МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1981

УДК 539.374

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ МЕТАЛЛОВ, УЧИТЫВАЮЩАЯ МИКРОНАПРЯЖЕНИЯ

КАДАШЕВИЧ Ю. И., НОВОЖИЛОВ В. В.

В 1957 г. авторы публикуемой работы предложили теорию пластичности, учитывающую микронапряжения. За прошедшие 20 лет эта теория активно развивалась как авторами, так и другими исследователями. Влияние микронеоднородности пластических деформаций на микродеформацию поликристаллических металлов ни у кого в настоящее время не вызывает сомнений. Успехи, достигнутые в описании многих сложных явлений, протекающих при развитии пластических деформаций и в условиях ползучести, позволяют считать, что теория пластического течения и ползучести, учитывающая микронеоднородность развития пластических деформаций, является надежной и может быть применена для анализа напряженно-деформированного состояния конструкций, работающих в сложных режимах изменяющихся нагрузок и переменных температур.

Ниже приводится обзор теорий, которые мы в свое время назвали квазистатистическими вариантами теории пластичности и ползучести. Такие теории, развивающие идеи, высказанные А. Ю. Ишлинским [1, 2], Н. Н. Афанасьевым [3], иногда называют структурными моделями среды.

Авторы ограничились обсуждением трудов, непосредственно примыкающих к их собственным публикациям, и не анализировали многие другие интересные работы в области феноменологических теорий пластичности и ползучести.

1. Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера, была предложена в работе [4]. Определяющие соотношения этой теории записываются следующим образом:

$$\tau_{ij}=\tau\dot{\varepsilon}_{ij}^{p},\quad \varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^{y}+\varepsilon_{ij}^{p},\quad \tau_{ij}=\sigma_{ij}-s_{ij}$$
$$\varepsilon_{ij}^{y}=\sigma_{ij}/2G,\quad s_{ij}=k\dot{\varepsilon}_{ij}^{p},\quad \tau=\sqrt{\tau_{ij}\tau_{ij}} \tag{1.1}$$

Здесь ε_{ij}^{p} — девиатор тензора пластических деформаций, σ_{ij} — девиатор тензора напряжений, τ_{ij} — тензор активных напряжений, s_{ij} — тензор остаточных микронапряжений (тензор внешнего проявления остаточных микронапряжений [5]).

Материал предполагается первоначально изотропным, подчиняющимся критерию Мизеса. По этой теории поверхность текучести получала в процессе нагружения поступательное перемещение и расширялась сохраняя свою форму. Инвариант τ, как показано в [4], определял предел текучести материала, который, согласно уравнениям (1.1), зависел от длины дуги траектории пластического деформирования. Если предел текучести не зависит от истории нагружения, то соотношения (1.1) переходят в теорию А. Ю. Ишлинского [6].

Позволяя оценить величину и характер изменения эффекта Баушингера, более правильно описывая изменение поверхности текучести, эта теория не могла, однако, объяснить того факта, что при деформировании по циклу, замкнутому как по напряжениям, так и по деформациям, материал может оказаться неизотропным. Поэтому в ряде работ была сделана попытка уточнить теорию [4], оставаясь в рамках одноповерхностной теории пластичности. Приведем, в порядке усложнения, сводку основных тензорно-линейных соотношений второго порядка для теории течения (точка означает дифференцирование по параметру λ):

$$\sigma_{ij}=a_0\dot{\varepsilon}_{ij}^p+b_0\varepsilon_{ij}^p \quad \text{А. Ю. Ишлинский (1954)}$$

$$\sigma_{ij}=a(\lambda)\dot{\varepsilon}_{ij}^p+b(\varepsilon_i^p)\varepsilon_{ij}^p \quad \begin{matrix}\text{Ю. И. Кадашевич}\\ \text{В. В. Новожилов}\end{matrix} \ (1957)$$

$$\sigma_{ij}=a(\lambda)\dot{\varepsilon}_{ij}^p+b(\lambda)\ \varepsilon_{ij}^p \quad \begin{matrix}\text{Ю. И. Кадашевич (1967)}\\ \begin{matrix}\text{А. Филлипс}\\ \text{М. Айзенберг}\end{matrix}\ (1968)\end{matrix}$$

$$\dot{\sigma}_{ij}=a_0\ddot{\varepsilon}_{ij}^p+b\dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad \text{Г. Циглер (1959)}$$

$$\dot{\sigma}_{ij}=a(\lambda)\ddot{\varepsilon}_{ij}^p+b(\varepsilon_i^p)\dot{\varepsilon}_{ij}^p+c(\varepsilon_i^p)\varepsilon_{ij}^p \quad \text{В. В. Новожилов (1964)}$$

$$\dot{\sigma}_{ij}=a(\lambda)\ddot{\varepsilon}_{ij}^p+[a(\lambda)+b(\sigma_i)]\dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad \begin{matrix}\text{Р. А. Арутюнян}\\ \text{А. А. Вакуленко}\end{matrix} \ (1965)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}=a(\lambda)\ddot{\varepsilon}_{ij}^p+b(\lambda)\dot{\varepsilon}_{ij}^p+c(\lambda)\varepsilon_{ij}^p \quad \text{Ю. И. Кадашевич (1967)}$$

