МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1981

УДК 539.3

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА УПРУГОЙ ЭНЕРГИИ И НОВЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ В ОДНОСТОРОННИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ШТАМПОВ И ТРЕЩИН

КЕРЧМАН В. И.

Установлено экстремальное свойство решений смешанных задач с односторонними ограничениями о вдавливании штампа в упругое тело и образовании бескогезионных трещин нормального разрыва – упругая энергия как функционал от неизвестной линии раздела граничных условий максимальна среди площадок контакта, для которых выполняется условие неотрицательности контактных напряжений и среди разрезов, удовлетворяющих условию неперехлестывания берегов. С его помощью показано, что задача определения площадки контакта штампа с телом (контура щели) эквивалентна отысканию максимума силы, вдавливающей штамп (объема образующейся полости), и даны приложения этих принципов.

1. Пространственная контактная задача о поступательном вдавливании без трения жесткого штампа в тело Ω сводится для каждого внедрения штампа δ к решению уравнений равновесия деформируемого тела при условиях в виде альтернативных равенств и неравенств на грани S, в которую вдавливается штамп

$$\begin{aligned} &w(\mathbf{r},\delta)=\delta-f(\mathbf{r}), \quad p(\mathbf{r},\delta)\geqslant N(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r}\in G_\delta) \\ &w(\mathbf{r},\delta)>\delta-f(\mathbf{r}), \quad p(\mathbf{r})=N(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r}\in S\setminus G_\delta) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{r}$ — точка поверхности S, $f(\mathbf{r})$ — расстояние от этой точки до поверхности штампа в направлении вдавливания z при нулевом внедрении, $w(\mathbf{r})$ — перемещение поверхности тела в том же направлении, $p(\mathbf{r})=-\sigma_n|_S$, $N(\mathbf{r})$ — заданное нормальное давление на поверхность тела.

Область контакта штампа с упругим телом G_δ заранее неизвестна. Граничные условия на остальных гранях (и на бесконечности) предполагаются не зависящими от δ. Если $K(\mathbf{r};\mathbf{r}')$ — вертикальное перемещение точки $\mathbf{r}$ от единичной сосредоточенной силы, приложенной нормально в точке $\mathbf{r}'$, то перемещения и напряжения на поверхности S связаны соотношением

$$w(\mathbf{r})=\Lambda p(\mathbf{r}), \quad \Lambda p(\mathbf{r})=\int_S K(\mathbf{r};\mathbf{r}')p(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \tag{1.2}$$

Без ограничения общности можно принять $N(\mathbf{r})=0$ (для этого достаточно рассмотреть штамп, форма поверхности которого задается функцией $f(\mathbf{r})+w_0(\mathbf{r})$, где $w_0(\mathbf{r})$ — перемещения поверхности от нагрузки $N(\mathbf{r})$). Задачи нормального контакта с ограничениями типа (1.1) рассмотрены в [1—4]. Показано, что решение этой обобщенной задачи Герца эквивалентно минимизации функционала дополнительной работы

$$\begin{aligned} \Psi[p(\mathbf{r})]=W[p]-A[p]=\frac{1}{2}\int_S p(\mathbf{r})\Lambda p(\mathbf{r})\cos(n,z)\,ds- \\ -\int_S [\delta-f(\mathbf{r})]p(\mathbf{r})\cos(n,z)\,ds \end{aligned} \tag{1.3}$$

на выпуклом множестве H' неотрицательных на S функций $p(\mathbf{r})$. Здесь W — энергия упругой деформации тела, выраженная через искомые контактные напряжения $p(\mathbf{r})$, A — работа этих напряжений на конечных перемещениях.

К рассматриваемой контактной задаче близка по постановке задача о трещине при выполнении условия конечности напряжений на неизвестном заранее ее контуре (с учетом возможного налегания берегов). Для внутренних трещин в плоскости симметрии упругого тела, сопротивлением разрыву которого по этой плоскости можно пренебречь (при отсутствии сил сцепления), удобна модель С. А. Христиановича [5—7].

