

УДК 539.3

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ
ЗАГЛУБЛЕННЫМ ЖЕСТКИМ ВИБРАТОРОМ

БАБЕНКО В. А., ЗОЛОТАРЕВА Л. И.

В настоящее время хорошо изучены задачи о вибрации жесткого штампа на поверхности упругого полупространства или слоя (в плоском варианте на упругой полосе или полуплоскости). В вибросейсмозразведке и фундаментостроении более естественной и точной моделью физического процесса является постановка задачи с учетом заглубления вибратора в упругую среду.

Решение задачи в строгой постановке наталкивается на большие математические и технические трудности, связанные с решением бесконечной системы алгебраических уравнений. В публикуемой работе предлагается упрощенная модель указанной плоской задачи, позволяющая довести решение до конца.

1. Считая заглубление малым, упругую среду, на которой вибрирует штамп ширины $2a_1$, разбиваем на две области: верхняя (тонкий слой вне штампа, имеющий толщину заглубления штампа) моделируется пластиной Кирхгофа; нижняя (слой, слоистая среда или полупространство) описывается уравнениями Ламе.

$$D \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} w_n(x_1, t) = q_n(x_1, t) - \rho_n \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_n(x_1, t) \quad (1.1)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \mu \Delta u_c - \rho \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} = 0$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z_1} + \mu \Delta w_c - \rho \frac{\partial^2 w_c}{\partial t^2} = 0$$

$$\theta = \frac{\partial u_c}{\partial x_1} + \frac{\partial w_c}{\partial z_1}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}$$

$$\{w_n, u_c, w_c, q_n\} = e^{-i\omega t} \{w_0, u_1, w_1, q\} \quad (\omega \geq 0), \quad (|x_1| < \infty, -h \leq z_1 \leq 0)$$

Здесь x_2, z_1 — декартова система координат с началом на поверхности слоя (слоистой среды, полупространства), ось z_1 направлена вертикально вверх; u_c, w_c — перемещения слоя вдоль осей x_1, z_1 соответственно, w_c — перемещение пластины, ρ, ρ_n — плотности слоя и пластины, q_n — напряжения на границе пластины и слоя, D — жесткость пластины, h — толщина слоя, λ, μ — коэффициенты Ламе, ω — частота вибрации штампа.

Нормальные перемещения под штампом считаются известными, касательными напряжениями под штампом и под пластиной пренебрегаем

$$w_1 = f_1(x_1) \quad (z_1 = 0, |x_1| < a_1)$$

$$\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (z_1 = 0, |x_1| < \infty)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} \right) + 2\mu \frac{\partial w_1}{\partial z_1} = q(x_1) \quad (z_1 = 0, |x_1| > a_1)$$

$$w_1 = w_0(x_1) \quad (z_1 = 0, |x_1| > a_1)$$

В зависимости от модели среды (слой, сцепленный с жестким основанием или лежащий на нем без трения, полупространство, слоистая среда) краевые условия для нижней границы раздела сред имеют различный вид, не влияющий на метод решения (например, численный анализ проведен для случая жесткого сцепления $u_1=w_1=0, z_1=-h$).

Изучаются два вида граничных условий на торце пластины: штамп жестко сцеплен с пластиной

$$w_0=f_1(\pm a_1), \quad w_0'=f_1'(\pm a_1) \quad (x_1=\pm a_1) \quad (1.2)$$

штамп свободно скользит вдоль торца пластины

$$Q \equiv -D \frac{\partial^3 w_n}{\partial x_1^3} = 0, \quad M_x \equiv -D \frac{\partial^2 w_n}{\partial x_1^2} = 0 \quad (x_1=\pm a_1) \quad (1.3)$$

Показано, что для выбранной модели постановка задачи является корректной лишь при условии (1.2). В случае (1.3) суммируемые решения получаются только при специальном задании нагрузки, действующей на штамп или пластину. Проводится анализ контактных напряжений под штампом и под пластиной.