$$\dot{\sigma}_{ij}=a(\lambda)\ddot{\varepsilon}_{ij}^p+b(\lambda)\dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad \text{Д. Бакхауз (1968)}$$

$$\dot{\sigma}_{ij}=a(\lambda)\ddot{\varepsilon}_{ij}^p+[b(\lambda)+\dot{a}(\lambda)]\dot{\varepsilon}_{ij}^p-c(\lambda)\varepsilon_{ij}^p \quad \text{З. Мруз и др. (1976)}$$

$$\dot{\sigma}_{ij}+g(\lambda)\sigma_{ij}=a(\lambda)\ddot{\varepsilon}_{ij}^p+b(\lambda)\dot{\varepsilon}_{ij}^p+c(\lambda)\varepsilon_{ij}^p \quad \text{Ю. И. Кадашевич (1967)}$$

$$\dot{\sigma}_{ij}+g_0\sigma_{ij}=a\ddot{\varepsilon}_{ij}^p+b\dot{\varepsilon}_{ij}^p+c_0\varepsilon_{ij}^p \quad \text{Р. Криг (1975)}$$

К недостаткам теорий этого класса можно отнести следующие: на опыте не обнаруживается такой резкой картины изменения деформированного состояния в районе границы упругой и пластической зоны, которая постулируется в теории; наиболее благоприятны для теории материалы лишь одного класса, а именно циклически изотропно упрочняющиеся материалы, однако и для них предельное состояние при знакопеременном нагружении устанавливается значительно быстрее, чем на опыте.

Удачные попытки устранить ряд недостатков теории предприняты в [14, 15]. В первой работе сделан переход от уравнений теории [7] к теории вида

$$\sigma_{ij}=a(\lambda)\dot{\varepsilon}_{ij}^p+\int_0^\lambda b(\lambda')R(\lambda-\lambda')\dot{\varepsilon}_{ij}^p\,d\lambda'$$

(Несколько ранее о целесообразности такого рода представления высказался Вакуленко А. А. [16], но детализации теории им проведено не было.)

Во второй работе введено понятие дополнительной второй поверхности текучести (поверхности нагружения), что существенно расширило возможности теории.

Авторы публикуемой работы предложили иной путь исследования процесса пластического деформирования, исходя из более строгого подхода к оценке пластических свойств поликристаллических металлов.

Неравномерность пластической деформации, обусловленная как зернистостью структуры поликристалла, так и неравномерностью распределения дефектов в атомных решетках кристаллов, приближенно учитывалась путем представления тензора пластических деформаций в виде суммы элементарных (локальных) пластических деформаций, каждой из которых отвечала своя поверхность текучести и своя система внутренних микроупругих сил. Указанный подход, таким образом, основывался на предположении, что статистика анизотропных кристаллов может быть подменена статистикой изотропных частиц, обладающих различными пределами текучести.

Оказывается, что соответствующая теория способна описать и даже предсказывать достаточно тонкие эффекты, наблюдаемые при симметричных и несимметричных циклических нагружениях. Последний вид нагружений, относящийся к числу наиболее сложных (поскольку при нем траектория пластического деформирования многократно меняет свое направление на противоположное) и в то же время достаточно простой с точки зрения вычислительной, является своего рода испытательным стендом, на котором следует проверить и сопоставлять различные варианты теории пластичности, желая в них достигнуть высокой степени точности.

Теория пластичности строилась на основе следующих трех положений [17—20].

1. Формулировался локальный закон пластического течения, связывающий напряжения и деформации. Этот закон содержал один или несколько случайных параметров.

2. Совместная функция распределения случайных параметров считалась заданной и определялась с учетом экспериментальных данных.

3. Предполагались справедливыми обобщенные соотношения типа Кренера [19], связывающие отклонения напряжений и деформаций. Такие соотношения позволяют связать локальные законы пластического деформирования с макроскопическими законами пластического деформирования.

В дальнейшем используются следующие обозначения: $E_{ij}^p(\varepsilon_{ij}^p)$ — случайный тензор пластической деформации, $\Sigma_{ij}(\sigma_{ij})$ — девиатор случайного тензора напряжения, $T_{ij}(\tau_{ij})$ — случайный тензор диссипативных сил сопротивления пластическим деформациям (в скобках указаны обозначения реализаций этих случайных тензоров). Простейший вариант теории можно записать так [19, 20]:

$$d\varepsilon_{ij}^p=(\langle\Sigma_{ij}\rangle-k\varepsilon_{ij}^p)\,d\lambda,\quad \sigma_{ij}=\langle\Sigma_{ij}\rangle,\quad \langle\varepsilon_{ij}^y\rangle=\langle\Sigma_{ij}\rangle/2G$$

$$d\varepsilon_{ij}^p=[2G\langle E_{ij}\rangle-(k+2G)\,]\,d\lambda,\quad \varepsilon_{ij}=\langle E_{ij}\rangle$$

$$\langle E_{ij}^p\rangle=\int\limits_0^\infty \varepsilon_{ij}^p\,d\varphi(\tau),\quad \tau=\sqrt{\tau_{ij}\tau_{ij}},\quad \varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^y+\varepsilon_{ij}^p$$

где $\varphi(\tau)$ — интегральная функция распределения локального предела текучести материала.