Пусть два упругих полупространства прижаты друг к другу равномерно распределенными на бесконечности силами интенсивности σ, действующими перпендикулярно общей границе $S: z=0$. Одинаковые и противоположно направленные нормальные нагрузки $q(\mathbf{r})$ разрывают контакт между этими полупространствами (к такой поверхностной нагрузке приводятся и объемные силы, действующие в теле). Возникающая щель G_σ такова, что для каждого из полупространств получаем смешанную задачу с альтернативными граничными условиями

$$\begin{aligned} -\sigma_{zz}|_{z=0}&=q(\mathbf{r}), \qquad w(\mathbf{r})>0 \qquad (\mathbf{r}\in G_\sigma)\\ -\sigma_{zz}|_{z=0}&\geqslant q(\mathbf{r}), \qquad w(\mathbf{r})=0 \qquad (\mathbf{r}\in S\diagdown G_\sigma)\end{aligned} \tag{1.4}$$

Приводя условия на бесконечности к нулевым, получаем задачу [1]

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r},\sigma)&=q(\mathbf{r})-\sigma, \qquad w(\mathbf{r},\sigma)>0, \qquad (\mathbf{r}\in G_\sigma)\\ p(\mathbf{r},\sigma)&\geqslant q(\mathbf{r})-\sigma, \qquad w(\mathbf{r},\sigma)=0 \qquad (\mathbf{r}\in S\diagdown G_\sigma)\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\Lambda_{G_\sigma}{}^{-1}w(r,\sigma)=p(\mathbf{r},\sigma) \tag{1.6}$$

где $\Lambda_G{}^{-1}$ — псевдодифференциальный оператор, выражающий нормальные давления на составляющие тело полупространства через перемещения берегов трещины (разреза) формы G в плане (см. [9]).

Методами теории вариационных неравенств [1—3] эта односторонняя задача идеального контакта сводится к минимизации потенциальной энергии тела (отсчитываемой от энергии сжатого тела без щели)

$$\Phi[w(\mathbf{r})]=W-A=\int\limits_\Sigma w(\mathbf{r})\Lambda_\Sigma^{-1}w(\mathbf{r})\,ds-2\int\limits_\Sigma [q(\mathbf{r})-\sigma]w(\mathbf{r})\,ds \tag{1.7}$$

на множестве неотрицательных в ограниченной области $\Sigma\supset G_\sigma$ перемещений $w(\mathbf{r})$. Здесь W и A — энергия упругой деформации и работа заданных сил, выраженные через искомые перемещения $w(\mathbf{r})$. Если нагрузка $Q(\mathbf{r})\in\in H^{\pm 1/2}(\Sigma)$, то соответственно решение $w(\mathbf{r})\in H^{\circ\, 1\pm 1/2}(\Sigma)$, где $H^l(\Sigma)$ — пространство Соболева — Слободецкого [3]. К такой постановке приводится и общая задача Синьорини [1] о полупространстве, прижатом к плоскости с выступами и выемками.

Как и в [10, 11], будем рассматривать свойства задачи по отношению к неизвестной линии раздела граничных условий, предполагая выполненными уравнения равновесия. Поскольку для линейно-упругого тела по формуле Клапейрона в выражениях (1.3) и (1.7) $A=2W$, то из вариационной формулировки рассматриваемых задач вытекает

Теорема 1. Решение смешанных задач теории упругости с односторонними условиями (1.1) или (1.5) эквивалентно отысканию максимума энер-

[1] См. также [8], где рассматривается родственная задача.

гии упругой деформации $W[G]$ при ограничениях $\Lambda p(\mathbf{r})=\delta-f(\mathbf{r})$ в G, $p(\mathbf{r})\geqslant 0$ и $\Lambda_G^{-1}w(\mathbf{r})=q(r)-\sigma$, $w(\mathbf{r})\geqslant 0$ соответственно, т. е. упругая энергия как функционал от допустимой линии раздела граничных условий $\Gamma=\partial G$ (границы площадки контакта, контура разреза) достигает экстремума (условного) на истинном контуре.

Отметим, что стационарность упругой энергии W относительно вариаций неизвестной границы контакта, на которой выполняется условие конечности напряжений, была установлена в [10].

2. Приведем способы элементарного вывода новых вариационных принципов из теоремы 1, основанные на естественной параметризации рассматриваемых односторонних задач.

Теорема 2. Определение площадки контакта G_δ при данном внедрении штампа δ эквивалентно отысканию максимума вдавливающей силы

$$P[\delta;\Gamma]=\int\limits_G p(\mathbf{r},G)\cos(\mathbf{n},\delta)\,ds \tag{2.1}$$

как функционала от границы области контакта Γ.

