

УДК 539.3

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ СТЕРЖНЯ К УПРУГОМУ АНИЗОТРОПНОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

ПАВЛЕНКО А. В.

Задачи о передаче нагрузки через упругие одномерные элементы к упругим пластинам изучены достаточно подробно. Библиография этих работ содержится, например, в [1, 2]. Пространственные задачи, относящиеся к передаче нагрузки от упругого стержня, впаивного в трехмерную упругую среду, тесно связаны со строительным делом, а также непосредственно относятся к механике армированных волокнами композитов. Задачи подобного типа исследованы не достаточно в связи с тем, что при их решении встречаются значительные математические трудности [2, 3]. Анизотропия упругой среды обычно приводит к существенным дополнительным трудностям.

Однако для широкого класса конструкций характеристики анизотропии упругой среды могут быть использованы в качестве параметров асимптотического интегрирования. Асимптотический анализ уравнений равновесия и граничных условий позволяет расчленить напряженно-деформированное состояние на элементарные составляющие, определение которых является, как правило, более простой задачей, чем расчет изотропной среды. Этот метод разработан и использован для решения ряда конкретных плоских задач теории упругости в [4-7]. Осесимметричные задачи для трансверсально-изотропной среды рассмотрены в [8, 9].

В публикуемой работе идеи указанного асимптотического метода обобщаются на осесимметричные краевые задачи теории упругости для криволинейно-ортотропного тела. Затем рассматривается вопрос о передаче осевой нагрузки от упругого стержня круговой цилиндрической формы, связанного с полубесконечным телом.

1. Рассмотрим ортотропное тело с цилиндрической анизотропией. В задачах о равновесии тел при наличии аксиальной симметрии нагружения тензор напряжений и вектор перемещений не зависят от θ , а являются функциями координат rz ($r\theta z$ — цилиндрические координаты, ось z совпадает с осью анизотропии). При этом задача распадается на две независимые: задачу о деформации, в которой отсутствует компонента перемещения v (но, конечно, имеется нормальное напряжение σ_{22}), и задачу кручения.

Вопрос о напряженно-деформированном состоянии ортотропного тела с цилиндрической анизотропией, в котором отсутствует компонента перемещения v , может быть сведен к интегрированию уравнений равновесия [10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m\varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - q \frac{u}{r^2} &= 0 \\ \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + q_1 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + m\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + m_1 \varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

при соответствующих граничных условиях.

Компоненты тензора напряжений через проекции u , w вектора перемещений выражаются по формулам

$$\sigma_{11} = E_1 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \nu_{12} \frac{u}{r} + \nu_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= E_1 q \left(\nu_{21} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \nu_{23} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \sigma_{33} &= E_1 q_1 \left(\nu_{31} \frac{\partial u}{\partial r} + \nu_{32} \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \sigma_{13} &= G_{13} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon = G_{13}/E_1, \quad q = E_2/E_1, \quad q_1 = E_3/E_1, \quad m = 1 + \mu$$

$$\mu = \nu_{13}\varepsilon^{-1} = \nu_{31}q_1\varepsilon^{-1}, \quad m_1 = 1 + \mu_1, \quad \mu_1 = \nu_{23}q\varepsilon^{-1} = \nu_{32}q_1\varepsilon^{-1}$$

где E_1, E_2, E_3 — модули упругости для главных направлений r, θ, z , G_{13} — модуль сдвига, $\nu_{12}, \dots, \nu_{32}$ — коэффициенты Пуассона, $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ — нормальные напряжения, $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32}$ — касательные напряжения. Предполагается, что коэффициенты Пуассона достаточно малы и пренебрегается их произведениями.

Отношения модулей упругости q, q_1 в реальных конструкциях могут быть самыми разнообразными ($q \leq 1 (\geq 1), q_1 \leq 1 (\geq 1)$). Остановимся подробно на анализе случая, когда $q = q_1 = 1, m_1 = m$ (анализ других случаев проводится совершенно аналогично). При этом величину $\varepsilon = G_{13}/E_1$ можно рассматривать как «малый» параметр при асимптотическом интегрировании системы (1.1). Материалы с такими упругими характеристиками широко применяются на практике. Кроме того, здесь возможен переход к изотропной среде.

