

УДК 539.3

ВЫПУЧИВАНИЕ УПРУТОГО ЦИЛИНДРА ПРИ КРУЧЕНИИ И СЖАТИИ

ЗУБОВ Л. М., МОИСЕЕНКО С. И.

В трехмерной постановке исследуется бифуркация равновесия сплошного кругового цилиндра при совместном действии кручения и сжатия (растяжения). Рассматривается изотропный несжимаемый упругий материал общего вида. Докритическое состояние определяется из точного решения задачи о кручении при конечных деформациях. Рассмотрен класс решений уравнений нейтрального равновесия, для которого задача устойчивости приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти решения позволяют удовлетворить в интегральном смысле некоторым физически содержательным краевым условиям на торцах цилиндра.

Для определения критических параметров применяется численный метод решения указанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные результаты получены для неогукковского материала и сравниваются с результатами элементарной теории устойчивости скрученных и сжатых стержней.

1. Докритическое состояние. Определяющее уравнение изотропного несжимаемого упругого тела имеет вид

$$\mathbf{T} = \kappa_1(I_1, I_2)\mathbf{F} - \kappa_2(I_1, I_2)\mathbf{g} - p\mathbf{E}, \quad I_1 = \text{tr } \mathbf{F}, \quad I_2 = \text{tr } \mathbf{g} \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{T} — тензор напряжений Коши, \mathbf{g} — мера деформации Альманзи, $\mathbf{F} = \mathbf{g}^{-1}$ — мера деформации Фингера, \mathbf{E} — единичный тензор, I_1, I_2 — первый и второй инварианты тензора \mathbf{F} (третий инвариант равен единице в силу условия несжимаемости), κ_1, κ_2 — некоторые функции этих инвариантов, задающие конкретный материал. Последнее слагаемое в (1.1) представляет собой составляющую напряжения в несжимаемом теле, не определяемую деформацией.

Изохорическая деформация кручения и растяжения (сжатия) сплошного кругового цилиндра задается соотношениями [1, 2]:

$$r = \lambda^{-1/2}\rho, \quad z = \lambda\zeta, \quad \varphi = \Phi + \psi\zeta, \quad \lambda, \psi = \text{const} \quad (1.2)$$

Здесь ρ, Φ, ζ — цилиндрические координаты недеформированного состояния, r, φ, z — цилиндрические координаты точек тела после деформации, λ — коэффициент растяжения по оси цилиндра, ψ — угол закручивания на единицу длины. Выражения мер деформации и инвариантов, соответствующие (1.2), будут такими:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \lambda(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi) - \psi r(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{k} + \mathbf{k}\mathbf{e}_\varphi) + \lambda^{-1}f(r)\mathbf{k}\mathbf{k} \\ \mathbf{F} &= \lambda^{-1}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + (\lambda^{-1} + \psi^2 r^2)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \lambda\psi r(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{k} + \mathbf{k}\mathbf{e}_\varphi) + \lambda^2\mathbf{k}\mathbf{k} \\ f(r) &= \lambda^{-1} + \psi^2 r^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$I_1 = 2\lambda^{-1} + \lambda^2 + \psi^2 r^2, \quad I_2 = 2\lambda + \lambda^{-2} + \lambda^{-1}\psi^2 r^2 \quad (1.4)$$

Здесь $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{k}$ — ортонормированный векторный базис цилиндрических координат в деформированной конфигурации.

Из соотношений (1.1), (1.3) и уравнений равновесия вытекает [1], что касательные напряжения τ_{rz} и $\tau_{r\varphi}$ равны нулю, а остальные компоненты тензора \mathbf{T} в базисе $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{k}$ зависят только от координаты r .

Для случая, когда боковая поверхность цилиндра незагружена, выражения напряжений и функции p имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\psi^2 \int_r^{r_0} \kappa_1(r) r dr, \quad \sigma_\varphi = \sigma_r + \psi^2 \kappa_1(r) r^2 \\ \sigma_z &= (\lambda^2 - \lambda^{-1}) \kappa_1(r) + [\lambda - \lambda^{-1} f(r)] \kappa_2(r) + \sigma_r \\ \tau_{\varphi z} &= \psi r [\lambda \kappa_1(r) + \kappa_2(r)], \quad p(r) = \lambda^{-1} \kappa_1(r) - \lambda \kappa_2(r) - \sigma_r \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь r_0 — радиус деформированного цилиндра. Значения функций $\kappa_i(r)$ ($i=1, 2$) получаются после подстановки в выражения функций $\kappa_i(I_1, I_2)$ соотношений (1.4).