Доказательство. Пусть $\{G_\alpha\}$ — семейство областей контакта, получающихся в процессе «погружения» штампа, Γ_α — их границы, а $p(\mathbf{r},G_\alpha)$ — соответствующие контактные напряжения. Для какой-либо допустимой «траектории погружения» $\{\Gamma_\alpha'\}$, подсчитывая накапливаемую упругим телом энергию как сумму работ действующих сил на приращениях перемещений (одинаковых для всех точек площадки контакта)

$$\Delta W[\alpha;\Gamma_\alpha']=\int\limits_{G_\alpha}[p(\mathbf{r},G_\alpha')\cos(\mathbf{n},\delta)\Delta\alpha]\,ds$$

получим для энергии выражение

$$W[\delta;\Gamma_\delta']=\int\limits_0^\delta P[\alpha;\Gamma_\alpha']\,d\alpha \tag{2.2}$$

где $P[\alpha;\Gamma_\alpha']$ — сила (2.1), действующая на штамп. Из (2.2) с учетом взаимной независимости Γ_α' следует, что отыскание максимума W эквивалентно требованию максимальности $P[\alpha;\Gamma']$ как функционала от Γ' для каждого внедрения α.

Теорема 2 другим методом установлена в [11], где даны также некоторые ее приложения [2]. Приведенное доказательство сохраняет силу и для задач контакта штампа с тонкостенными телами (пластинами, оболочками), если в рамках технической теории учитывается нормальное сжатие тела в зоне контакта относительно срединной поверхности, как это сделано, например, в [13]. Для однородных в горизонтальных плоскостях полупространства и слоя теоремы 1, 2 верны и в задаче о стационарном поступательном движении вдавливаемого штампа. Для этой задачи в системе координат, связанной со штампом, перемещения также выражаются через напряжения соотношением типа (1.2) [14], но ядро $K(\mathbf{r};\mathbf{r}')$ зависит уже не только от $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. Соответствующее обобщение теоремы [10] дано в [15].

При доказательстве теорем 1, 2 предполагалось, что контактные напряжения $p(\mathbf{r},G_\delta^1)$ неотрицательны, что накладывает соответствующие огра-

[2] *Керчман В. И.* Численное решение смешанных задач пространственной теории упругости.– В кн.: Смешанные задачи механики деформируемого тела: Тез. докл. Всес. научн. конф. Ч. 1. Ростов-на-Дону, 1977, с. 27–28.

Как стало известно автору после опубликования [11], необходимость условия теоремы 2 для частного случая однородного полупространства была доказана Барбером [12].

ничения на допустимые «пробные» контуры Γ'. Это замечание носит принципиальный характер применительно к теореме 1 (см. также п. 5), для утверждения же теоремы 2 в большинстве практически важных случаев указанные ограничения несущественны, так что функционал $P[\delta;\ \Gamma]$ достигает на истинной площадке контакта абсолютного максимума.

Рассмотрим действительную площадку контакта $G_\delta{}^\circ$, которой соответствует вдавливающая сила P°, и какую-либо возможную область контакта G'. Возьмем также два вспомогательных штампа: штамп 1, который контактирует с упругим телом по области $G^1=G_\delta{}^\circ \cup G'$ и имеет форму поверхности: $w=\delta-f(\mathbf{r})$ в $G_\delta{}^\circ$ и $w=w^\circ(\mathbf{r},\ \delta)$ в $G' \backslash G_\delta{}^\circ$ (где $w^\circ(\mathbf{r},\ \delta)$ — форма поверхности деформированного тела при действии штампа $G_\delta{}^\circ$), а также штамп 2, контактирующий с S по области $G^2=G'$, форма поверхности которого в G^2 совпадает с поверхностью штампа 1. При этом контактные напряжения $p(\mathbf{r},\ G^1)=p(\mathbf{r};\ G_\delta{}^\circ)$, так что равны и результирующие силы: $P_1=P^\circ$. Для упрощения выкладок будем считать S частью плоскости $z=0$. Имеет место важная формула, выражающая силу (2.1) через решение $p_1(\mathbf{r};\ \Gamma)$, $w_1(\mathbf{r};\ \Gamma)$ для «единичного» (плоского в данном случае) штампа, имеющего ту же форму G в плане [16]

$$P=\int_G p_1(\mathbf{r};\ \Gamma)\,w(\mathbf{r},\ \delta)\,ds-\int_{S\backslash G} L(\mathbf{r})\,w_1(\mathbf{r};\ \Gamma)\,ds \tag{2.3}$$

где $L(\mathbf{r})$ — нормальная нагрузка, приложенная к S вне штампа G.