Введем следующие аффинные преобразования координат и искомых функций:

$$r_1 = r, \quad \zeta_1 = \varepsilon^{1/2} \alpha z, \quad u = \varepsilon^{1/2} U^{(1)}, \quad w = W^{(1)} \quad (1.3)$$

$$r_2 = r, \quad \zeta_2 = \varepsilon^{-1/2} \beta z, \quad u = \varepsilon^{1/2} U^{(2)}, \quad w = \varepsilon^2 W^{(2)} \quad (1.4)$$

Из (1.3), (1.4) видно, что решения системы, полученной из (1.1) после введения преобразований (1.3), относительно медленнее изменяются вдоль координаты z по сравнению с аналогичными решениями системы, полученной из (1.1) после применения преобразований (1.4).

Компоненты вектора перемещений будем представлять в виде суперпозиции решений обоих типов.

Разыскивая функции $U^{(n)}, W^{(n)}$ ($n=1, 2$) в виде рядов по дробным степеням параметра ε , необходимо выбрать соответствующие асимптотические последовательности. Вид асимптотической последовательности определяется структурой уравнений равновесия и порядком по ε невязки в краевых условиях, возникающей после решения задачи в нулевом приближении ($\varepsilon \rightarrow 0$).

Чтобы учесть возможные случаи, функции $U^{(n)}, W^{(n)}$ ($n=1, 2$) определим в виде рядов по параметру $\varepsilon^{1/2}$ (из преобразований (1.3), (1.4) видно, что рядов по меньшим степеням параметра ε возникнуть не может):

$$U^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} U^{n,j}, \quad W^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} W^{n,j} \quad (n=1, 2) \quad (1.5)$$

Коэффициенты α, β также представим в виде рядов по параметру $\varepsilon^{1/2}$:

$$\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \alpha_j, \quad \beta = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \beta_j, \quad \alpha_0 = \beta_0 = 1 \quad (1.6)$$

Коэффициенты α_j, β_j ($j=1, 2, \dots$) вычисляемые в процессе решения, используются в дальнейшем для упрощения уравнений высших приближений.

Подставим (1.3) в (1.1) и используем соответствующие разложения из (1.5), (1.6). После расщепления полученной системы по параметру $\epsilon^{1/2}$ придем к бесконечной системе уравнений относительно функций $U^{1,j}, W^{1,j}$ ($j=0, 1, \dots$), которые определяют решения, сравнительно медленно изменяющиеся вдоль координаты z (такое напряженно-деформированное состояние будем называть состоянием первого типа):

$$W_{rs}^{1,j} + W_{\xi\xi}^{1,j} = - \sum_{v=0}^{j-1} W_{\xi\xi}^{1,v} c_{j-v} - m \sum_{v=0}^{j-4} U_{\xi\xi}^{1,v} \alpha_{j-v-4} \tag{1.7}$$

$$U_{sr}^{1,j} + m W_{r\xi}^{1,j} = -m \sum_{v=0}^{j-1} W_{r\xi}^{1,v} \alpha_{j-v} - \sum_{v=0}^{j-4} U_{\xi\xi}^{1,v} c_{j-v-4}, \quad c_p = \sum_{l=0}^p \alpha_l \alpha_{p-l}$$

Аналогично, после подстановки (1.4) в (1.1) с использованием соответствующих разложений из (1.5), (1.6) и расщепления по параметру $\epsilon^{1/2}$ получим бесконечную систему уравнений относительно функций $U^{2,j}, W^{2,j}$ ($j=0, 1, \dots$), которые определяют решения второго типа

$$U_{sr}^{2,j} + U_{\xi\xi}^{2,j} = - \sum_{v=0}^{j-1} U_{\xi\xi}^{2,v} d_{j-v} - m \sum_{v=0}^{j-4} W_{r\xi}^{2,v} \beta_{j-v-4}$$

$$W_{\xi\xi}^{2,j} + m U_{\xi\xi}^{2,j} = - \sum_{v=0}^{j-1} (W_{\xi\xi}^{2,v} d_{j-v} + U_{\xi\xi}^{2,v} \beta_{j-v}) - W_{rs}^{2,j-4}, \quad d_p = \sum_{l=0}^p \beta_l \beta_{p-l} \tag{1.8}$$