Не анализируя подробно различные варианты теории (чему посвящена работа [18]), отметим лишь, что преимущество этих вариантов состояло не только в том, что вводилась новая функция, определяемая статистическими свойствами поликристаллических материалов, а скорее в том, что локальные законы течения стало возможным выбирать в наиболее простых и естественных формах. Кроме того, появилась возможность ввести в феноменологическую теорию пластичности такие понятия, как начальные микронапряжения и микродеформации, которые не учитывались классическими теориями пластичности. Позднее, в [21], установлено, что предельный вариант теории пластичности, учитывающий микронапряжения, переходит в теорию скольжения в форме Сандерса [22]. Там же приведен модифицированный вариант теории Сандерса, который может быть использован при расчете циклических нагружений.

2. Теория деформирования вязкоупругих пластических тел в настоящее время активно развивается и здесь не ставится цель охватить все возможные направления проблемы. Рассматривается лишь класс теорий, учитывающих микронеоднородность развития пластических деформаций

[23—27]. На первый взгляд, переход от теории пластичности к теории ползучести, если имеется ряд элементов, каждый из которых имеет свою поверхность текучести, не так уж сложен — нужно лишь добавить локальные свойства ползучести, а дальше поступать так, как поступают в теории пластичности. Однако при этом возникает ряд неясностей и многообразие возможностей. Действительно, сначала нужно сформулировать локальные законы деформирования (четко указав при этом, что такое пластическая деформация, деформация ползучести и т. д.), а затем сформулировать условия осреднения и взаимодействия различных составляющих в зависимости от параметров, характеризующих элементы.

При этом отдельного внимания заслуживают вопросы и неизотермической пластичности и ползучести. Создание неизотермической теории пластичности и ползучести представляет первостепенный интерес для практики.

В [23, 24], сохраняя общие принципы построения теории пластичности, на основе линейных законов вязкости и упругости и идеальной пластичности были построены варианты теории ползучести, удовлетворительно описывающие многие явления, протекающие при ползучести. К таким явлениям можно отнести: своеобразие кривых ползучести при ступенчатом нагружении, восстановление ползучести, отсутствие подобия кривых релаксаций, влияние ползучести и наклепа на релаксацию, влияние порядка ступенчатого нагружения на кривую ползучести; влияние разгрузки на ползучесть и др. Были рассмотрены локальные законы ползучести в следующих формах:

$$d\varepsilon_{ij}{}^{p}=\tau_{ij}d\mu,\quad \tau_{ij}=\sigma_{ij}-s_{ij},\quad \varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}{}^{\circ}+\varepsilon_{ij}{}^{p} \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_{ij}{}^{\circ}=\int_0^t\sigma_{ij}G_1(t-t')\,dt',\quad \varepsilon_{ij}{}^{p}=\int_0^t s_{ij}G_2(t-t')\,dt'$$

Из соотношений (2.1) нетрудно заметить, что деформации $\varepsilon_{ij}{}^{\circ}$, $\varepsilon_{ij}{}^{p}$ могут проявлять при медленном нагружении временные свойства, а при быстрых нагружениях — мгновенные свойства. Характерной особенностью приведенных уравнений является то обстоятельство, что при постоянных пластических деформациях происходит релаксация активных напряжений s_{ij}. Иногда, если это удобно, можно из соотношений (2.1) выделить «мгновенные» составляющие и записать их следующим образом:

$$\varepsilon_{ij}{}^{\circ}=\frac{\sigma_{ij}}{2G}+\int_0^t\sigma_{ij}J_1(t-t')\,dt'$$

$$\varepsilon_{ij}{}^{p}=\frac{s_{ij}}{k}+\int_0^t s_{ij}J_2(t-t')\,dt' \tag{2.2}$$

Из (2.2) видно, что если происходит релаксация активных напряжений s_{ij} (в условиях $\varepsilon_{ij}{}^{p}=\mathrm{const}$), то первое слагаемое, стоящее справа, уменьшается, т. е. проявляются уже не мгновенные, а временные свойства. Соотношения (2.1), (2.2) должны быть дополнены условиями, связывающими локальные величины с макроскопическими [19].

Можно установить преемственность классических наследственных теорий ползучести с некоторыми вариантами теории, основанными на локальных законах типа (2.1) [23—27]. Наследственные теории в форме Арутюняна — Розовского [28], в форме Персо [27], в форме Работнова [30], в форме Работнова — Суворовой [31] получаются из указанных соотношений при полностью активном нагружении, различаясь от них при неполностью активном нагружении, когда некоторые из ранее вступивших в движение поверхностей текучести стали неподвижными.

Отличительной особеностью рассмотренных в этом пункте соотношений теории течения, учитывающих микронеоднородность развития пластической деформации, является учет наследственных свойств материала (включая возврат механических свойств). Они, являясь естественным развитием наследственных нелинейных теорий ползучести, не учитывают возможности изменения локального предела текучести при нагружении.

Интересные соображения о влиянии нелинейных законов вязкости на определяющие соотношения вязкопластичности высказаны в [32]. Пути уточнения указанного варианта теории содержатся в [33].