Напряжения, действующие в любом поперечном сечении цилиндра, приводятся к продольной силе P и крутящему моменту M . Для заданного материала величины P и M будут некоторыми известными функциями параметров λ и ψ , определяемыми по формулам

$$P(\lambda, \psi) = 2\pi \int_0^{r_0} \sigma_z(r) r dr, \quad M(\lambda, \psi) = 2\pi \int_0^{r_0} \tau_{\varphi z}(r) r^2 dr$$

2. Уравнения нейтрального равновесия. Допустим, что наряду с описанным в п. 1 докритическим состоянием равновесия цилиндра при тех же внешних силах существует бесконечно близкое равновесное состояние, определяемое радиус-вектором частицы $\mathbf{R} + \eta \mathbf{w}$, где \mathbf{R} — радиус-вектор в докритическом состоянии, \mathbf{w} — вектор добавочного перемещения, η — малый параметр. Возмущенное состояние равновесия несжимаемого тела описывается уравнениями [1]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \Theta &= 0, \quad \Theta = \mathbf{T} - (\nabla \mathbf{w})^t \cdot \mathbf{T}, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \\ \mathbf{T} &= \left[\frac{d}{d\eta} \mathbf{T}(\mathbf{R} + \eta \mathbf{w}) \right]_{\eta=0}, \quad \nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{r \partial \varphi} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь ∇ — набла-оператор в метрике докритического состояния тела. К уравнениям (2.1) следует присоединить граничные условия на боковой поверхности цилиндра

$$\mathbf{e}_r \cdot \Theta = 0 \quad \text{при } r = r_0 \quad (2.2)$$

(О краевых условиях на торцах цилиндра см. ниже.)

Из (1.1), (2.1) получим

$$\begin{aligned} \Theta &= \kappa_1(r) \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{w} + \kappa_2(r) [(\nabla \mathbf{w}) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{g} \cdot (\nabla \mathbf{w})^t + \\ &+ (\nabla \mathbf{w})^t \cdot \mathbf{g}] + p(r) (\nabla \mathbf{w})^t + \kappa_1 \mathbf{F} - \kappa_2 \mathbf{g} + q \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\kappa_i = 2\kappa_{i1}(r) \operatorname{tr}(\mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{w}) - 2\kappa_{i2}(r) \operatorname{tr}(\mathbf{g} \cdot \nabla \mathbf{w}) \quad (2.4)$$

$$\kappa_{ij} = \partial \kappa_i / \partial I_j, \quad q = -p' \quad (i, j = 1, 2)$$

При определении функций $\kappa_{ij}(r)$ для данного материала следует подставить в выражение производных $\partial \kappa_i(I_1, I_2) / \partial I_j$ значения инвариантов (1.4). Для гиперупругого материала, когда существует функция удельной потенциальной энергии, имеем $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$.

Запишем компонентное представление вектора перемещений \mathbf{w} и тензора Θ в базисе $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{k}$:

$$\mathbf{w} = u \mathbf{e}_r + v \mathbf{e}_\varphi + w \mathbf{k}, \quad \Theta = \theta_{rr} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r + \theta_{r\varphi} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi + \dots$$

Уравнения нейтрального равновесия (2.1) и граничные условия (2.2) в цилиндрических координатах примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{rr}}{\partial r} + \frac{\theta_{rr} - \theta_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \theta_{\varphi r}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \theta_{zr}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \theta_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\theta_{r\varphi} + \theta_{\varphi r}}{r} + \frac{\partial \theta_{\varphi\varphi}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \theta_{z\varphi}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{rz}}{\partial r} + \frac{\theta_{rz}}{r} + \frac{\partial \theta_{\varphi z}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \theta_{zz}}{\partial z} &= 0 \\ \theta_{rr} = \theta_{r\varphi} = \theta_{rz} &= 0 \text{ при } r=r_0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнение несжимаемости запишется так:

$$\partial u / \partial r + u / r + \partial v / r \partial \varphi + \partial w / \partial z = 0 \quad (2.7)$$

