МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1981

УДК 539.3.01

ВКЛЮЧЕНИЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ В СОСТАВНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ

РАДИОЛЛО М. В.

При математической формализации контактных задач информацию о упругих свойствах основания доставляет функция (ядро основания), которая, являясь ядром интегрального оператора, «перерабатывает» заданные на границе нормальные напряжения в соответствующие перемещения граничных точек. В задачах, учитывающих касательные взаимодействия, аналогичную роль играет [1] матрица-ядро основания. Аппарат ядерных матриц-функций хорошо приспособлен для исследования задач с конечной, либо полубесконечной областью контакта, так как позволяет сформулировать их в виде хорошо изученных интегральных уравнений.

Сложнее обстоит дело, если контакт осуществляется на обоих полубесконечных интервалах (например, при вдавливании двух полубесконечных штампов). Ввиду отсутствия эффективных методов решения уравнений, определенных на внешности конечного отрезка, широко распространенным способом решения подобных задач является способ сведения их к парным уравнениям [2–4] с последующим их точным решением, либо переходом к уравнениям Фредгольма.

В данной работе применительно к анизотропному основанию (плоская задача) излагается способ, позволяющий и в названных случаях непосредственно записывать интегральные уравнения на конечном интервале. Такая возможность основывается на введении кроме упомянутой выше матрицы-ядра еще трех матриц: одна решает обратную задачу (по заданным перемещениям границы полуплоскости определяются напряжения, которыми эти перемещения вызваны), остальные предполагают заданными разноименные напряжения и смещения. Изложенный подход развивается применительно к задачам о неполном контакте двух анизотропных полуплоскостей, имеющих дефекты на линии раздела материалов.

Напряженное состояние однородной и кусочно-однородной плоскости, ослабленной конечным включением, при тех или иных предположениях относительно упругих свойств включения и характера его взаимодействия с упругой средой исследовалось в [5–9].

1. Решение методом интегрального преобразования Фурье плоской задачи анизотропной теории упругости для полуплоскости ($|x|<\infty$, $y\geqslant 0$, ось y направлена вниз), загруженной в начале координат сосредоточенными силами P и T, направленными по направлению осей y и x, приводит к следующим формулам для вертикальных и горизонтальных перемещений граничных точек полуплоскости [1]:

$$\begin{gathered}
v(x,0)=P\left[\frac{A_3}{\pi}\ln\frac{1}{|x|}\right]+T\left[\frac{A_1}{\pi}\ln\frac{1}{|x|}+\frac{A_4}{2}\operatorname{sign}x\right]+\text{const}\\
u(x,0)=T\left[\frac{A_2}{\pi}\ln\frac{1}{|x|}\right]+P\left[\frac{A_1}{\pi}\ln\frac{1}{|x|}-\frac{A_4}{2}\operatorname{sign}x\right]+\text{const}
\end{gathered}\tag{1.1}$$

$$A_3=\beta_{11}[\delta_1(\gamma_2^2+\delta_2^2)+\delta_2(\gamma_1^2+\delta_1^2)],\qquad A_2=\beta_{11}(\delta_1+\delta_2)$$
$$A_1=\beta_{11}(\gamma_1\delta_2+\gamma_2\delta_1),\qquad A_4=\beta_{11}(\delta_1\delta_2-\gamma_1\gamma_2)+\beta_{12}$$

---

[1] В соответствующих формулах монографии [10] следует принять: $B_2=B_3=0$, $A_1=-A_4$, $B_1=-B_4$. (*Попов Г. Я., Радиолло М. В.* О плоских контактных задачах для упругих анизотропных сред.– Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 4, с. 173.)

где β_{mn} — коэффициенты обобщенного закона Гука, γ_k, δ_k — компоненты корней $\mu_k=\gamma_k+i\delta_k$ характеристического уравнения [11]:

$$\beta_{11}\mu^4-2\beta_{16}\mu^3+(2\beta_{12}+\beta_{66})\mu^2-2\beta_{26}\mu+\beta_{22}=0$$

Формулы (1.1) определяют компоненты матрицы-ядра анизотропного основания и позволяют вычислить перемещения ее граничных точек при произвольном загружении. Если к границе полуплоскости приложены нормальные $\sigma_1(x)$ и касательные $\sigma_2(x)$ нагрузки, то упомянутые перемещения будут равны

$$u_j(x)=A_{4-j}L_0[\sigma_j]+(A_1L_0-(-1)^jA_4S_0)[\sigma_{3-j}]+k_j \quad (j=1,2) \tag{1.2}$$