В системах (1.7), (1.8) приняты следующие обозначения:

$$f_r^{(n)} = \frac{\partial f^{(n)}}{\partial r_n}, \quad f_\xi^{(n)} = \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \xi_n}, \quad f_{r\xi}^{(n)} = \frac{\partial^2 f^{(n)}}{\partial r_n \partial \xi_n}, \quad f_s^{(n)} = \frac{\partial f^{(n)}}{\partial r_n} + \frac{f^{(n)}}{r_n}$$

$$f_{rs}^{(n)} = \left(\frac{\partial f^{(n)}}{\partial r_n} \right)_s = \frac{\partial^2 f^{(n)}}{\partial r_n^2} + \frac{1}{r_n} \frac{\partial f^{(n)}}{\partial r_n}, \quad f_{\xi\xi}^{(n)} = \frac{\partial^2 f^{(n)}}{\partial \xi_n^2}$$

$$f_{sr}^{(n)} = \frac{\partial}{\partial r_n} (f_s^{(n)}) = \frac{\partial^2 f^{(n)}}{\partial r_n^2} + \frac{1}{r_n} \frac{\partial f^{(n)}}{\partial r_n} - \frac{f^{(n)}}{r_n^2} \quad (n=1,2)$$

Если верхний предел суммирования меньше нижнего или у какой-либо из функций $U^{n,k}, W^{n,k}$ ($n=1, 2$) второй верхний индекс отрицателен, то такие суммы и функции необходимо полагать равными нулю.

Так, при $j=0$ из (1.7), (1.8) получим: напряженное состояние первого типа

$$W_{rs}^{1,0} + W_{\xi\xi}^{1,0} = 0, \quad U_{sr}^{1,0} + m W_{r\xi}^{1,0} = 0 \tag{1.9}$$

напряженное состояние второго типа

$$U_{sr}^{2,0} + U_{\xi\xi}^{2,0} = 0, \quad W_{\xi\xi}^{2,0} + m U_{\xi\xi}^{2,0} = 0 \tag{1.10}$$

Из (1.9), (1.10) следует, что функции $W^{1,0}, U^{2,0}$ определяются из независимых уравнений. Функции $U^{1,0}, W^{2,0}$ выражаются через $W^{1,0}, U^{2,0}$ простым интегрированием.

Коэффициенты α_j, β_j ($j=1, 2, \dots$) пока не определены. Справедливо следующее предложение:

если коэффициенты α_j, β_j находятся по формулам

$$\alpha_0=1, \quad \alpha_j = \frac{1}{2} \left[m^2 \gamma_{j-4} + \sum_{h=1}^{j-4} \alpha_h (m^2 \gamma_{j-h-4} - \alpha_{j-h}) \right] \quad (1.11)$$

$$\beta_0=1, \quad \beta_j = -\frac{1}{2} \left[m^2 \delta_{j-4} - \sum_{h=1}^{j-4} \beta_h (m^2 \delta_{j-h-4} + \beta_{j-h}) \right] \quad (j=1, 2, \dots)$$

$$\gamma_0=1, \quad \gamma_s = \alpha_s + \sum_{n=0}^{s-4} c_n \gamma_{s-n-4}$$

$$\delta_0=1, \quad \delta_s = -\beta_s - \frac{1}{2} m \delta_{s-4} + \sum_{n=0}^{s-4} d_n \delta_{s-n-4} \quad \text{при } s > 0$$

$$\gamma_s = \delta_s = 0 \quad \text{при } s < 0$$

то правые части первых уравнений систем (1.7), (1.8) обращаются в нуль, т. е. функции $W^{1,j}, U^{2,j}$ определяются из независимых уравнений.

Предложение легко доказывается методом математической индукции, как это сделано, например, в [9].

Из (1.11) следует, что коэффициенты α, β раскладываются в ряд по степеням ε^2 , а не $\varepsilon^{1/2}$, как предполагалось в (1.6).

