения наполнителя, а по отношению к критическим скоростям, которых для оболочки типа Тимошенко в отличие от данного случая имеется четыре. Если выразить эти критические скорости через скорости волн сдвига в наполнителе, то уже вторая критическая скорость $c_2^* = 2,58 c_s$, т. е. для всех скоростей, больших второй критической, в [7] рассмотрены суперсейсмические режимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Achenbach J. D., Keshava S. P., Herrmann G. Moving load on a plate resting on an elastic half space.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, v. 34, No. 4, p. 183—

- 189.— Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1967, № 4, с. 183—189.
2. Ламзюк В. Д., Пожуев В. И. К определению критических скоростей движения нагрузки по пластинке, лежащей на многослойном основании.— Динамика и прочность машин: Сб. статей. Харьков: Вища школа, 1978, вып. 28, с. 105—111.
 3. Ламзюк В. Д., Пожуев В. И. Об отставании пластинки от многослойного основания под действием подвижной нагрузки.— Устойчивость и прочность элементов конструкций: Сб. статей. Днепропетровский ун-т, 1975, вып. 2, с. 169—177.
 4. Филиппов И. Г., Егорычев О. А. Нестационарные колебания и дифракция волн в акустических и упругих средах. М.: Машиностроение, 1977. 304 с.
 5. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, 1966. 370 с.
 6. Wright J. P., Baron M. L. Exponentially decaying pressure pulse moving with constant velocity on the surface of a layered elastic material (superseismic layer, subseismic half space).— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1970, v. 37, No. 1, p. 148—159.— Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1970, № 1, с. 148—159.
 7. Корбут Б. А., Нагорный Ю. И. Реакция цилиндрической оболочки с заполнителем на действие движущейся нагрузки.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 3, с. 111—119.

Запорожье

Поступила в редакцию
9.VII.1979