Здесь введены обозначения $u_1(x)=v(x, 0)$, $u_2(x)=u(x, 0)$, а также операторы

$$L_0[\varphi]\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{1}{|x-t|}\varphi(t)\,dt,\qquad S_0[\varphi]\equiv\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sign}(x-t)\varphi(t)\,dt \tag{1.3}$$

Заменим операторы L_0 и S_0 в формулах (1.2) операторами

$$L_\nu[\varphi]\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{\nu|x-t|^\nu}dt,\qquad S_\nu[\varphi]\equiv\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^\nu}\varphi(t)\,dt \tag{1.4}$$

для которых справедливы следующие предельные соотношения: $\lim\limits_{\nu\to0}L_\nu[\varphi]=L_0[\varphi]$, $\lim\limits_{\nu\to0}S_\nu[\varphi]=S_0[\varphi]$, в чем можно убедиться, если учесть в (1.2) произвольные постоянные и принять во внимание формулы

$$\lim_{\nu\to0}\left(\frac{1}{|x-t|^\nu}-1\right)\frac{1}{\nu}=\ln\frac{1}{|x-t|}$$

$$\lim_{\nu\to0}\frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^\nu}=\operatorname{sign}(x-t)$$

Таким образом, соотношения (1.2) являются предельными при $\nu\to0$ следующих вспомогательных равенств:

$$u_j(x)=A_{4-j}L_\nu[\sigma_j]+(A_1L_\nu-(-1)^jA_4S_\nu)[\sigma_{3-j}]+k_j \tag{1.5}$$

Дальнейшие преобразования формул (1.5) основываются на возможном представлении операторов (1.4) в виде прямого и обратного преобразований Фурье

$$F[\varphi]\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-isx}dx=\Phi(s),\qquad F^{-1}[\Phi]\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(s)e^{ixs}ds=\varphi(x)$$

Для этого подставим в (1.4) вытекающие из формул 3.761 [12] интегральные представления ядер

$$\frac{1}{\nu|Z|^\nu}=\frac{c_\nu}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|s|^{\nu-1}e^{izs}ds,\qquad \frac{\operatorname{sign}z}{|z|^\nu}=\frac{s_\nu}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|s|^{\nu-1}\operatorname{sign}s\,e^{izs}ds$$

$$c_\nu=\left[\Gamma(1+\nu)\cos\frac{\nu\pi}{2}\right]^{-1},\qquad s_\nu=-i\pi\left[2\Gamma(\nu)\sin\frac{\nu\pi}{2}\right]^{-1}$$

и изменим порядки интегрирований. В результате будем иметь

$$L_\nu[\varphi]=c_\nu F^{-1}\left[\frac{\Phi(s)}{|s|^{1-\nu}}\right],\qquad S_\nu[\varphi]=s_\nu F^{-1}\left[\frac{\operatorname{sign} s\Phi(s)}{|s|^{1-\nu}}\right] \tag{1.6}$$

Преобразуя (1.5) при помощи формул (1.6) и применяя к обеим частям полученного равенства преобразование Фурье, приходим к соотношению, устанавливающему непосредственную связь трансформант перемещений и напряжений

$$\begin{gathered}|s|^{1-\nu}U_j(s)=\alpha_jR_j(s)+\beta_jR_{3-j}(s)+|s|^{1-\nu}2\pi\delta(s)k_j,\qquad \alpha_j=c_\nu A_{4-j}\\ \beta_j=c_\nu A_1-(-1)^j s_\nu A_4\operatorname{sign} s,\qquad U_j(s)=F[u_j],\qquad R_j(s)=F[\sigma_j]\end{gathered} \tag{1.7}$$

где $\delta(s)$ — дельта-функция Дирака.