2. Применяя интегральные преобразования известным образом к уравнениям (1.1) рассматриваемой задачи, с учетом граничных условий получим систему интегральных уравнений

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x-\xi) q(\xi) d\xi = f_1(x) \quad (|x| < a) \quad (2.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x-\xi) q(\xi) d\xi = f_j(x) + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} l(x-\xi) q_j(\xi) d\xi$$

$$j=2, \quad \alpha_1=-\infty, \quad \alpha_2=-a, \quad a+x < 0$$

$$j=3; \quad \alpha_1=a, \quad \alpha_2=\infty, \quad a-x < 0$$

$$\{x, \xi, a\} = h^{-1} \{x_1, \xi_1, a_1\}$$

$$k(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{-itu} dt, \quad l(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(t) e^{-itu} dt$$

$$K(t) = \frac{h}{2\mu} 0,5 \kappa_2^2 \sigma_1 [\sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh} \sigma_1 \operatorname{ch} \sigma_2 - t^2 \operatorname{ch} \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_2] \Delta_1^{-1}$$

$$\Delta_1 = t^2 (2t^2 - \kappa_2^2) \sigma_1 \sigma_2 - (2t^4 - t^2 \kappa_2^2 + 1/4 \kappa_2^4) \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{ch} \sigma_1 \operatorname{ch} \sigma_2 + t^2 [2t^4 - t^2 (2\kappa_2^2 - \kappa_1^2) + \kappa_1^2 \kappa_2^2 + 1/4 \kappa_2^4] \operatorname{sh} \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_2$$

$$\sigma_m = \sqrt{t^2 + \kappa_m^2} \quad (m=1,2), \quad \kappa_1^2 = \frac{\rho \omega^2 h^2}{\lambda + 2\mu}, \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2 h^2}{\mu}$$

$$f_j(x) = c_1^j e^{\pm bx} + c_2^j e^{\mp ibx}, \quad L(t) = \frac{h^4}{D} \frac{1}{t^4 - b^4}, \quad b = h \sqrt[4]{\frac{\rho_n \omega^2}{D}}$$

$$q(\xi) = q_1(\xi) + q_2(\xi) + q_3(\xi)$$

$$q_1(\xi) = 0 \quad (|\xi| < a), \quad q_2(\xi) = 0 \quad (a + \xi > 0)$$

$$q_3(\xi) = 0 \quad (a - \xi > 0)$$

где $q_1(\xi)$ — напряжения под штампом, $q_2(\xi)$, $q_3(\xi)$ — напряжения вне штампа, $k(t)$, $l(t)$ — ядра, характеризующие соответственно слой и пластину, b — параметр, зависящий от свойств пластины и частоты вибрации, $f_j(x)$ — общее решение уравнения для пластины, c_k определяются из граничных условий (1.2).

Продолжая левые части уравнений (2.1) на всю ось x функциями $\varphi_j(x)$ и применяя интегральное преобразование Фурье по x , приходим к системе функциональных уравнений

$$\begin{aligned} K(u)Q_1(u) + K(u)Q_2(u) + K(u)Q_3(u) &= F_1(u) + \Phi_1(u) \\ K(u)Q_1(u) + [K(u) - L(u)]Q_3(u) + K(u)Q_3(u) &= F_2(u) + \Phi_2(u) \\ K(u)Q_1(u) + K(u)Q_2(u) + [K(u) - L(u)]Q_3(u) &= F_3(u) + \Phi_3(u) \end{aligned} \quad (2.2)$$

где Q_j , F_j , Φ_j — трансформанты Фурье функций q_j , f_j , φ_j соответственно. Умножая систему (2.2) последовательно на $\exp(\pm iua)$, получим уравнения типа Винера — Хопфа, дальнейшее решение которых проведем методом приближенной факторизации [1, 2]:

$$\begin{aligned} K(u)Q_1^+(u) + K(u)Q_2^-(u) + K(u)Q_3^+(u)e^{2iua} &= F_1^+(u) + \Phi_1^-(u) + \Phi_1^+(u)e^{2iua} \\ K(u)Q_1^+(u) + [K(u) - L(u)]Q_2^-(u) + K(u)Q_3^+(u)e^{2iua} &= F_2^-(u) + \Phi_2^+(u) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} K(u)Q_1^+(u) + K(u)Q_2^-(u) + [K(u) - L(u)]Q_3^+(u)e^{2iua} &= \\ &= [F_3^+(u) + \Phi_3^-(u)]e^{2iua} \\ K(u)Q_1^-(u) + K(u)Q_2^-(u)e^{-2iua} + K(u)Q_3^+(u) &= \\ &= F_1^-(u) + \Phi_1^+(u) + \Phi_1^-(u)e^{-2iua} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} K(u)Q_1^-(u) + [K(u) - L(u)]Q_2^-(u)e^{-2iua} + K(u)Q_3^+(u) &= \\ &= (F_2^-(u) + \Phi_2^+(u))e^{-2iua} \\ K(u)Q_1^-(u) + K(u)Q_2^-(u)e^{-2iua} + [K(u) - L(u)]Q_3^+(u) &= F_3^+(u) + \Phi_3^+(u) \\ Q_1^\pm(u) &= e^{\pm iua}Q_1(u), F_1^\pm(u) = e^{\pm iua}F_1(u), \\ Q_2^-(u) &= e^{iua}Q_2(u), F_2^-(u) = e^{iua}F_2(u), \\ \Phi_2^+(u) &= e^{iua}\Phi_2(u), Q_3^+(u) = e^{-iua}Q_3(u), F_3^+(u) = e^{-iua}F_3(u), \\ \Phi_3^+(u) &= e^{-iua}\Phi_3(u), \Phi_1(u) = \Phi_1^1(u) + \Phi_1^2(u), \\ \Phi_1^-(u) &= e^{iua}\Phi_1^1(u), \Phi_1^+(u) = e^{-iua}\Phi_1^2(u) \end{aligned}$$