Используем преобразования (1.3), (1.4) и разложения (1.5), (1.6) в выражениях для перемещений и напряжений (1.2) (при этом учитываем, что компоненты вектора перемещений разыскиваются в виде суперпозиции решений обоих типов) и полагаем, что заданные перемещения и напряжения могут быть представлены рядами

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} u_j, \quad w = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} w_j, \quad \sigma_{nn} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \sigma_{nn}^{(j)} \quad (n=1, 2, 3),$$

$$\sigma_{13} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \sigma_{13}^{(j)}$$

После расщепления по параметру $\varepsilon^{1/2}$ получим

$$\begin{aligned} w_j &= W^{1,j} + W^{2,j-4}, \quad \varepsilon^{-1/2} u_j = U^{2,j} + U^{1,j-2} \\ E_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} \sigma_{11}^{(j)} &= \frac{\partial U^{2,j}}{\partial r} + \frac{\partial U^{1,j-2}}{\partial r} + \mu \left(\frac{U^{2,j-2}}{r} + \sum_{v=0}^{j-2} \frac{\partial W^{1,v}}{\partial \zeta} \alpha_{j-v-2} \right) + \\ &+ \mu \left(\frac{U^{1,j-4}}{r} + \sum_{v=0}^{j-4} \frac{\partial W^{2,v}}{\partial \zeta} \beta_{j-v-4} \right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$E_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} \sigma_{22}^{(j)} = \frac{U^{2,j}}{r} + \frac{U^{1,j-2}}{r} + \mu \left(\frac{\partial U^{2,j-2}}{\partial r} + \sum_{v=0}^{j-2} \frac{\partial W^{1,v}}{\partial \zeta} \alpha_{j-v-2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu \left(\frac{\partial U^{1,j-4}}{\partial r} + \sum_{v=0}^{j-4} \frac{\partial W^{2,v}}{\partial \xi} \beta_{j-v-4} \right) \\
 E_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} \sigma_{33}^{(j)} &= \sum_{v=0}^j \frac{\partial W^{1,v}}{\partial \xi} \alpha_{j-v} + \sum_{v=0}^{j-2} \frac{\partial W^{2,v}}{\partial \xi} \beta_{j-v-2} + \\
 & + \mu \left(\frac{\partial U^{2,j-2}}{\partial r} + \frac{U^{2,j-2}}{r} \right) + \mu \left(\frac{\partial U^{1,j-4}}{\partial r} + \frac{U^{1,j-4}}{r} \right) \\
 (E_1 \varepsilon)^{-1} \sigma_{13}^{(j)} &= \frac{\partial W^{1,j}}{\partial r} + \sum_{v=0}^j \frac{\partial U^{2,v}}{\partial \xi} \beta_{j-v} + \frac{\partial W^{2,j-4}}{\partial r} + \sum_{v=0}^{j-4} \frac{\partial U^{1,v}}{\partial \xi} \alpha_{j-v-4}
 \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем принято, что дифференцирование производится по тем координатам, индексы которых совпадают с первыми верхними индексами функций.

Из (1.7)–(1.10), (1.12) видно, что напряженно-деформированные состояния первого и второго типов связаны только через граничные условия. Так как функции $W^{1,j}$, $U^{2,j}$ определяются из независимых уравнений (если коэффициенты α_j , β_j находятся по формулам (1.11)), то эффективность метода зависит от того, удастся ли сформулировать соответствующие краевые задачи для нахождения этих функций.

2. Перейдем к анализу граничных условий. В случае первой основной задачи теории упругости на ограничивающей плоскости $z = \text{const}$ известны нормальные σ_{33} и касательные σ_{13} напряжения $\sigma_{33} = \varphi_1(r)$, $\sigma_{13} = \varphi_2(r)$. Предполагаем, что функции $\varphi_n(r)$ могут быть представлены рядами

$$\varphi_n(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \varphi_{n,j} \quad (n=1,2)$$

(в противном случае все коэффициенты при $\varepsilon^{j/2}$ ($j \geq 1$) обращаются в нуль). Тогда на ограничивающей плоскости $z = \text{const}$ будем иметь

$$\sigma_{33}^{(j)} = \varphi_{1,j}, \quad \sigma_{13}^{(j)} = \varphi_{2,j}.$$

Используя результаты п. 1, приходим к интегрированию уравнений напряженного состояния первого типа (1.7) при следующих граничных условиях для функций $W^{1,j}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W^{1,j}}{\partial \xi} &= E_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} \varphi_{1,j} - \sum_{v=0}^{j-4} \frac{\partial W^{1,v}}{\partial \xi} \alpha_{j-v} - \sum_{v=0}^{j-2} \frac{\partial W^{2,v}}{\partial \xi} \beta_{j-v-2} - \mu \left(\frac{\partial U^{2,j-2}}{\partial r} + \frac{U^{2,j-2}}{r} \right) - \\
 & - \mu \left(\frac{\partial U^{1,j-4}}{\partial r} + \frac{U^{1,j-4}}{r} \right) \quad (j=0,1,\dots)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