Используя (1.3), (2.3), (2.4), получим представление компонент тензора Θ через составляющие вектора перемещений

$$\begin{aligned} \theta_{rr} &= [\lambda^{-1} \kappa_1(r) + 3\lambda \kappa_2(r) + p(r)] \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda^{-1} \kappa_1^* + q - \lambda \kappa_2^* \\ \theta_{r\varphi} &= f_3(r) \left(\frac{\partial u}{r \partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) + [\lambda^{-1} \kappa_1(r) + \lambda \kappa_2(r)] \frac{\partial v}{\partial r} - \\ &\quad - \psi r \kappa_2(r) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ \theta_{rz} &= -\psi \kappa_2(r) \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + f_1(r) \frac{\partial u}{\partial z} - \psi r \kappa_2(r) \frac{\partial v}{\partial r} + \\ &\quad + \lambda^{-1} [\kappa_1(r) + f(r) \kappa_2(r)] \frac{\partial w}{\partial r} \\ \theta_{\varphi r} &= [f(r) \kappa_1(r) + \lambda \kappa_2(r)] \left(\frac{\partial u}{r \partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) + \\ &\quad + \lambda \psi r \kappa_1(r) \frac{\partial u}{\partial z} + f_3(r) \frac{\partial v}{\partial r} - \psi r \kappa_2(r) \frac{\partial w}{\partial r} \\ \theta_{\varphi\varphi} &= [f(r) \kappa_1(r) + 3\lambda \kappa_2(r) + p(r)] \left(\frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) + \\ &\quad + \psi r f_2(r) \frac{\partial v}{\partial z} - 2\psi \kappa_2(r) \frac{\partial w}{\partial \varphi} + f(r) \kappa_1^* - \lambda \kappa_2^* + q \\ \theta_{\varphi z} &= -2\psi \kappa_2(r) \left(u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + f_1(r) \frac{\partial v}{\partial z} + \lambda^{-1} f(r) \times \\ &\quad \times f_4(r) \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \psi r f_2(r) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \psi r \kappa_1^* + \psi r \kappa_2^* \\ \theta_{zr} &= \lambda f_4(r) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \psi \kappa_1(r) \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) - \psi r \kappa_2(r) \frac{\partial v}{\partial r} + f_1(r) \frac{\partial w}{\partial r} \\ \theta_{z\varphi} &= \lambda f_4(r) \frac{\partial v}{\partial z} - 2\psi r \kappa_2(r) \frac{\partial w}{\partial z} + \psi f_2(r) \left(u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
 & + f_1(r) \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \lambda \psi r \kappa_1 + \psi r \kappa_2 \\
 \theta_{zz} = & -2\psi r \kappa_2(r) \frac{\partial v}{\partial z} + \psi f_2(r) \frac{\partial w}{\partial \varphi} + [\lambda^2 \kappa_1(r) + \\
 & + 3\lambda^{-1} f(r) \kappa_2(r) + p(r)] \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda^2 \kappa_1 - \lambda^{-1} f(r) \kappa_2 + q \\
 f_1(r) = & \lambda \kappa_2(r) + \lambda^{-1} f(r) \kappa_2(r) + p(r), \quad f_2(r) = \lambda \kappa_1(r) - \kappa_2(r) \\
 f_3(r) = & 2\lambda \kappa_2(r) + p(r), \quad f_4(r) = \lambda \kappa_1(r) + \kappa_2(r) \\
 \frac{1}{2} \kappa_1 = & [\lambda^{-1} \kappa_{11}(r) + \lambda \kappa_{12}(r)] \frac{\partial u}{\partial r} + [f(r) \kappa_{11}(r) + \\
 & + \lambda \kappa_{12}(r)] \left(\frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) + \psi r [\lambda \kappa_{11}(r) - \kappa_{12}(r)] \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right) + \\
 & + [\lambda^2 \kappa_{11}(r) + \lambda^{-1} f(r) \kappa_{12}(r)] \frac{\partial w}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Выражение для κ_2 получается из (2.9) заменой κ_{11} на κ_{12} , κ_{12} на κ_{22} . Подставив выражения (2.8) в (2.5), получим систему четырех уравнений (2.5), (2.7) для четырех функций u, v, w, q .