Здесь индекс (+) означает регулярность функции в верхней полуплоскости, а индекс (-) — в нижней, причем указанные функции обладают общей полосой регулярности.

Из (2.3) и (2.4) линейной комбинацией уравнений получаем

$$\begin{aligned} \{LQ_2^-\}^+(u) - F_1^+(u) + \Phi_2^+(u) - \Phi_1^+(u)e^{2iua} &= -\{LQ_2^-\}^-(u) - F_2^-(u) + \Phi_1^-(u) \\ \{LQ_3^+\}^+(u) + F_3^+(u) - \Phi_1^+(u) &= -\{LQ_3^+\}^-(u) + \\ &+ F_1^-(u) - \Phi_3^-(u) + \Phi_1^-(u)e^{-2iua} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Каждое из соотношений (2.5) определяет в комплексной плоскости целую функцию, которая в силу теоремы Лиувилля тождественно равна нулю. Следовательно

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(u) &= F_3^+(u) + \{LQ_3^+\}^+(u), \Phi_1^-(u) = F_2^-(u) + \{LQ_2^-\}^-(u) \\ \{LQ_2^-\}^-(u) &= L(u)Q_2^-(u) + L_1(u), \{LQ_3^+\}^+(u) = L_2(u) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$L_1(u) = \frac{h^4}{4Db^3} \left[\frac{Q_2^-(-b)}{u+b} + \frac{iQ_2^-(-ib)}{u+ib} \right]$$

$$L_2(u) = \frac{h^4}{4Db^3} \left[\frac{Q_3^+(b)}{u-b} + \frac{iQ_3^+(ib)}{u-ib} \right]$$

где $\{LQ_j^\pm\}^\pm(u)$ ($j=2, 3$) вычислены по формулам Сохотского — Племеля. Подставляя $\Phi_1^\pm(u)$ из (2.6) в (2.3), после простых преобразований получим уравнение

$$K^*(u)Q_2^-(u) + Q_1^+(u) = -K^*(u)Q_3^+(u)e^{2iua} + G(u) \quad (2.7)$$

$$K^*(u) = [K(u) - L(u)]/K(u), \quad \lim_{|u| \rightarrow \infty} K^*(u) = 1$$

$$G(u) = \frac{1}{K(u)} [F_2^-(u) + F_1^+(u) + F_3^+(u)e^{2iua} + L_1(u) - L_2(u)e^{2iua}]$$

Равномерная аппроксимация $K^*(u)$ дробно-рациональной функцией $T(u)$ с точным учетом действительных нулей и полюсов позволяет приближенно факторизовать ядро в виде произведения $K^*(u) \approx T(u) = T_-(u)T_+(u)$. Тогда уравнение (2.7) примет вид

$$T_-(u)Q_2^-(u) + \frac{Q_1^+(u)}{T_+(u)} = -T_-(u)Q_3^+(u)e^{2iua} + \frac{G(u)}{T_+(u)} \quad (2.8)$$

Обозначая правую часть уравнения (2.8) через $G_1(u)$ и представляя ее суммой факторизованных функций $G_1^\pm(u)$, получим

$$G_1^\pm(u) = N_0^\pm(u) + \sum_{j=1}^n N_j^\pm(u)Q_3^+(z_j) + M_1^\pm(u)Q_2^-(-b) + M_2^\pm(u)Q_2^-(-ib)$$

где z_j — полюса $T(u)$ в верхней полуплоскости ($T_-(z_j) = 0$); интегралы $N_j^\pm(u)$, $M_1^\pm(u)$, $M_2^\pm(u)$ вычисляются по теории вычетов.