и уравнений напряженного состояния второго типа (1.8) с крайевыми условиями для функций $U^{2,j}$:

$$\frac{\partial U^{2,j}}{\partial \xi} = (E_1 \varepsilon)^{-1} \varphi_{2,j} - \frac{\partial W^{1,j}}{\partial r} - \sum_{v=0}^{j-1} \frac{\partial U^{2,v}}{\partial \xi} \beta_{j-v}$$

$$-\frac{\partial W^{2,j-4}}{\partial r} - \sum_{\nu=0}^{j-4} \frac{\partial U^{1,\nu}}{\partial \xi} \alpha_{j-\nu-4} \quad (j=0,1,\dots) \quad (2.2)$$

Для второй основной краевой задачи на ограничивающей плоскости $z = \text{const}$ заданы смещения

$$w = \psi_1(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \psi_{1,j}, \quad u = \psi_2(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \psi_{2,j}$$

Тогда на ограничивающей плоскости $w_j = \psi_{1,j}$, $u_j = \psi_{2,j}$ и из (1.12) граничные условия для функций $W^{1,j}$, $U^{2,j}$ записываются соответственно

$$W^{1,j} = \psi_{1,j} - W^{2,j-4}, \quad U^{2,j} = \varepsilon^{-1/2} \psi_{2,j} - U^{1,j-2} \quad (j=0, 1, \dots) \quad (2.3)$$

Используя (2.1)–(2.3), получим краевые условия для функций $W^{1,j}$, $U^{2,j}$ в случае смешанной задачи.

Анализ граничных условий показывает, что для всех основных краевых задач граничные условия в нулевом приближении ($j=0$) напряженного состояния первого типа не зависят ни от более высоких приближений, ни от решений уравнений напряженного состояния второго типа. Поэтому первое уравнение (1.9) решается независимо от остальных, а решение второго уравнения (1.9) находится простым интегрированием. После этого полностью определяются граничные условия для первого уравнения из (1.10). Решив это уравнение и определив функцию $W^{2,0}$, получим граничные условия для первого уравнения системы (1.7) напряженного состояния первого типа в первом приближении ($j=1$) и т. д.

Следовательно, решение основных краевых задач сводится к последовательному интегрированию уравнений (1.7) напряженного состояния первого типа и уравнений (1.8) напряженного состояния второго типа.

Так как функции $W^{1,j}$, $U^{2,j}$ определяются из независимых уравнений при соответствующих граничных условиях, то на каждом этапе процесса та или иная краевая задача теории упругости сводится к краевым задачам для отыскания одной функции.

Совершенно аналогично могут быть решены основные краевые задачи теории упругости при других отношениях модулей упругости q , q_1 .

В качестве примера остановимся на простейшем случае упругого равновесия ортотропного полубесконечного тела с цилиндрической анизотропией, ограниченного плоскостью $z=0$ (ось z направлена внутрь тела), под действием сосредоточенной силы P , приложенной в начале координат в направлении оси z . В этом случае на основе предложенного метода получим следующую формулу, например, для напряжения σ_{zz} :

$$\sigma_{zz} = -P(2\pi)^{-1} [\xi_1 (\xi_1^2 + r^2)^{-3/2} - \varepsilon \xi_2 (\xi_2^2 + r^2)^{-3/2} + O(\varepsilon^2)] \quad (2.4)$$

При этом решение строится в виде разложения в ряд по целым степеням параметра ε , так как граничные условия для функций с нечетным вторым индексом являются нулевыми (соответствующие функции также обращаются в нуль).

Учитывая только нулевое приближение в (2.4), получаем, что погрешность при вычислении напряжения σ_{zz} на линии действия силы (оси z) даже в самом неблагоприятном с точки зрения применяемого метода случае изотропной среды (в этом случае параметр ε имеет максимальное значение) не превышает 5–10% (в зависимости от величины коэффициента Пуассона).