Эта система уравнений допускает решения вида

$$u = U(r) \cos(n\varphi + \alpha z), \quad v = V(r) \sin(n\varphi + \alpha z) \tag{2.10}$$

$$w = W(r) \sin(n\varphi + \alpha z), \quad q = Q(r) \cos(n\varphi + \alpha z)$$

Здесь $n=0, 1, 2, 3, \dots$, α — действительное число. В самом деле, из выражений (2.8), (2.9) видим, что при условиях (2.10) компоненты $\theta_{rr}, \theta_{\varphi\varphi}, \theta_{\varphi z}, \theta_{z\varphi}, \theta_{zz}$ будут произведениями функций от координаты r на $\cos(n\varphi + \alpha z)$, а остальные компоненты тензора Θ будут пропорциональны $\sin(n\varphi + \alpha z)$. Поэтому в уравнениях (2.5), (2.7) и граничных условиях (2.6) переменные φ, z отделяются и возникает краевая задача для системы четырех обыкновенных уравнений с неизвестными U, V, W, Q .

Наибольший интерес представляет случай $n=1$, соответствующий стержневой форме выпучивания цилиндра. Положим $\alpha = \pi m/l$ ($m=1, 2, 3, \dots$), где l — длина деформированного цилиндра, и введем векторный базис декартовых координат x, y в сечении цилиндра $\mathbf{i}_1 = \cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{i}_2 = \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi$.

Из (2.10) при $n=1, z=0$ получим

$$\begin{aligned}
 u_1 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{i}_1 &= U(r) - [U(r) + V(r)] \sin^2 \varphi \\
 u_2 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{i}_2 &= [U(r) + V(r)] \cos \varphi \sin \varphi \\
 w &= W(r) \sin \varphi
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

При $z=l$ значения u_1, u_2, w отличаются от (2.11) множителем $(-1)^m$.

Из (2.11) следует, что в концевых сечениях цилиндра перемещение w равно нулю на оси x , перемещение u_2 обращается в нуль на осях x, y , перемещение u_1 отлично от нуля на любом диаметре сечения.

Главный вектор \mathbf{H} и главный момент \mathbf{D} сил, действующих в некотором сечении Σ деформированного тела, определяется формулами

$$\mathbf{H} = \iint_{\Sigma} \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} d\Sigma, \quad \mathbf{D} = - \iint_{\Sigma} \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} \times \mathbf{R} d\Sigma \tag{2.12}$$

Здесь \mathbf{N} — вектор единичной нормали к поверхности Σ . Вычислим линейные приращения этих величин при сообщении точкам тела добавочных перемещений $\eta\mathbf{w}$. Используя формулу преобразования элементарной ориентированной площадки при деформации [4], из (2.12) получим

$$\mathbf{H}^* = \left[\frac{d}{d\eta} \mathbf{H}(\mathbf{R} + \eta\mathbf{w}) \right]_{\eta=0} = \iint_{\Sigma} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\Theta} d\Sigma$$

$$\mathbf{D}^* = - \iint_{\Sigma} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\Theta} \times \mathbf{R} d\Sigma - \iint_{\Sigma} \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} \times \mathbf{w} d\Sigma \quad (2.13)$$

Применим формулы (2.13) к рассматриваемому здесь случаю скрученного и растянутого цилиндра, взяв в качестве Σ произвольное поперечное сечение и выбрав за полюс центр этого сечения. Тогда будем иметь

$$\mathbf{H}^* = \int_0^{r_0} r dr \int_0^{2\pi} [(\theta_{zr} \cos \varphi - \theta_{z\varphi} \sin \varphi) \mathbf{i}_1 + (\theta_{zr} \sin \varphi + \theta_{z\varphi} \cos \varphi) \mathbf{i}_2 + \theta_{zz} \mathbf{k}] d\varphi$$

$$(2.14)$$

$$\mathbf{D}^* = \int_0^{r_0} r dr \int_0^{2\pi} [(\theta_{zz} r \sin \varphi - \tau_{z\varphi} w \cos \varphi + \sigma_z v \cos \varphi + \sigma_z u \sin \varphi) \mathbf{i}_1 +$$

$$+ (-\theta_{zz} r \cos \varphi - \tau_{z\varphi} w \sin \varphi + \sigma_z v \sin \varphi - \sigma_z u \cos \varphi) \mathbf{i}_2 + (\theta_{z\varphi} r + \tau_{z\varphi} u) \mathbf{k}] d\varphi$$

При помощи (1.5), (2.8), (2.14) нетрудно проверить, что для решений вида (2.10) при $n=1$ и $z=0$, l верны равенства

$$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{H}^* = \mathbf{k} \cdot \mathbf{H}^* = \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{D}^* = \mathbf{k} \cdot \mathbf{D}^* = 0 \quad (2.15)$$

Остальные составляющие векторов \mathbf{H}^* и \mathbf{D}^* в концевых сечениях цилиндра отличны от нуля.