Таким образом, уравнение (2.8) можно представить в форме

$$T_-(u)Q_2^-(u) - G_1^-(u) = \frac{Q_1^+(u)}{T_+(u)} + G_1^+(u) \quad (2.9)$$

Соотношение (2.9) определяет во всей комплексной плоскости целую функцию. В случае первого вида граничных условий (1.2) на торце пластины функции $G_1^\pm(u)$ убывают на бесконечности и, следовательно, целая функция тождественно равна нулю, что приводит к суммируемости решения.

В случае вторых граничных условий (1.3) целая функция в силу поведения $G_1^\pm(u)$ на бесконечности есть константа [2].

3. Рассмотрим далее решение для первого вида граничных условий. Имеем

$$Q_1^+(u) = T_+(u)G_1^+(u), \quad Q_2^-(u) = G_1^-(u)/T_-(u) \quad (3.1)$$

Аналогично из системы (2.4) с учетом (2.5) получим

$$Q_1^-(u) = T_-(u)G_2^-(u), \quad Q_3^+(u) = G_2^+(u)/T_+(u) \quad (3.2)$$

Подставляя в (3.1) и (3.2) $u = z_m$, $u = -z_m$ ($m=1, 2, \dots, n$), приходим к замкнутой алгебраической системе для определения неизвестных коэффициентов $Q_2^-(-z_h)$, $Q_3^+(z_h)$, входящих в правые части уравнений (3.1), (3.2).

Таким образом получаем выражение для трансформант Фурье напря-

жений

$$Q_2^-(u) = \frac{1}{T_-(u)} \sum_{j=1}^n B_j \frac{1}{z_j - u}, \quad Q_3^+(u) = \frac{1}{T_+(u)} \sum_{j=1}^n C_j \frac{1}{z_j - u}$$

$$Q_1^+(u) = T_+(u) \left[-T_-(u) Q_3^+(u) e^{2iua} + \frac{G(u)}{T_+(u)} + \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{z_j - u} \right]$$

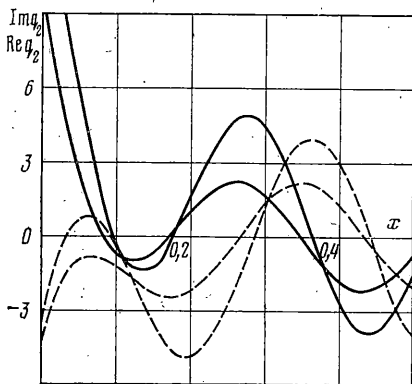
где B_j, C_j, m_j — известные численные коэффициенты.

Обратным преобразованием Фурье находим выражения для напряжений

$$q_2(x) = \sum_{j=1}^n A_j^2 e^{-iz_j(x+a)} \quad (x < -a), \quad q_3(x) = \sum_{j=1}^n A_j^3 e^{-iz_j(x-a)} \quad (x > a)$$

$$q_1(x) = \sum_{j=0}^n A_j^1 [e^{-iz_j(x-a)} + e^{iz_j(x+a)}] \quad (|x| < a)$$

Решение получено в виде конечного ряда гармоник, причем напряжение под пластиной определяется нулями ядра данной задачи ($T_-(z_j) = 0$), а под штампом — полюсами ($T_+^{-1}(z_j) = 0, z_0 = \eta, f_1 = e^{i\eta x}$). Коэффициенты A_j^k зависят от свойств среды, частоты вибрации, граничных условий.



Во втором варианте граничных условий только в случае специального задания $f_1(x)$ можно получить суммируемое решение, аналогичное (3.3). В противном случае напряжения представляются в виде суммы напряжений, имеющих сингулярную особенность и сосредоточенные силы на краях штампа и пластины.

Аналогично построено решение для полубесконечного штампа. Качественная картина здесь та же самая. Напряжение в случае сцепления штампа с пластиной, а также в случае специального выбора нагрузки на штамп (например, $f_1(x) = ce^{-i\eta x} + \alpha xe^{\alpha x}$, с выбирается из условия убывания $G_1(u)$ на бесконечности) получается в виде конечной суммы волн.

На фигуре приведены реальные (сплошные линии) и мнимые (штриховые линии) части напряжений под пластиной на двух различных частотах для задачи о колебании заглубленного штампа на слое, жестко сцепленном с недеформируемым основанием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронич И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
2. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
3. Бабешко В. А. Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике. — ПММ, 1971, т. 35, вып. 1, с. 88—99.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
17.VII.1980