3. В основе локальных законов ползучести, изложенных в п. 2, лежали простейшие представления о характере изменения необратимых деформаций. Возьмем теперь в качестве основного локального закона несколько модернизированный закон пластического течения (1.1), считая, что процесс развивается во времени

$$\frac{d\varepsilon_{ij}{}^p}{dt}=\varepsilon_{ij}{}^{\cdot p}=(\Phi_0(\tau,\lambda)/\tau)\tau_{ij},\qquad \tau_{ij}=\sigma_{ij}-k\varepsilon_{ij}{}^p \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}{}^p+\sigma_{ij}/2G,\qquad d\lambda=\sqrt{d\varepsilon_{ij}{}^p d\varepsilon_{ij}{}^p}$$

$$\varepsilon_i{}^{\cdot p}=\sqrt{\varepsilon_{ij}{}^{\cdot p}\varepsilon_{ij}{}^{\cdot p}}=\Phi_0(\tau,\lambda) \tag{3.2}$$

В одноосном случае уравнения (3.1) имеют вид

$$\varepsilon^{\cdot p}=\Phi_0(\tau,\lambda),\qquad \tau=\sigma-s,\qquad s=k\varepsilon^p \tag{3.3}$$

Следует заметить, что уравнение вида (3.1) было использовано еще в [34] для изучения закономерностей циклического деформирования при высоких температурах. В одноосном случае определяющие уравнения записывались так:

$$\varepsilon^{\cdot p}=\Phi(\tau,\lambda),\qquad \tau=\sigma-s,\qquad s^{\cdot}=A\varepsilon^{\cdot p} \tag{3.4}$$

Эта схема несколько позднее была уточнена в [35]:

$$\varepsilon^{\cdot p}=\Phi(\tau,\lambda),\qquad \tau=\sigma-s,\qquad s^{\cdot}=A\varepsilon^{\cdot p}-Bs \tag{3.5}$$

Как видно из уравнений, различие теорий [34, 35] заключается в третьем уравнении. Обоснование целесообразности такого уточнения теории содержится в [35], независимо от которой уравнения предложены для одноосного случая в [36] (для лучшего согласования теории и опыта утверждается, что кроме деформированного упрочнения должен учитываться возврат механических свойств). Следует заметить, что недавно авторы [37] обнаружили недостатки теории [35] и уточнили ее, считая, что при больших напряжениях существует поверхность текучести.

Разрешим (3.2) относительно τ, тогда

$$\tau=\psi(\varepsilon_i{}^{\cdot p},\lambda) \tag{3.6}$$

Рассмотрим скалярное соотношение (3.6). Казалось бы сделано немногое — обращено соотношение (3.2), но из-за этого раскрываются новые стороны соотношений типа (3.1). Ведь формула (3.6) утверждает простой, но принципиальный факт, что локальный предел текучести материала зависит от интенсивности скорости развития пластической деформации, т. е. теория (3.1) в новой трактовке является теорией пластического течения, в которой локальный предел текучести материала зависит от скорости развития пластической деформации.

Ясно, что соотношение (3.6) включает и частный случай, когда τ не зависит от скорости ($\tau=\psi(\lambda)$). Естественно, что можно ввести понятие предела текучести при очень медленном нагружении (τ_* — статический предел текучести) и предел текучести при очень быстром нагружении (τ_0 — динамический предел текучести), а следовательно, имеются два предельных варианта теории — динамический и статический типа А. Ю. Ишлинского [2].

Не исключен случай, когда нижний предел текучести равен нулю. Можно предположить также, что отсутствует верхний предел текучести. Последнее означает, что рассматривается обычный закон вязкого течения в нелинейной (или линейной) постановке. При этом становится ясным, что пластичность естественно трактуется как вырожденный случай вязкости. Обычно закон (3.6) принимается в нелинейной форме, однако внимания заслуживает и частный случай указанного закона, когда

$$\tau=\tau_*+\alpha(\lambda)\dot{\varepsilon}^{p} \text{ при } \dot{\varepsilon}^{p}<\varepsilon_0,\quad \tau=\tau_0 \text{ при } \dot{\varepsilon}^{p}\geqslant\varepsilon_0 \tag{3.7}$$

Заметим, что Пежина [37], предлагая теорию типа (3.1) ($k=0$), называл ее чувствительной к скорости. Вслед за ним Райс [39] подчеркивал, что такие соотношения, чувствительные к скорости, должны включать кинематическое и изотропное упрочнение (его конкретные предложения близки к предложениям работы [34]). Все сказанное относится к локальному закону течения.

При переходе к макроскопическому описанию обратим внимание на следующее: предел текучести (при деформировании) в локальном законе течения изменяется и целесообразно для каждого элемента среды ввести различающий их параметр. Для этого определяющий локальный закон течения запишем следующим образом:

$$\tau=\tau_0\psi(\lambda,\ \dot{\varepsilon}_i^{p}) \tag{3.8}$$

где τ_0 — локальный предел текучести материала при мгновенном нагружении. В дальнейшем введем в рассмотрение $\varphi(\tau_0)$ интегральную функцию распределения пределов текучести.

Заметим, что такого рода параметр (τ_0) был введен в [40] для нелинейно-вязкого материала, для отражения зависимости предела текучести от температуры в [32], для учета разброса реологических свойств подэлементов среды — в [41].