3. Рассмотрим более сложную задачу, не поддающуюся точному решению, о передаче осевой нагрузки через упругий стержень к анизотропному полупространству.

Пусть в упругом ортотропном полубесконечном теле с цилиндрической анизотропией находится упругий полубесконечный стержень кругового поперечного сечения (фигура). Предполагаем, что площадь F поперечного сечения стержня достаточно мала, т. е. радиус стержня a достаточно мал. Средняя линия стержня перпендикулярна к ограничивающей полупространство плоскости и совпадает с осью Oz . Требуется определить закон распределения контактных напряжений между стержнем и полупространством, когда в концевой точке стержня действует сосредоточенная сила P_0 , направленная по оси стержня.

При постановке пространственных контактных задач для тел с упругими включениями малого поперечного сечения модель одномерного упругого континуума включения в сочетании с моделью контакта по линии непосредственно неприменима [2]. Будем предполагать, что имеет место модель одномерного упругого континуума стержня в сочетании с моделью контакта по цилиндрической области для полупространства.

В такой постановке задача сводится к интегрированию уравнений равновесия (1.1) ($q=q_1=1$, $m_1=m$) при следующих граничных условиях (на бесконечности все функции обращаются в нуль): $\sigma_{33}=\sigma_{13}=0$ ($z=0$), $w=w_1$, $u=0$ ($r=a$).

Перемещения $w_1(z)$ точек средней линии стержня удовлетворяют уравнению

$$d^2 w_1 / dz^2 = (P_0 \delta(z) - \tau(z)) / (EF), \quad \tau(z) = -2\pi a \sigma_{13}(a, z) \quad (3.1)$$

где E — модуль упругости материала стержня, $\delta(z)$ — известная функция Дирака, $\tau(z)$ — контактное напряжение на единицу длины стержня, подлежащее определению.

Напряжение $\sigma_{13}(a, z)$ полностью определяется лишь функцией $\partial w / \partial r$ (при $r=a$), так как при $r=a$ имеем $u=0$, $\partial u / \partial z=0$. Таким образом

$$\tau(z) = 2\pi a G (\partial w / \partial r) |_{r=a} \quad (G = G_{13}) \quad (3.2)$$

Для исследования поставленной задачи применим метод, предложенный в пп. 1, 2.

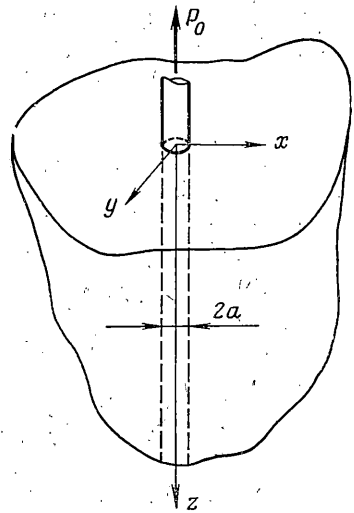
Перемещение w полупространства играет решающую роль в напряженно-деформированном состоянии первого типа. Ограничиваясь нулевым приближением, приходим к интегрированию уравнения (3.1) с учетом (3.2) и первого уравнения (1.9), которое в исходных переменных имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad \left(\omega^2 = \frac{E_1}{G} \right) \quad (3.3)$$

при следующих граничных условиях (на бесконечности все функции обращаются в нуль):

$$\partial w / \partial z = 0 \quad (z=0), \quad w = w_1 \quad (r=a) \quad (3.4)$$

После применения косинус-преобразования Фурье по координате z к уравнениям и граничным условиям, решения полученного из (3.3) обыкновенного дифференциального уравнения и вычисления оригиналов



находим

$$w(r, z) = -\frac{2P_0}{\pi EF} \int_0^{\infty} \frac{K_0(\omega rs) \cos zs}{s[sK_0(\omega as) + gK_1(\omega as)]} ds$$

$$\tau(z) = \frac{2gP_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos zs}{f(s)} ds, \quad N(z) = \frac{2P_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin zs}{f_1(s)} ds,$$

$$g = \frac{2\pi a G \omega}{EF} = \frac{2G\omega}{Ea}, \quad f(s) = g + s \frac{K_0(\omega as)}{K_1(\omega as)}, \quad f_1(s) = s + g \frac{K_1(\omega as)}{K_0(\omega as)} \quad (s > 0) \quad (3.5)$$