Соотношения (2.11), (2.15) показывают, что решения (2.10) при $n=1$ соответствуют следующим условиям закрепления торцов цилиндра: шарнирному опиранию для перемещений в направлении оси y и скользящей заделке для перемещений вдоль оси x .

3. Неогуковский материал. В этом случае имеем $\kappa_1(I_1, I_2) = \mu = \text{const}$ (модуль сдвига), $\kappa_2(I_1, I_2) = 0$. Из (1.5) получаем

$$p(r) = \lambda^{-1} - \frac{1}{2} \psi^2 (r^2 - r_0^2), \quad M = \frac{1}{2} \mu \pi \rho_0^4 \lambda^{-1} \psi, \quad P = -\mu \pi \rho_0^2 \lambda^{-2} (1 - \lambda^3 + \frac{1}{4} \rho_0^2 \psi^2)$$

$$(3.1)$$

Здесь $\rho_0 = \lambda^{1/2} r_0$ — радиус цилиндра в недеформированном состоянии. При отсутствии осевой силы имеем [4]:

$$\lambda = \sqrt[3]{1 + \frac{1}{4} \rho_0^2 \psi^2}, \quad M = \frac{1}{2} \mu \pi \rho_0^4 (1 + \frac{1}{4} \rho_0^2 \psi^2)^{-1/3} \quad (3.2)$$

Сделаем замену переменной $r = r_0 R$, тогда система уравнений для функций $U(r)$, $V(r)$, $W(r)$, $Q(r)$ в случае неогуковского материала запишется так:

$$\lambda^{-1} U'' + (\lambda^{-1} R^{-1} - \gamma^2 R) U' + (\lambda^{-1} R^{-2} + n^2 \lambda^{-1} R^{-2} + \gamma^2 + \delta^2) U - 2(n \lambda^{-1} R^{-2} + \gamma \delta) V + r_0 Q' = 0$$

$$\lambda^{-1} V'' + \lambda^{-1} R^{-1} V' - (\lambda^{-1} R^{-2} + n \lambda^{-1} R^{-2} + \delta^2) V - (2n \lambda^{-1} R^{-2} + \gamma^2 n + 2\gamma \lambda \nu) U + n R^{-1} r_0 Q = 0$$

$$\lambda^{-1} W'' + \lambda^{-1} R^{-1} W' - (n^2 \lambda^{-1} R^{-2} + \delta^2) W + \gamma^2 R \nu U - \nu r_0 Q = 0 \quad (3.3)$$

$$U' + R^{-1}U + nR^{-1}V + \nu W = 0$$

$$\gamma = r_0\psi, \nu = r_0m\pi/l, \delta = n\gamma + \lambda\nu$$

Граничные условия на боковой поверхности $R=1$ примут вид (штрих означает производную по R):

$$2\lambda^{-1}U' + r_0Q = 0, V' - nU - V = 0, W' - \nu U = 0 \quad (3.4)$$

Исключив неизвестные функции W и Q , систему уравнений (3.3) можно привести к системе шести уравнений первого порядка, которая записывается в матричной форме

$$X' + A(R)X = 0, X = \{U, U', U'', V, V', V''\} \quad (3.5)$$

где X — вектор-столбец неизвестных функций, $A(R)$ — матрица коэффициентов системы.

Наряду с граничными условиями (3.4) для решения системы (3.5) необходимо поставить еще три граничных условия. Их можно получить из требования ограниченности функций U, V, W, Q и их производных при $R=0$. Из (3.3) видно, что необходимыми условиями ограниченности решения будут

$$U(0) + V(0) = 0, U'(0) = 0, V'(0) = 0 \quad (3.6)$$

Систему (3.5) запишем в конечно-разностной форме: $X_{i+1} = (E - A_i h)X_i$, $A_i = A(R_i)$, $R_i = ih$, $Nh = 1$ ($i = 0, 1, \dots, N$), где h — шаг разностной схемы, E — единичная матрица. Тогда последовательно находим