Для сравнения сил, действующих на штампы 1 и 2, представим силу P_1 в виде

$$P_1=\int_{G^2} p(\mathbf{r},\ G^1)\,ds+\int_{G^1\backslash G^2} p(\mathbf{r},\ G^1)\,ds$$

Первый член можно вычислить применяя формулу (2.3) к штампу G^2, вне которого по области $G^1\backslash G^2=G_\delta{}^\circ\backslash G'$ приложена нагрузка $p(\mathbf{r},\ G^1)$:

$$\int_{G^2} p(\mathbf{r},\ G^1)\,ds=\int_{G'} p_1(\mathbf{r};\ \Gamma')\,w^\circ(\mathbf{r},\ \delta)\,ds-\int_{G_\delta{}^\circ\backslash G'} w_1(\mathbf{r};\ \Gamma')\,p(\mathbf{r},\ G^1)\,ds \tag{2.4}$$

Поскольку первый член в правой части (2.4) представляет выражение для силы P_2, получим

$$P_1=P_2+\int_{G_\delta{}^\circ\backslash G'} [1-w_1(\mathbf{r};\ \Gamma')]\,p(\mathbf{r},\ G_\delta{}^\circ)\,ds \tag{2.5}$$

Сила P' вычисляется по той же формуле (2.3), где $w(\mathbf{r},\ \delta)=\delta-f(\mathbf{r})$, поэтому

$$P_2-P'=\int_{G'\backslash G_\delta{}^\circ} p_1(\mathbf{r};\ \Gamma')\,\{w^\circ(\mathbf{r},\ \delta)-[\delta-f(\mathbf{r})]\}\,ds$$

Подставляя последнее выражение в (2.5), для разности сил, действующих на штампы с одинаковым профилем поверхности $w=\delta-f(\mathbf{r})$, но разной формы в плане $G_\delta{}^\circ$ и G', окончательно получим

$$P^\circ-P'=\int_{G_\delta{}^\circ\backslash G'} p^\circ(\mathbf{r},\ \delta)\,[1-w_1(\mathbf{r};\ \Gamma')]\,ds+\int_{G'\backslash G_\delta{}^\circ} p_1(\mathbf{r};\ \Gamma')\,\{w^\circ(\mathbf{r},\ \delta)-[\delta-f(\mathbf{r})]\}\,ds \tag{2.6}$$

Далее ограничимся классом задач, в которых напряжения $p_1(\mathbf{r};\ \Gamma')$ под единичными штампами неотрицательны для любой подобласти $G'\subset S$.

При этом условии площадка контакта $G_\delta{}^\circ$ и контактные напряжения монотонно увеличиваются [17] (в частности, оно выполняется для полупространства с неубывающими по глубине модулями упругости). Поскольку для действительной площадки контакта $p^\circ(\mathbf{r}, \delta) \geqslant 0$, $w^\circ(\mathbf{r}, \delta) \geqslant \delta - f(\mathbf{r})$, а вне единичного штампа $w_1(\mathbf{r}; \Gamma') < 1$, то правая часть соотношения (2.6) неотрицательна и $P^\circ \geqslant P'$. Отметим, что поскольку при выводе (2.6) не использовались соотношения типа неравенств, из этой формулы вытекает и достаточность условия теоремы 2. Действительно, если область G° такова, что $P^\circ \geqslant P'$ для всякой области $G' \subset S$, то должны выполняться условия типа неравенств в (1.1), иначе можно выбрать такую подобласть $G^* \subset G^1$, что $P^* > P^\circ$.