Рассматривая соотношение (1.7) как систему ($j=1, 2$) уравнений относительно трансформант напряжений и обращая ее, получим

$$\Delta_\nu R_j(s)=|s|^{1-\nu}[\alpha_{3-j}U_j(s)-\beta_jU_{3-j}(s)]-|s|^{1-\nu}2\pi\delta(s)h_j \tag{1.8}$$

$$\Delta_\nu=c_\nu^2[A_2A_3-(A_1)^2]+(s_\nu A_4)^2,\qquad h_j=\alpha_{3-j}k_j-\beta_jk_{3-j}$$

Из формул (1.7) и (1.8) можно вывести еще два соотношения, разрешив указанные формулы относительно $R_j(s)$ и $U_j(s)$:

$$\alpha_jR_j(s)=|s|^{1-\nu}U_j(s)-\beta_jR_{3-j}(s)-|s|^{1-\nu}2\pi\delta(s)k_j \tag{1.9}$$

$$\alpha_{3-j}U_j(s)=\Delta_\nu|s|^{\nu-1}R_j(s)+\beta_jU_{3-j}(s)+2\pi\delta(s)h_j \tag{1.10}$$

Применим к соотношениям (1.8)—(1.10) обратное преобразование Фурье, подействовав затем на слагаемые в правых частях (1.8), (1.9), содержащие трансформанты перемещений, тождественным оператором

$$J^{-1}J[\varphi]=I[\varphi]\equiv\varphi(x),\qquad J^{-1}[\varphi]\equiv\frac{d}{dx}\varphi(x),\qquad J[\varphi]\equiv\int\varphi(x)\,dx$$

Последующее изменение порядков интегрирований с учетом формул (1.4) и выполнение предельного перехода $\nu\to0$ приводит к такому результату:

$$\Delta_0\sigma_j(x)=-\frac{d}{dx}\{A_{1+j}K[u_j]-(A_1K-(-1)^jA_4I)[u_{3-j}]\} \tag{1.11}$$

$$A_{4-j}\sigma_j(x)=-\frac{d}{dx}K[u_j]-(A_1I+(-1)^jA_4K)[\sigma_{3-j}] \tag{1.12}$$

$$A_{1+j}u_j(x)=\Delta_0L_0[\sigma_j]+(A_1I+(-1)^jA_4K)[u_{3-j}]+k_j^* \tag{1.13}$$

$$(j=1,2),\qquad K[\varphi]\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt,\qquad I[\varphi]\equiv\varphi(x)$$

При выводе соотношения (1.11) использована полученная из [13, с. 568] формула

$$\lim_{\nu\to0}\frac{1}{\Gamma(\nu)}L_{1-\nu}[\varphi]=\frac{2}{\pi}\varphi(x)$$

Каждая из формул (1.11)—(1.13) аналогично (1.2) описывает компоненты соответствующей матрицы-ядра анизотропного основания.

2. В качестве примера применения полученных соотношений рассмотрим анизотропную полуплоскость, закрепленную на полубесконечных участках $|x|>l$ и загруженную на участке $(-l, l)$ нормальной нагрузкой p.

Для реализации граничных условий

$$\sigma_1(x)=p,\quad \sigma_2(x)=0\quad (|x|<l);\qquad u_1(x)=0,\quad u_2(x)=0\quad (|x|>l)$$

следует воспользоваться формулами (1.11) при $j=1$, 2. Выполняя в них интегрирование по частям и вводя обозначения $\varphi_j(x)=u_j'(x)$, приходим к системе сингулярных интегральных уравнений второго рода[2]

$$\Delta_0 p=-\frac{A_2}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\varphi_1(t)}{t-x}dt+\frac{A_1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\varphi_2(t)}{t-x}dt+A_4\varphi_2(x)$$

$$0=-\frac{A_3}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\varphi_2(t)}{t-x}dt+\frac{A_1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\varphi_1(t)}{t-x}dt-A_4\varphi_1(x)\tag{2.1}$$

решение которой не вызывает затруднений и может быть получено несколькими способами. Например, вычитая первое уравнение из второго, домноженного на комплексную постоянную $\gamma=(-A_1+i\varkappa)/A_3$, $\varkappa=(A_2A_3-A_1^2)^{1/2}$, приходим к эквивалентному системе (2.1) интегральному уравнению

$$\chi(x)+\frac{i\varkappa}{A_4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\chi(t)}{t-x}dt=-\Delta_0 p\qquad (|x|<l)\tag{2.2}$$

относительно комплексной функции $\chi(x)=-A_4[\gamma\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]$.