В связи с принципиальной для теории трактовкой уравнения (3.6) необходимо отметить следующее. Еще Бесселинг [42] (см. также [41, 43]) предлагал использовать соотношение $\dot{\varepsilon}_k^{p}=f(\sigma_k)$, где напряжение σ_k действует в элементе с номером k. При достижении σ_k предела текучести τ_k скорость развития пластической деформации становится постоянной и равной $\dot{\varepsilon}_k^{p}=f(\tau_k)$. Это уравнение трактовалось как основной закон ползучести элемента [42] или закон установившейся ползучести [41].

Перенося акцент на зависимость предела текучести элементов от скорости развития пластической деформации, можно более логически осмыслить все различные варианты теории пластического течения, учитывающие временные явления. При такой интерпретации и сам подход Бесселинга становится естественным и понятным, т. е. нет какого-то специального скалярного или тензорного нелинейного закона ползучести, а есть лишь условие зависимости предела текучески материала от скорости в сочетании с теорией пластического течения материала, справедливой для элемента среды.

Пусть, например, пластическая деформация подчиняется локальному закону в форме Мизеса, у которого предел текучести материала зависит от интенсивности скорости развития пластической деформации:

$$\varepsilon_{ij}^{\cdot p} = (\tau_{ij} / \tau) \Phi (\tau / \tau_0, \lambda) \tag{3.9}$$

Например, если потребовать, чтобы

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij}, \quad \langle E_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}, \quad \tau = \tau_0 \psi (\varepsilon_i^{\cdot p}) \tag{3.10}$$

тогда получится вариант теории, впервые сформулированный Бесселингом [42] и детально разработанный и проанализированный в работах [41, 43]. Отметим, что в этом варианте деформация ε_{ij}^p может проявлять как свойства ползучести (изменение деформации при медленном нагружении), так и зависимость от быстрого нагружения.

Можно предложить еще более простой вариант определяющих уравнений теории ползучести, учитывающей микронапряжения. Предположим, что в уравнении (3.10) функция ψ зависит не от локальных, а от макроскопических характеристик материала (например, $\tau = \tau_0 \psi(\langle \varepsilon^{\cdot p} \rangle)$). Это приведет к теории, которая, совпадая с теорией упрочнения при полностью активном нагружении, даст отличные от нее результаты при неполностью активном нагружении, описывая, в частности, эффект обратного последействия. Но не следует такую возможность ($k=0$) считать единственно приемлемой. Учитывая, что даже одноповерхностные теории типа Ишлинского показали себя лучше, чем теории типа Рейса, следует рекомендовать рассматривать и вариант теории [25]:

$$\varepsilon_{ij}^{\cdot p} = \frac{\tau_{ij}}{\tau} \Phi \left(\frac{\tau}{\tau_0} \lambda \right), \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij} - k \varepsilon_{ij}^p \tag{3.11}$$

при двух условиях осреднения: $\langle \Sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}$ или $\langle E_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}$ (возможно, даже в виде обобщенных соотношений типа Кренера $\varepsilon_{ij} - \langle E_{ij} \rangle = n(\sigma_{ij} - \langle \Sigma_{ij} \rangle)$).

Обратим внимание и на следующее: при $k \neq 0$ локальные законы ползучести дают ограниченную ползучесть, что для металлов в ряде случаев следует признать желательным.

В системе соотношений (3.11) второе уравнение не учитывает возврата механических свойств. Тогда вместо него можно использовать уравнение, предложенное в [36, 37]. Для перехода от локальных законов деформирования к макроскопическим характеристикам достаточно, по-видимому, ограничиться условием осреднения $\langle \Sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}$ или $\langle E_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}$.

Если, как обычно, считать, что интегральная функция распределения пределов текучести известна, то макроскопические деформации находятся по обычным формулам

$$\langle E_{ij}^p \rangle = \int_0^\infty \varepsilon_{ij}^p d\varphi(\tau_0)$$

Возможности простейших вариантов этого направления с соответствующими примерами приведены в [41, 43, 44]. Добавим лишь, что при резком изменении характера нагружения (например, при переходе с очень медленного на очень быстрое нагружение) кривая деформирования сразу выходит на свое предельное положение (при мгновенном первоначальном нагружении), что не всегда согласуется с опытом. Некоторые другие недостатки теории указаны в [43].

Итак, здесь выделяется второе направление развития теории пластического течения, учитывающей влияние неоднородности развития пластической деформации. Главной особенностью этого направления является учет влияния скорости развития пластической деформации на предел текучести материала. Большинство авторов для конкретизации теории предлагают использовать опыты с постоянной скоростью развития полной деформации и опыты на простое последействие (ползучесть). При неизотермическом нагружении необходимо иметь результаты указанных опытов при различных температурах.