3. Подобным же образом из рассмотрения процесса развития трещины G_σ при изменении сжимающих напряжений σ выводится

Теорема 3. Из всех возможных контуров Γ трещины Христиановича при данном сжимающем давлении σ истинной форме щели в плане G_σ отвечает максимальный объем образующейся полости

$$V[\sigma; \Gamma] = 2\int\limits_G w(\mathbf{r}, G)\,ds \qquad (3.1)$$

Доказательство. Пусть $\{\Gamma_\tau\}$ — семейство расширяющихся контуров трещин, соответствующих разным значениям уменьшающегося сжимающего давления τ. Подсчитывая изменение энергии тела при распространении трещины G_τ в процессе уменьшения стягивающих ее берега усилий τ (для модифицированной постановки задачи (1.5), (1.6)) как сумму работ приращений напряжений $\Delta\tau$, одинаковых во всех точках разреза, на перемещениях $w(\mathbf{r}, G_\tau)$, получим выражение

$$W[\sigma; \Gamma_\sigma] = \int\limits_\sigma^\infty V[\tau, \Gamma_\tau]\,d\tau \qquad (3.2)$$

где V — объем трещины (3.1), максимальность которого в точках действительной «траектории распространения» трещины в пространстве возможных контуров $\{\Gamma\}$ теперь следует из теоремы 1.

Отметим, что решение $w(\mathbf{r}, \sigma)$ задачи (1.5), (1.6) можно выразить через «единичные» решения для трещин G_τ уже известной формы в плане, подобно тому, как решение задачи о вдавливании штампа выражается через решения для «единичных» штампов [17]. Именно

$$w(r, \sigma) = \int\limits_\sigma^\infty v_1(\mathbf{r}; \Gamma_\tau)\,d\tau \qquad (3.3)$$

где $v_1(\mathbf{r}; \Gamma)$ — решение уравнения

$$\Lambda_G{}^{-1} v_1(\mathbf{r}; \Gamma) = 1 \quad (\mathbf{r} \in G) \qquad (3.4)$$

В справедливости этого представления легко убедиться дифференцируя (1.5) и (3.3) по σ. Пусть $t_1(\mathbf{r}; \Gamma) = -\sigma_{zz}{}^1|_{z=0}$ — распределение давлений на составляющие полупространства в единичном решении для пространства с разрезом G ($t_1(\mathbf{r}; \Gamma) = 1$ в G, $t_1(\mathbf{r}; \Gamma) < 0$ вне G). Получим удобную формулу для объема (3.1) в общем случае, когда на плоскости $z=0$ вне области трещины G заданы ненулевые перемещения $w = \pm U(\mathbf{r})$ (например, при сжатии полупространств, вдоль общей границы которых имеются симметричные жесткие включения, так называемая задача о расклинивании), т. е. при условиях

$$\sigma_{zz}|_{z=0}=-Q(\mathbf{r}),\quad w=\pm U(\mathbf{r}) \tag{3.5}$$

Применяя теорему взаимности к напряженно-деформированным состояниям, отвечающим решению задачи (3.5) и «единичному» решению для разреза G, получим для объема трещины формулу, аналогичную (2.3)

$$V[\Gamma]=2\int\limits_G Q(\mathbf{r})v_1(\mathbf{r};\Gamma)\,ds-2\int\limits_{S\setminus G} t_1(\mathbf{r};\Gamma)U(\mathbf{r})\,ds \tag{3.6}$$

Используя (3.6), для разности объемов трещин, ограниченных контурами $\Gamma^\circ=\partial G^\circ$ и $\Gamma'=\partial G'$, при действии одного и того же поля нагрузок $Q(\mathbf{r})=q(\mathbf{r})-\sigma$ получим выражение, являющееся аналогом формулы (2.6)

$$\begin{gathered}V[\Gamma^\circ]-V[\Gamma']=2\int\limits_{G^\circ\setminus G'} w^\circ(\mathbf{r},\sigma)\,[1-t_1(\mathbf{r};\Gamma')]\,ds+\\ +2\int\limits_{G'\setminus G^\circ}\{p^\circ(\mathbf{r},\sigma)-[q(\mathbf{r})-\sigma]\}v_1(\mathbf{r};\Gamma')\,ds\end{gathered} \tag{3.7}$$

Здесь $w^\circ(\mathbf{r},\sigma)$, $p^\circ(\mathbf{r},\sigma)$ — решение задачи для разреза G° при действии нагрузки $q(\mathbf{r})-\sigma$. Если для всякого единичного решения $v_1(\mathbf{r};\Gamma')\geqslant 0$, $t_1(\mathbf{r};\Gamma')<1$ (что выполняется, в частности, когда операторы Λ_G^{-1} положительные, например для однородного пространства), то из (3.7) вытекает эквивалентность выполнения односторонних ограничений (неравенств) в (1.5) и условия: $V^\circ\geqslant V'$ для любой подобласти $G'\subset\Sigma$, т. е. максимум в теореме 3 абсолютный. Отметим, что к формуле (3.2) можно прийти также непосредственной подстановкой (3.3) в выражение для упругой энергии.