Добавив к частному решению (его можно построить, например, методом ортогональных многочленов [14]):

$$\chi_*(x)=-\Delta_0 p\left(\frac{l+x}{l-x}\right)^{\lambda},\quad \lambda=\frac{1}{2}+i\beta,\qquad \beta=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{A_4}{\varkappa}$$

нетривиальное решение [15, с. 102] однородного уравнения (2.2): $\chi_0(x)=c(l+x)^{\lambda-1}(l-x)^{\lambda}$, и определив произвольную постоянную c из условия

$$\int_{-l}^{l}\chi(x)\,dx=\int_{-l}^{l}[\chi_*(x)+\chi_0(x)]\,dx=0$$

получим

$$\chi(x)=\frac{\Delta_0 p\operatorname{sh}\pi\beta}{(l^2-x^2)^{1/2}}(2l\beta+ix)\left(\frac{l+x}{l-x}\right)^{i\beta}$$

В частности, для функции $\varphi_1(x)$ отсюда нетрудно вывести

$$\varphi_1(x)=-\frac{\Delta_0 pA_3\operatorname{sh}\pi\beta}{\varkappa A_4(l^2-x^2)^{1/2}}\left[x\cos\left(\beta\ln\frac{l+x}{l-x}\right)+2l\beta\sin\left(\beta\ln\frac{l+x}{l-x}\right)\right]\tag{2.3}$$

Если на участках $|x|>l$ границы полуплоскости имеет место гладкий контакт, то для формулировки такой задачи следует привлечь соотношение (1.12) при $j=1$. В результате приходим к интегральному уравнению первого рода

$$A_3 p=-\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\varphi_1(t)}{t-x}dt\qquad (|x|<l)$$

[2] Отметим, что при традиционном подходе разбираемая задача приводит к необходимости решать систему двух парных интегральных уравнений.

решением которого является функция

$$\varphi_1(x)=-pA_3x(l^2-x^2)^{-1/2} \tag{2.4}$$

Следует подчеркнуть, что в обоих рассмотренных случаях вертикальные перемещения границы полуплоскости на участке $|x|<l$, как видно из (2.3), (2.4), обладают свойством симметрии $u_1(x)=u_1(-x)$ при произвольной анизотропии. Можно показать, что горизонтальные перемещения указанного промежутка границы (соответствующие выражения здесь не приводятся) при произвольной анизотропии не обладают определенными свойствами четности. Если же полуплоскость ортотропна, то в этом случае $u_2(x)=-u_2(-x)$.

3. Наряду с исследованной в п. 1 полуплоскостью ($|x|<\infty$, $y>0$) рассмотрим также верхнюю полуплоскость ($|x|<\infty$, $y<0$), к границе которой также приложены нормальные и касательные нагрузки (считаем их положительными, если они направлены против соответствующих осей). Для перемещений граничных точек этой полуплоскости упомянутым ранее способом можно получить формулы, аналогичные (1.2). Если все величины, относящиеся к нижней полуплоскости, отмечать верхним индексом 1, а к верхней — индексом 2, то для перемещений граничных точек обеих полуплоскостей можно записать:

$$u_j^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}A_{4-j}^{(n)}L_0[\sigma_j^{(n)}]+((-1)^{n+1}A_1^{(n)}L_0-(-1)^jA_4^{(n)}S_0)[\sigma_{3-j}^{(n)}]+k_j^{(n)}$$
$$(j,n=1,2) \tag{3.1}$$

В задачах о неполном контакте двух (анизотропных) полуплоскостей удобно ввести полусуммы и полуразности перемещений и напряжений на границах

$$v_j^{(k)}(x)=\tfrac{1}{2}[u_j^{(1)}(x)+(-1)^{k+1}u_j^{(2)}(x)] \quad (j,k=1,2)$$
$$\omega_j^{(k)}(x)=\tfrac{1}{2}[\sigma_j^{(1)}(x)+(-1)^{k+1}\sigma_j^{(2)}(x)] \tag{3.2}$$

$$u_j^{(n)}(x)=v_j^{(1)}(x)+(-1)^{n+1}v_j^{(2)}(x) \quad (j,n=1,2)$$
$$\sigma_j^{(n)}(x)=\omega_j^{(1)}(x)+(-1)^{n+1}\omega_j^{(2)}(x) \tag{3.3}$$

Это связано с тем, что на участках непосредственного контакта полуплоскостей некоторые из указанных величин будут тождественно равны нулю.