$$X_1 = B_0 X_0, X_2 = B_1 X_1 = B_1 B_0 X_0 \quad (3.7)$$

$$X_N = B_{N-1} X_{N-1} = B_{N-1} \dots B_1 B_0 X_0, B_i = E - A_i h$$

Выберем в качестве неизвестных в системе алгебраических уравнений, определяемой последним равенством (3.7), следующие значения $U(1)$, $U'(1)$, $V(1)$, $V(0)$, $U''(0)$, $V''(0)$. Остальные значения ($U(0)$, $U'(0)$, $U''(1)$, $V'(0)$, $V'(1)$, $V''(1)$) выражаются через них с использованием крайних условий (3.4), (3.6). Система алгебраических уравнений относительно искомых неизвестных является однородной. Условие обращения в нуль определителя этой системы дает соотношение между параметрами λ, γ , которое должно удовлетворяться, чтобы имело место выпучивание.

При помощи формул (3.1) это соотношение можно преобразовать в соотношение между параметрами нагружения P и M .

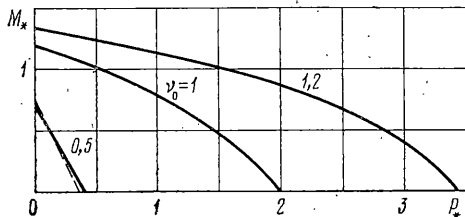
Эффективность описанного алгоритма проверялась на задаче об устойчивости сжатого цилиндра при отсутствии кручения. Известно точное решение этой задачи [3]. Погрешность в определении критических значений параметра P численным методом при $N=200$ не превышает 1% для цилиндров с любым отношением радиуса к длине.

Уравнения элементарной теории устойчивости скрученных и сжатых стержней имеют вид [4]:

$$EJu_1'' = Pu_1 + Mu_2',$$

$$EJu_2'' = Pu_2 - Mu_1' \quad (3.8)$$

где u_1, u_2 — перемещения нейтральной линии стержня, E — модуль



Фиг. 1

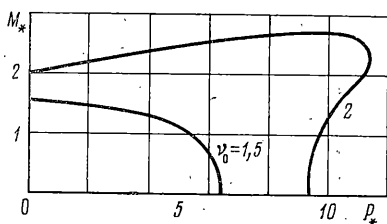
Юнга, J — момент инерции сечения. Граничные условия на концах стержня, указанные в п. 2, записываются в этой теории следующим образом:

$$u_1'(0) = u_1'''(0) = u_1'(l) = u_1'''(l) = 0, \quad u_2(0) = u_2''(0) = u_2(l) = u_2''(l) = 0 \quad (3.9)$$

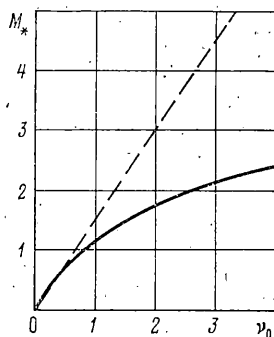
Уравнениям (3.8) и условиям (3.9) удовлетворяют функции $u_1 = A \cos \pi z/l$, $u_2 = B \sin \pi z/l$, $A, B = \text{const}$. Нетривиальное решение существует при условии $M = \pm l(P + EJ\pi^2/l^2)/\pi$.

Так как явление выпучивания не зависит от знака крутящего момента, достаточно исследовать случай $M \geq 0$.

Критическое соотношение между параметрами нагружения для различных значений параметра $\nu_0 = \pi l r_0 / l_0$, где l_0 — длина недеформированного



Фиг. 2



Фиг. 3

цилиндра, представлено на фиг. 1, 2. По оси абсцисс отложены значения безразмерной сжимающей силы $P_* = 2P/(\pi \mu r_0^2)$, по оси ординат — значения безразмерного крутящего момента $M_* = 2M/(\pi \mu r_0^3)$. Штриховая прямая соответствует элементарной теории. Для толстых цилиндров, т. е. при больших значениях ν_0 , область устойчивости перестает быть выпуклой.

Зависимость критического значения безразмерного крутящего момента от относительной толщины цилиндра ν_0 в случае чистого кручения ($P=0$) показана на фиг. 3. Штриховая прямая соответствует элементарной теории. Для тонкого цилиндра ($\nu_0=0,1$) исследовалось также выпучивание при кручении и растяжении ($P>0$). Результаты мало отличаются от элементарной теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965, 455 с.
3. Бидерман В. Л. Устойчивость стержня из неогукковского материала. — Инж. ж. МГТ, 1968, № 3, с. 54.
4. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
27.II.1979