В качестве простейшего примера приложения теоремы 3 рассмотрим круглую трещину $\rho\leqslant a$ в пространстве, сжимаемом давлением σ, которая раскрывается осесимметричной нагрузкой $q(\rho)$. Ее объем

$$V(a)=\frac{8}{D}\int\limits_0^a q(\rho)\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\rho-\frac{8}{3D}a^3\sigma,\quad D=\frac{E}{2(1-\nu^2)}$$

Из условия экстремума $\partial V/\partial a=0$ получаем уравнение для определения радиуса $a(\sigma)$ трещины

$$\int\limits_0^1\frac{q(ax)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sigma$$

в точности совпадающее с получаемым из условия обращения в нуль коэффициента интенсивности напряжений на контуре трещины.

4. Аналитические решения «единичных» задач для штампов и трещин имеются, к сожалению, лишь для областей простой формы. Широко развиваются, однако, численные методы, основанные на дискретизации задачи с помощью разбиения области контакта или разреза на ячейки, внутри которых для искомых величин (контактных напряжений, перемещений берегов) используется простейшая аппроксимация. В этом случае установленные экстремальные свойства позволяют свести задачу с односторонними ограничениями к некоторой задаче математического программирования и помогают построить подходящий алгоритм ее решения.

Покажем это на примере задачи о вдавливании штампа в полупространство. Пусть его поверхность разбита на ячейки (например, линиями координатной сетки с некоторыми шагами). Рассмотрим сеточную область S_δ, заведомо содержащую площадку контакта G_δ. Аппроксимируя контактные напряжения с помощью их узловых значений p_i и удовлетворяя уравнению (1.2) в точках коллокации (метод Крылова — Боголюбова, см. [18]) или интегрального (вариационно-разностный метод [3]), получим систему линейных уравнений

$$\sum_{(j)\in S_\delta} A_{ij}p_j=w_i \tag{4.1}$$

Дискретная постановка (1.1), (1.2) в S_δ с использованием утверждения теоремы 2 приводит задачу о вдавливании штампа к следующей конечномерной экстремальной проблеме: максимизировать

$$P=\sum_{(i)\in S_\delta} s_i p_i \tag{4.2}$$

где s_i — площадь i-й ячейки, при ограничениях

$$\left[\sum_{j=1}^{N} A_{ij}p_j-(\delta-f_i)\right]p_i=0 \quad (i)\in S_\delta \quad {\scriptstyle (i=1,\dots,N)} \tag{4.3}$$

Для решения поставленной задачи на графе — множестве, состоящем из конечного, но очень большого числа точек в пространстве $(p_1,\dots,p_N)$ (решений системы (4.3), соответствующих различным областям контакта $G\subset S_\delta$), эффективен следующий итерационный метод поиска приближенного решения. Пусть $\mathbf{w}^k=(w_1{}^k,\dots,w_N{}^k)$ — перемещения поверхности полупространства на сетке S_δ в k-й итерации. Из системы уравнений (4.1) находим напряжения $\mathbf{p}^k=A'\mathbf{w}^k$, где матрица $A'=\|A_{ij}\|^{-1}$. В точках (i), где контактное давление $p_i{}^k<-\varepsilon$, полагаем $w_i^{k+1}=w_i{}^k+\Delta$. Здесь Δ — такой шаг по w, что $[\max A_{ii}']\Delta<\varepsilon$, где ε — заданная погрешность. В остальных точках $w_i^{k+1}=w_i{}^k$.