Заменяя в (3.1) операторы L_0, S_0 операторами (1.4), образуя с помощью этих вспомогательных соотношений величины (3.2) и воспользовавшись в правых частях представлениями (3.3), получим

$$v_j^{(k)}(x)=a_{4-j}^{(k+1)}L_\nu[\omega_j^{(1)}]+(a_1^{(k+1)}L_\nu-(-1)^ja_4^{(k)}S_\nu)[\omega_{3-j}^{(1)}]+$$
$$+a_{4-j}^{(k)}L_\nu[\omega_j^{(2)}]+(a_1^{(k)}L_\nu-(-1)^ja_4^{(k+1)}S_\nu)[\omega_{3-j}^{(2)}]+h_j^{(k)}$$
$$a_j^{(k)}=\tfrac{1}{2}(A_j^{(1)}+(-1)^{k+1}A_j^{(2)}),\quad h_j^{(k)}=\tfrac{1}{2}(k_j^{(1)}+(-1)^{k+1}k_j^{(2)}) \tag{3.4}$$

Переходя в (3.4) с помощью (1.6) к трансформантам

$$V_j^{(k)}(s)=F[v_j^{(k)}],\quad \Omega_j^{(k)}(s)=F[\omega_j^{(k)}] \tag{3.5}$$

и применяя к обеим частям преобразование Фурье, приходим к соотношению (в этой и последующих формулах, записанных в трансформантах, слагаемые, содержащие произвольные постоянные, отброшены):

$$\begin{gathered}V_j^{(k)}(s)=|s|^{\nu-1}[\Phi_j^{(k,1)}(s)+\Phi_j^{(k,2)}(s)]\quad (j,k=1,2)\\ \Phi_j^{(k,m)}(s)=\alpha_j^{(k+m)}\Omega_j^{(m)}(s)+\beta_j^{(k+m)}\Omega_{3-j}^{(m)}(s)\\ \alpha_j^{(n)}=c_\nu a_{4-j}^{(n)},\quad \beta_j^{(n)}=c_\nu a_1^{(n)}-(-1)^j s_\nu a_4^{(n+1)}\operatorname{sign}s\end{gathered} \tag{3.6}$$

Рассматривая (3.6) как систему ($j=1$, 2) уравнений либо относительно трансформант полусумм $\Omega_j^{(1)}(s)$, либо полуразностей $\Omega_j^{(2)}(s)$ напряжений, обращая ее отдельно для двух названных групп неизвестных и объединяя полученные результаты, можем записать

$$\Delta_\nu^{(k+m)}\Omega_j^{(m)}(s)=|s|^{1-\nu}W_j^{(k,m)}(s)-\Psi_j^{(k,m)}(s)\quad (j,k,m=1,2) \tag{3.7}$$

$$\Delta_\nu^{(n)}=c_\nu^2[a_2^{(n)}a_3^{(n)}-(a_1^{(n)})^2]+(s_\nu a_4^{(n+1)})^2 \tag{3.8}$$

$$W_j^{(k,m)}(s)=\alpha_{3-j}^{(k+m)}V_j^{(k)}(s)-\beta_j^{(k+m)}V_{3-j}^{(k)}(s)$$

$$\Psi_j^{(k,m)}(s)=\alpha_{3-j}^{(k+m)}\Phi_j^{(k,m+1)}(s)-\beta_j^{(k+m)}\Phi_{3-j}^{(k,m+1)}(s)$$

Из формул (3.6), (3.7), разрешая их относительно $\Omega_j^{(m)}(s)$ и $V_j^{(k)}(s)$, можно получить еще два соотношения

$$\alpha_j^{(k+m)}\Omega_j^{(m)}(s)=|s|^{1-\nu}V_j^{(k)}(s)-\beta_j^{(k+m)}\Omega_{3-j}^{(m)}(s)-\Phi_j^{(k,m+1)}(s) \tag{3.9}$$

$$\alpha_{3-j}^{(k+m)}V_j^{(k)}(s)=|s|^{\nu-1}[\Delta_\nu^{(k+m)}\Omega_j^{(m)}(s)+\Psi_j^{(k,m)}(s)]+\beta_j^{(k+m)}V_{3-j}^{(k)}(s) \tag{3.10}$$