4. В пп. 2, 3 в новой интерпретации изложены известные теории течения и их естественные обобщения. Из анализа теорий следует, что одно направление уделяет главное внимание влиянию скорости развития пластической деформации на предел текучести материала, второе направление, напротив, не придавая особого значения влиянию скорости развития пластической деформации на предел текучести, сосредоточивается на наследственных свойствах материалов. Нет сомнений, что оба направления заслуживают признания. Об этом убедительно свидетельствуют те многочисленные примеры, которые приводятся в работах каждого из упомянутых направлений. Но существуют опыты, в которых происходят резкие изменения скорости нагружения (например, от медленного к более быстрому), когда требуется «более гибкая реакция» уравнений, чем вытекающая из теории, обсуждавшейся в п. 1. Или, наоборот, смена характера нагружения требует более заметного влияния возврата, чем вытекает из теории, изложенной в п. 2. Нет препятствий к построению уравнений, объединяющих свойства, рассмотренные в предыдущих пунктах (т. е. теории, учитывающей и наследственные свойства материала, и влияние скорости интенсивности пластической деформации на предел текучести материала).

Например, заслуживают внимания соотношения [25]:

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^{y}+\varepsilon_{ij}^{p},\quad \varepsilon_{ij}^{p}=\int_0^t s_{ij}R_1(t-t')\,dt'$$

$$\tau_{ij}=\sigma_{ij}^{*}-s_{ij},\quad \sigma_{ij}^{*}=\int_0^t \sigma_{ij}R_2(t-t')\,dt' \tag{4.1}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}=(\tau_{ij}/\tau)\,\Phi(\tau/\tau_0,\lambda)$$

при двух условиях осреднения: $\varepsilon_{ij}=\langle E_{ij}\rangle$ или $\sigma_{ij}=\langle\Sigma_{ij}\rangle$.

Написанные формулы, с одной стороны, включают в себя большинство вариантов, которые анализировались в предыдущих разделах, а с другой — приобретают ряд новых черт, несомненно представляющих интерес. Действительно, сочетание наследственных свойств материала с условием зависимости предела текучести от скорости пластического деформирования дает возможность получить удовлетворительное совпадение теории и опыта при весьма сложных и контрастных испытаниях.

Для изучения эффекта циклической нестабильности (например, в [45]) подробно изучены соотношения теории в виде

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^{y}+\varepsilon_{ij}^{p},\quad \tau_{ij}=\tau_0\psi(\lambda,\dot{\lambda})\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}/\dot{\lambda}$$
$$\tau_{ij}=\sigma_{ij}-s_{ij},\quad \dot{s}_{ij}+\beta s_{ij}=[b(\lambda)\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}] \tag{4.2}$$

5. В предыдущих разделах проанализированы временные явления, возникающие при изучении пластичности и ползучести поликристаллических металлов. Ясно, что понятия «пути нагружения», «пути деформиро-

вания» существенно усложняются, если считать изменяющимися не только напряжения и деформации, но и температуру.

Прагер [46] дополнил теорию течения [5], введя температуру в качестве параметра в уравнение поверхности текучести. Затем неизотермические варианты теории течения, имеющие одну поверхность текучести, изучались в [47, 48, 49]. Вопросам неизотермической теории пластичности в рамках теории, учитывающей неоднородность микропластической деформации, посвящены работы [50, 41, 51], где принимается, что параметры, определяющие локальный закон течения, зависят от температуры.

В работе [50] утверждается, например, что принцип Мазинга, справедливый при температуре T_1, остается справедливым при переходе к температуре T_2, т. е. история изменения температуры не сказывается на формулировке принципа Мазинга, отвечающего новой температуре T_2. Критикуя эту схему, в [51] утверждается, что изменение температуры сказывается существенно на форме обобщенного принципа Мазинга. В [52, 53] показывается, что обе схемы развития пластических деформаций могут иметь место в зависимости от истории изменения температуры. Кроме того, в них обращается внимание на тот факт, что возможно несколько качественно различных редакций обобщенного принципа Мазинга — в зависимости от истории нагружения.

В теориях ползучести, основанных на учете микронеоднородности пластической деформации, по-разному подходят к учету влияния температуры на процесс пластического деформирования. В ряде работ [42, 23] этот вопрос вообще не обсуждается, в некоторых работах изменение температуры учитывается параметрически [32, 41, 43].

Существует точка зрения [24], что необходимо использовать обобщенный принцип температурно-временного соответствия. К сожалению, приходится признать, что в большинстве теоретических работ, изучающих влияние температуры на процесс пластического деформирования, ограничиваются изучением изменения напряженного или деформированного состояния в условиях различных, но постоянных температур. Поэтому суждение о возможностях того или иного варианта теории нельзя считать окончательным до тех пор, пока не проведен специальный анализ температурных эффектов на контрастных опытах.

В этой связи большой интерес представляют опыты [54, 55], где обнаружен и тщательно изучен эффект температурного последействия в металлах. Критика принципа температурно-временного соответствия в его классической редакции, содержащаяся в [54], привела авторов [24, 25] к необходимости обобщения указанного принципа, и, как следствие, к теоретическому предсказанию существования эффекта температурной релаксации.

В литературе в последние годы высказывается мысль [56], что кривая мгновенного нагружения не должна зависеть от температуры, поэтому в [57] приведены определяющие соотношения, учитывающие указанный фактор.

Выше рассмотрено (в исторической перспективе) одно из направлений феноменологической теории пластичности и ползучести. Теоретические варианты этого направления, исходя из простейших законов упругости, пластического течения, ползучести и используя довольно простые соображения статистического характера, позволяют учесть как наследственные свойства материала, так и зависимость локального предела текучести от скорости изменения интенсивности пластической деформации.