где $N(z)$ — усилие в стержне, $K_0(x)$, $K_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя. Для функций $K_\nu(x)$ при больших положительных значениях аргумента x справедливы следующие асимптотические формулы ([11], с. 977, формула 8.451.6):

$$K_\nu(x) \approx \sqrt{\pi/2x} e^{-x} \quad (3.6)$$

Функции $f(s)$, $f_1(s)$ непрерывны и строго положительны на всей вещественной оси. Кроме того, согласно формулам (3.6) $f(s) \approx g + s$, $f_1(s) \approx g + s$ ($s \rightarrow +\infty$). При этом контактное напряжение $\tau(z)$ и усилие в стержне $N(z)$ выражаются следующим образом:

$$\tau(z) = \frac{2gP_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos zs}{g+s} ds = -\frac{2gP_0}{\pi} (\cos gz \operatorname{ci} gz + \sin gz \operatorname{si} gz)$$

$$N(z) = \frac{2P_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin zs}{g+s} ds = \frac{2P_0}{\pi} (\sin gz \operatorname{ci} gz - \cos gz \operatorname{si} gz) \quad (3.7)$$

где $\operatorname{si}(x)$, $\operatorname{ci}(x)$ — интегральные синус- и косинус-функции x . Большим значением параметра s соответствуют малые значения координаты z . Следовательно, поведение контактных напряжений и усилий в стержне при малых z полностью определяется формулами (3.7).

При малых положительных значениях аргумента x справедливы представления [11] (γ — константа Эйлера):

$$K_0(x) \approx \ln[2/(\gamma x)], \quad K_1(x) \approx 1/x \quad (3.8)$$

Используя формулы (3.8), усилие в стержне $N(z)$ при малых s (соответствует большим значениям координаты z) можно представить в виде

$$N(z) = \frac{2P_0}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \int_0^{\infty} \frac{\sin zs}{s(\lambda(s)+1)} ds \right], \quad \lambda(s) = \frac{Ea^2 s^2}{2G} \ln \frac{2}{\gamma \omega as} \quad (3.9)$$

Интеграл в (3.9) при возрастании z (убывании s) довольно быстро стремится к $\pi/2$. Действительно, при малых s и конечном отношении E/G (при этом следует учесть, что радиус a также достаточно мал) можно пренебречь функцией $\lambda(s)$ по сравнению с единицей. В этом случае

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin zs}{s} ds = \frac{\pi}{2}$$

Таким образом, в пространственной задаче при возрастании координаты z убывание усилий в стержне (следовательно, и контактных напряжений)

происходит значительно быстрее, чем в плоской задаче, где соответствующие величины выражаются формулами, аналогичными (3.7) [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* Об одной контактной задаче для полуплоскости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 5, с. 4—10.
2. *Sternberg E.* Load-transfer and load-diffusion in elastostatic.— Proc. 6th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. Cambridge, Mass., 1970. New York: ASME, 1970, p. 34—61.
3. *Васильев В. З.* Концентрация напряжений в полупространстве вблизи цилиндрического выступа при осесимметрическом нагружении.— Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 4, с. 46—58.
4. *Маневич Л. И., Павленко А. В.* К решению контактных задач теории упругости для ортотропной полосы с учетом сил трения.— Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 6, с. 72—80.
5. *Маневич Л. И., Павленко А. В.* Передача продольной динамической нагрузки, действующей на ребра жесткости, к упругой ортотропной пластине.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2, с. 117—124.
6. *Коблик С. Г., Маневич Л. И.* Контактная задача для ортотропной полосы при наличии в области контакта участков сцепления и скольжения.— В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости. Т. 20. Днепропетровский ун-т, 1976, с. 106—116.
7. *Павленко А. В.* Плоская задача теории упругости для пластинок с криволинейной анизотропией.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 70—82.
8. *Маневич Л. И., Воробьева Н. И.* О приближенных уравнениях осесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного основания.— Прикл. механика, 1972, т. 8, вып. 10, с. 33—38.
9. *Воробьева Н. И., Коблик С. Г., Маневич Л. И.* Осесимметричная контактная задача с учетом сцепления и скольжения.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 3, с. 550—558.
10. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
11. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
10.IX.1979