Применяя к (3.7), (3.9), (3.10) обратное преобразование Фурье и выполняя операции, описанные при выводе (1.11)–(1.13), получим

$$\begin{gathered}-\Delta_0^{(k+m)}\omega_j^{(m)}(x)=\frac{d}{dx}\{a_{1+j}^{(k+m)}K[v_j^{(k)}]-(a_1^{(k+m)}K-(-1)^j a_4^{(k+m+1)}I)[v_{3-j}^{(k)}]\}+\\ +(\nu_j^{(k,m)}I+(-1)^j\mu_0^{(k,m)}K)[\omega_j^{(m+1)}]+(\rho_j^{(k,m)}I+(-1)^j\mu_j^{(k,m)}K)[\omega_{3-j}^{(m+1)}]\end{gathered} \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered}-a_{4-j}^{(k+m)}\omega_j^{(m)}(x)=\frac{d}{dx}K[v_j^{(k)}]+(a_1^{(k+m)}I+(-1)^j a_4^{(k+m+1)}K)[\omega_{3-j}^{(m)}]+\\ +a_{4-j}^{(k+m+1)}I[\omega_j^{(m+1)}]+(a_1^{(k+m+1)}I+(-1)^j a_4^{(k+m)}K)[\omega_{3-j}^{(m+1)}]\end{gathered} \tag{3.12}$$

$$a_{1+j}^{(k+m)}\, v_j^{(k)}(x)=\Delta_0^{(k+m)}\, L_0[\omega_j^{(m)}]+(a_1^{(k+m)}\, I+(-1)^j a_4^{(k+m+1)} K)[v_{3-j}^{(k)}]+$$

$$+(\nu_j^{(k,m)} L_0-(-1)^j\mu_0^{(k,m)} S_0)[\omega_j^{(m+1)}]+(\rho_j^{(k,m)} L_0-(-1)^j\mu_j^{(k,m)} S_0)[\omega_{3-j}^{(m+1)}] \tag{3.13}$$

$$\nu_j^{(k,m)}=a_{1+j}^{(k+m)}\, a_{4-j}^{(k+m+1)}-a_1^{(k+m)}\, a_1^{(k+m+1)}-a_4^{(k+m)}\, a_4^{(k+m+1)}$$

$$\mu_j^{(k,m)}=a_{1+j}^{(k+m)}\, a_4^{(k+m)}-a_{1+j}^{(k+m+1)}\, a_4^{(k+m+1)}, \tag{3.14}$$

$$\rho_j^{(k,m)}=a_{1+j}^{(k+m)}\, a_1^{(k+m+1)}-a_{1+j}^{(k+m+1)}\, a_1^{(k+m)}$$

Соотношения (3.11)—(3.13) вместе с (3.4) (при $\nu=0$) не исчерпывают список формул, устанавливающих связь величин (3.2), (3.3). Для вывода недостающих соотношений следует обратиться к (1.8)—(1.10). Выполняемые при этом преобразования опишем применительно к (1.8). Снабдив фигурирующие в (1.8) величины верхним индексом n (при этом в соответствии с (3.1) A_{4-j} заменяется на $(-1)^{n+1}A_{4-j}^{(n)}$, а A_1 на $(-1)^{n+1}A_1^{(n)}$) и воспользовавшись преобразованными по Фурье формулами (3.2), (3.3) и обозначениями (3.5), найдем

$$\Omega_j^{(k)}(s)\,|s|^{1-\nu}[G_j^{(k,1)}(s)+G_j^{(k,2)}(s)] \quad {\scriptstyle (j,k=1,2)} \tag{3.15}$$

$$G_j^{(k,m)}(s)=\gamma_j^{(k+m)}\, V_j^{(m)}(s)-\delta_j^{(k+m)}\, V_{3-j}^{(m)}(s), \qquad \gamma_j^{(n)}=c_\nu b_{1+j}^{(n)}$$

$$\delta_j^{(n)}=c_\nu b_1^{(n)}-(-1)^j s_\nu b_4^{(n+1)}\operatorname{sign}s, \quad b_j^{(k)}=\frac{1}{2}\left[\frac{A_j^{(1)}}{\Delta_\nu^{(1)}}+(-1)^{k+1}\frac{A_j^{(2)}}{\Delta_\nu^{(2)}}\right]$$