В последнее время удалось включить в эти варианты и влияние температуры. В теоретическом плане это направление представляется близким к завершению. Однако предстоят еще значительные работы по количественной оценке возможностей отдельных ее вариантов и по детальной ее экспериментальной проверке. Появление все большего числа теоретических и экспериментальных работ (см. настоящий обзор), следующих данному направлению, свидетельствует о его перспективности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю.* Некоторые применения статистики к описанию законов деформирования тел.– Изв. АН СССР. ОТН, 1944, № 9, с. 583–590.
2. *Ишлинский А. Ю.* Уравнения деформирования не вполне упругих и вязкопластических тел.– Изв. АН СССР. ОТН, 1945, № 1–2, с. 34–45.
3. *Афанасьев Н. Н.* Статистическая теория усталостной прочности металлов. Киев: Изд-во АН УССР, 1953. 128 с.
4. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера.– Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 4, с. 586–588.
5. *Новожилов В. В.* О сложном нагружении и перспективах феноменологического подхода к исследованию микронапряжений.– ПММ, 1964, т. 28, вып. 3, с. 393–400.
6. *Ишлинский А. Ю.* Общая теория пластичности с линейным упрочнением.– Укр. матем. ж., 1954, т. 6, № 3, с. 314–325.
7. *Кадашевич Ю. И.* О различных вариантах тензорно-линейных соотношений в теории пластичности.– Исследования по упругости и пластичности: Сб. статей. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967, вып. 6, с. 39–45.
8. *Eisenberg M. A., Phillips A.* On Nonlinear kinematik hardening.— Acta mech., 1968, v. 5, No. 1, p. 1–15.
9. *Ziegler H.* A Modification of Prager's hardening rule.— Quart. Appl. Math., 1959, v. 17, No. 1, p. 55–65.
10. *Арутюнян Р. А., Вакуленко А. А.* О многократном нагружении упругопластической среды.– Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 4, с. 53–61.
11. *Backhaus G.* Zur Fliessgrenze bei allgemeiner Verfestigung.– ZAMM, 1968, B. 48, H. 2, S. 99–108.
12. *Mroz Z., Shrivastava H. P., Dubey R. N.* Nonlinear hardening model and its application to cyclic loading.— Acta Mech., 1976, v. 25, No. 1–2, p. 51–61.
13. *Krieg R. D.* A practical two surface plasticity theory.— Trans ASME. Ser. E. Y. Appl. Mech., 1975, v. 42, No. 3, p. 641–646.
14. *Backhaus G.* Zur analytischen Erfassung des allgemeinen Bauschingereffektes.— Acta Mech., 1972, v. 14, No. 1, p. 31–42.
15. *Dafalias Y. F., Popov T. P.* Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity.— Trans. ASME. Ser E. J. Appl. Mech., 1976, v. 43, No. 4, p. 645–651.
16. *Вакуленко А. А.* Суперпозиция в реологии сплошной среды.– Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 1, с. 69–74.
17. *Кадашевич Ю. И.* Обобщенная теория пластического течения.– Исследования по упругости и пластичности: Сб. статей. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1967, вып. 6, с. 25–38.
18. *Кадашевич Ю. И.* О квазистатистическом варианте теории пластического течения.– Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4, с. 167–171.
19. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* Об учете микронапряжений в теории пластичности.– Инж. ж. МТТ, 1968, № 3, с. 82–91.
20. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* О влиянии начальных микронапряжений на микроскопическую деформацию поликристаллов.– ПММ, 1968, т. 32, вып. 5, с. 908–922.
21. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* О предельных вариантах теории пластичности, учитывающей начальные микронапряжения.– Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 3, с. 93–96.
22. *Клюшников В. Д.* Новые представления в пластичности и деформационная теория.– ПММ, 1959, т. 23, вып. 4, с. 722–731.
23. *Кадашевич Ю. И.* О статистическом подходе к оценке ползучести твердых тел.– В кн.: проблемы механики твердого деформированного тела. Л.: Судостроение, 1970, с. 177–185.
24. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* Теория ползучести, учитывающая микропластические деформации.– Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5, с. 153–159.
25. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* Теория пластичности и ползучести, учитывающая наследственные свойства и влияние скорости пластического деформирования на локальный предел текучести материала.– Докл. АН СССР, 1978, т. 238, № 1, с. 36–38.
26. *Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.* Теория ползучести микронеоднородных сред.– Исследования по упругости и пластичности: Сб. статей. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978, вып. 12, с. 59–71.