Последующие преобразования (3.15), идентичные выполненным с (3.6), дают еще одну группу формул:

$$\omega_j^{(k)}(x)=-\frac{d}{dx}\{b_{1+j}^{(k+1)}\, K[v_j^{(1)}]-(b_1^{(k+1)}\, K-(-1)^j b_4^{(k)}\, I)[v_{3-j}^{(1)}]\}-$$

$$-\frac{d}{dx}\{b_{1+j}^{(k)} K[v_j^{(2)}]-(b_1^{(k)}\, K-(-1)^j b_4^{(k+1)}\, I)[v_{3-j}^{(2)}]\}$$

$$\Delta_0^{\circ(k+m)} v_j^{(m)}(x)=b_{4-j}^{(k+m)}\, L_0[\omega_j^{(k)}]+(b_1^{(k+m)}\, L_0-(-1)^j b_4^{(k+m+1)} S_0)[\omega_{3-j}^{(k)}]-$$

$$-(\overset{\circ}{\nu}{}_{3-j}^{(k,m)} I+(-1)^j\overset{\circ}{\mu}{}_0^{(k,m)} K)[v_j^{(m+1)}]+(\overset{\circ}{\rho}{}_{3-j}^{(k,m)} I+(-1)^j\overset{\circ}{\mu}{}_{3-j}^{(k,m)} K)[v_{3-j}^{(m+1)}]$$

$$b_{1+j}^{(k+m)}\, v_j^{(m)}(x)=L_0[\omega_j^{(k)}]+(b_1^{(k+m)} I+(-1)^j b_4^{(k+m+1)} K)[v_{3-j}^{(m)}]-$$

$$-b_{1+j}^{(k+m+1)} I[v_j^{(m+1)}]+(b_1^{(k+m+1)} I+(-1)^j b_4^{(k+m)} K)[v_{3-j}^{(m+1)}]$$

$$-b_{4-j}^{(k+m)}\,\omega_j^{(k)}(x)=\Delta_0^{\circ(k+m)}\frac{d}{dx}K[v_j^{(m)}]+(b_1^{(k+m)}\, I+(-1)^j b_4^{(k+m+1)}\, K)[\omega_{3-j}^{(k)}]+$$

$$+\frac{d}{dx}\{(\overset{\circ}{\nu}{}_{3-j}^{(k,m)} K-(-1)^j\overset{\circ}{\mu}{}_0^{(k,m)}\, I)[v_j^{(m+1)}]-$$

$$-(\overset{\circ}{\rho}{}_{3-j}^{(k,m)} K-(-1)^j\overset{\circ}{\mu}{}_{3-j}^{(k,m)}\, I)[v_{3-j}^{(m+1)}]\}$$

(нулик над коэффициентами Δ°, ν°, μ°, ρ° означает, что при их вычислении по формулам (3.8), (3.14) следует заменить постоянные $a_j^{(k)}$ на $b_j^{(k)}$). Аналогично из (1.9) и (1.10) выводятся еще два комплекта формул.

Полученный таким образом список соотношений (их общее количество при j, k, $m=1$, 2 равно 112) позволяет дать формулировку в виде интегральных уравнений на конечном интервале многочисленных задач о неполном контакте двух анизотропных полуплоскостей.

4. Пусть в трещину ($|x|<l$) на линии соединения двух различных анизотропных полуплоскостей вставлено без трения абсолютно гибкое несжимаемое включение (накладка), толщина которой описывается функцией $2g(x)$, $g(\pm l)=0$.

Так как на внешности разреза имеет место полное сцепление полуплоскостей, то, учитывая равенство нормальных и касательных перемещений и напряжений, можем записать

$$v_j^{(2)}(x)=0, \qquad \omega_j^{(2)}(x)=0 \quad {\scriptstyle (j=1,2)} \quad (|x|>l) \tag{4.1}$$

При этом на самом разрезе следует реализовать условия: $v_1^{(2)}(x)=g(x)$, $\omega_1^{(2)}(x)=0$, $\omega_2^{(1)}(x)=\omega_2^{(2)}(x)=0$ ($|x|<l$). Первое из них задает раскрытие трещины, второе условие вытекает из равенства нормальных напряжений, приложенных к накладке, а последние два указывают на отсутствие касательных напряжений на берегах разреза.