27. *Кадашевич Ю. И.* Об одном варианте теории ползучести, учитывающем микропластические деформации.– Механика деформируемого твердого тела: Сб. статей. Куйбышевск. ун-т, 1978, вып. 4, с. 77–82.
28. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехиздат, 1952. 324 с.
29. *Persoz B.* Le principe de superposition de Boltzmann.– Cahier Croupl Trans., 1957, v. 2, No. 1, p. 24–38.
30. *Работнов Ю. Н.* Равновесие упругой среды с последействием.– ПММ, 1948, т. 12, вып. 1, с. 18–26.
31. *Работнов Ю. Н., Суворова Ю. В.* О законе деформирования металлов при одноосном нагружении.– Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4, с. 41–54.
32. *Зарубин В. С., Кузьмин М. А.* Расчетная модель неизотермического деформирования конструкционного материала.– Изв. вузов. Машиностроение, 1967, № 8, с. 31–35.
33. *Зарубин В. С., Кадашевич Ю. И., Кузьмин М. А.* Описание ползучести металлов при помощи структурной модели.– Прикл. механика, 1977, т. 13, № 9, с. 10–13.
34. *Паллей И. З.* К построению неатермической теории циклических нагружений.– Инж. ж. МТТ, 1968, № 1, с. 130–134.
35. *Хажинский Г. М.* О теории ползучести и длительной прочности металлов.– Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 6, с. 29–36.
36. *Лихачев В. А., Владимиров В. И.* Роль упрочнения в ползучести и температурном последействии.– Физика металлов и металловедение, 1965, т. 19, № 1, с. 3–9.
37. *Малинин Н. Н., Хажинский Г. М.* Теория ползучести с различными механизмами деформирования.– В кн.: Прочность материалов и конструкций. Киев: Наукова думка, 1975, с. 190–196.
38. *Пэжина П.* Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968, 176 с.
39. *Rise J. R.* On the structure of stress-strain relations fortime-dependent plastic deformation in metals.– Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1970, v. 37, No.3, p. 728–737.– Рус. перев.: Механика: Сб. переводов иностр. статей, 1959, № 5, с. 102–120.
40. *Милейко С. Т.* Одноосная ползучесть неоднородного стержня.– Инж. ж. МТТ, 1967, № 5, с. 163–166.
41. *Иванов И. А., Садаков О. С.* Моделирование неоднородности при описании неизотермического деформирования реальных материалов.– Тепловые напряжения в элементах конструкции: Сб. статей, Киев: Наукова думка, 1970, вып. 10, с. 173–179.
42. *Besseling J. F.* Theory of elastic, plastic and creep deformation of an initially isotropic material showing anisotropic strain — hardening, creep recoverty and secondary creep.— J. Appl. Mech., 1958, v. 25, No. 4, p. 529.
43. *Садаков О. С.* Анализ напряженно-деформированного состояния элементов конструкций при циклических неизотермических нагружениях на основе структурной модели среды.– Материалы Всес. симпоз. по малоцикловой усталости при повышенных температурах. Челябинск, 1974, вып. 3, с. 95–127.
44. *Иванов И. А.* Накопление деформаций при непропорциональных циклических нагружениях в условиях нормальных и повышенных температур.– В кн.: Материалы Всес. симпоз. по малоцикловой усталости при повышенных температурах. Челябинск, 1974, вып. 3, с. 42–56.
45. *Кадашевич Ю. И., Кузьмин М. А.* Описание процесса вязкопластического течения циклически нестабильных материалов.– Прикладные проблемы прочности и пластичности: Сб. статей. Горький: Изд-во Горьковск. ун-та, 1979, вып. 12, с. 110–119.
46. *Prager W.* Nonisotermal plastic deformation.– Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1958, B. 61, No. 3, p. 176–182.
47. *Паллей И. З.* Приложение теории остаточных микронапряжений к неизотермическому деформированию.– Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 2, ст. 110–113.
48. *Биргер И. А.* Теория пластического течения при неизотермическом нагружении.– Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 1, с. 193–196.
49. *Биргер И. А., Демьянушко И. В.* Теория пластичности при неизотермическом нагружении.– Инж. ж. МТТ, 1968, № 6, с. 70–71.
50. *Зарубин В. С., Кузьмин М. А.* Упругопластическое деформирование конструкционного материала при переменной температуре.– Изв. вузов. Машиностроение, 1969, № 12, с. 57–60.
51. *Мартыненко М. Е.* Применение структурной модели упругой вязкопластической среды к описанию циклического неизотермического деформирования.– В кн.: Материалы Всес. симп. по малоцикловой усталости при повышенных температурах. Челябинск: 1974, вып. 3, с. 73–84.
52. *Кадашевич Ю. И., Луценко А. М.* К анализу неизотермических вариантов теории пластичности, учитывающей микропластические деформации.– Тр. Лесотехн. акад.: Межвузовский сб., 1976, № 5, с. 163–166.

53. *Кадашевич Ю. И., Кузьмин М. А.* Исследование неизотермической пластичности с учетом микропластической неоднородности.– Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 4, с. 88–96.
54. *Лихачев В. А., Малыгин Г. А.* Температурное последействие в металлах.– Физика металлов и металловедение, 1963, т. 16, № 3, с. 435–439.
55. *Лихачев В. А., Малыгин Г. А., Владимиров Г. В.* Температурное последействие (обзор).– В кн.: Релаксационнные явления в твердых телах. М.: Металлургия, 1968, с. 98–114.
56. *Суворова Ю. В.* Учет температуры в наследственной теории упругопластических сред.– Проблемы прочности, 1977, № 1, с. 43–48.
57. *Кадашевич Ю. Н., Новожилов В. В.* Теория ползучести микронеоднородных сред.– Исследование по упругости и пластичности: Сб. статей. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978, вып. 12, с. 59–71.

Ленинград

Поступила в редакцию
28.XI.1980