Для формулировки поставленной задачи следует привлечь соотношение (3.11) при $j=2$, $k=2$, $m=1$. В результате приходим к интегральному уравнению

$$\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt=f(x) \qquad (|x|<l) \tag{4.2}$$

$$\varphi(x)=\frac{d}{dx}v_2^{(2)}(x), \qquad f(x)=\frac{1}{a_3^{(1)}}\left[\frac{a_1^{(1)}}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{g'(t)}{t-x}dt-a_4^{(2)}g'(x)\right]$$

Определив из этого уравнения функцию $\varphi(x)$, можно найти прочие компоненты напряженного и деформированного состояния полуплоскостей. В частности, воспользовавшись (3.11) при $j=1$, $k=2$, $m=1$, нетрудно вычислить полусумму нормальных напряжений

$$-\Delta_0^{(1)}\omega_1^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{a_2^{(1)}g'(t)-a_1^{(1)}\varphi(t)}{t-x}dt-a_4^{(2)}\varphi(x) \quad (|x|<\infty) \tag{4.3}$$

Записанная формула определяет также нормальные напряжения, приложенные к каждой из полуплоскостей. Это вытекает из равенства названных величин для любых $|x|<\infty$, включая и зону контакта с накладкой: $\sigma_1^{(1)}(x)=\sigma_1^{(2)}(x)=\sigma_1(x)$ ($|x|<\infty$). Потому, исключив из (4.3) при помощи (4.2) интеграл, содержащий неизвестную функцию, можно записать

$$\sigma_1(x)=-\frac{a_2^{(1)}a_3^{(1)}-(a_1^{(1)})^2}{\Delta_0^{(1)}a_3^{(1)}}\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{g'(t)}{t-x}dt-\frac{a_4^{(2)}}{\Delta_0^{(1)}a_3^{(1)}}[a_1^{(2)}g'(x)-a_3^{(1)}\varphi(x)] \tag{4.4}$$

Если упругие постоянные полуплоскостей одинаковы (анизотропная плоскость с разрезом, содержащим профильную накладку), то для напряжений получим простую формулу

$$\sigma_1(x) = -\frac{1}{a_3^{(1)}}\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\frac{g'(t)}{t-x}dt \quad (|x|<\infty) \tag{4.5}$$

исключающую необходимость решения уравнения (4.2).

Анализ поведения интеграла типа Коши в (4.5) показывает [16, 17], что если $g'(\pm l)=0$ (концы накладки заострены и имеет место плавное смыкание берегов разреза), то нормальные напряжения в окрестности концов разреза непрерывны[3]. При конечных значениях $2g'(\pm l)$ (концы заострены, но образуют некоторый угол $0<\alpha<\pi$) нормальные напряжения имеют особенность логарифмического типа. В случае закругленных концов накладки ($g'(\pm l)$ неограничены) $\sigma_1(x)$ при $x\to\pm l$ имеет степенную особенность, причем ее показатель не зависит от упругих постоянных материала плоскости и определяется асимптотикой $g'(x)$ на концах интервала[4]. Анализ формул (4.2), (4.4) показывает, что эти выводы справедливы и в случае различных анизотропных полуплоскостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г. Я.* Пластинки на линейно-деформируемом основании.— Прикл. механика, 1972, т. 8, вып. 3, с. 3–17.
2. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
3. *Ханжов А. Д.* Температурные напряжения в частично закрепленной ортотропной пластинке.— Прикл. механика, 1973, т. 9, вып. 8, с. 125–129.
4. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. *Хачикян А. С.* Равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1970, т. 23, № 3, с. 14–22.
6. *Сулим Г. Т., Грилицкий Д. В.* Напряженное состояние кусочно-однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины.— Прикл. механика, 1972, т. 8, вып. 11, с. 58–65.
7. *Куршин Л. М., Суздальницкий И. Д.* Напряжения в плоскости с заполненной щелью.— Прикл. механика, 1973, т. 9, вып. 10, с. 62–68.
8. *Веденеева Н. Н., Клюшников В. Д., Мазинг Р. И.* Задача о склейке двух полуплоскостей.— Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1, с. 133–135.
9. *Соткилава О. В., Черепанов Г. П.* Некоторые задачи неоднородной теории упругости.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 3, с. 539–550.
10. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
11. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971, 1100 с.
13. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 671 с.
14. *Попов Г. Я.* О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 3, с. 518–531.
15. *Михлин С. Г.* Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. М.– Л.: Гостехиздат, 1949. 380 с.
16. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
17. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Одесса

Поступила в редакцию 25.VII.1979

[3] По-видимому, впервые этот факт был установлен в [9] для включения частного вида.

[4] Именно поэтому в [9] для эллиптического включения получена корневая особенность.