Эта процедура представляет собой построение деформированной поверхности упругого тела в пределах S_δ (поверхности штампа 1, введенного при выводе формулы (2.6)), причем перемещения не уменьшаются и соответственно возрастает целевая функция P, поэтому итерации сходятся к точке, лежащей в ε-окрестности решения задачи (4.2), (4.3). Этот процесс был реализован с использованием метода коллокации [18] для решения контактной задачи, причем, поскольку в обратной матрице A' положительны лишь диагональные элементы и $A_{ii}'>\Sigma|A_{ij}'|$ $(j\neq i)$, итерации оказались устойчивыми при любом шаге.

Проблему обращения заполненной матрицы A высокой размерности N можно существенно упростить используя тот факт, что ядро контактной задачи $K(\mathbf{r};\ \mathbf{r}')$ и соответственно матрица $\|A_{ij}\|$ обычно инвариантны относительно некоторой группы преобразований. Так, для полупространства или слоистой среды $K=K(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ и, если в качестве объемлющей области взять прямоугольник П: $\{0\leqslant x_1\leqslant n_1h_1,\ 0\leqslant x_2\leqslant n_2h_2\}$ с нумерацией ячеек $h_1\times h_2$ двумя индексами $(i)=(i_1,\ i_2)=i_1+n_1i_2$, то матрица A имеет векторно-теплицеву структуру $A(i),\ (j)=C_{|i_1-j_1|;\,|i_2-j_2|}$ $(i_1,\ j_1=0,\ 1,\ \dots,\ n_1-1;\ i_2,\ j_2=0,\ 1,\ \dots,\ n_2-1)$, что позволяет эффективно обращать ее для очень больших $N=n_1n_2$ [18].

Приведем в качестве примера реализации указанного итерационного процесса некоторые результаты расчетов для задачи о вдавливании штампа в форме узкого параболического цилиндра: $f(x_1,\ x_2)=(x_1/\beta)^2$, $|x_2|\leqslant 1$. В качестве области S_δ при

$\beta=0{,}25$ и $\delta=2$ был взят прямоугольник $|x_1|\leqslant\beta$, $|x_2|\leqslant 1$ с сеткой разбиения 40×80 и прямоугольными ячейками ($h_1={}^1/_{80}$, $h_2={}^1/_{40}$). В начальном приближении $w_i^{\circ}=\delta-f_i$. Расчеты проводились с переменным шагом итерации: 15 итераций с шагом $\Delta=0{,}01$ ($\varepsilon=0{,}2$), 20 итераций с шагом $\Delta=0{,}002$ ($\varepsilon=0{,}04$) и 8 итераций с шагом 0,0005 ($\varepsilon=0{,}01$). Контактные напряжения под штампом $p(x_1, x_2)/2\pi D$, $D=E/2(1-\nu^2)$ и ординаты границы площадки контакта $x_1=\pm\beta l(x_2)$ (уточненные при помощи интерполяции) приведены в таблице. Вдавливающая сила $P|_{\delta=2}=3{,}9635D$.

x_1/β	$x_2=0$	0,4	0,6	0,7	0,8	0,85	0,9	0,95	0,975
0,90	0	0	0	0	0	0	0	0	0,26
0,85	0	0	0	0	0	0	0	0,29	0,71
0,80	0	0	0	0	0,02	0,16	0,28	0,59	0,857
0,75	0	0	0,09	0,165	0,265	0,362	0,483	0,852	1,188
0,70	0,150	0,215	0,304	0,370	0,467	0,530	0,612	0,995	1,371
0,60	0,502	0,530	0,570	0,598	0,672	0,720	0,805	1,248	1,670
0,50	0,653	0,676	0,711	0,735	0,800	0,852	0,938	1,425	1,901
0,30	0,831	0,849	0,868	0,891	0,961	1,013	1,105	1,668	2,219
0	0,915	0,933	0,958	0,972	1,042	1,097	1,192	1,810	2,392
$l(x_2)$	0,730	0,740	0,757	0,773	0,802	0,820	0,845	0,880	0,925

5. Теоремы 1—3 позволяют отделить собственно нелинейный аспект задач о штампе и трещине — отыскание неизвестной площадки контакта (контура трещины) — от линейной задачи определения контактных напряжений (перемещений берегов трещины), которая может затем решаться независимо, в частности при помощи квадратур типа (3.3). Развиваемый подход может быть распространен и на другие задачи с односторонними ограничениями.

Рассмотрим, например, задачу о мембране или пластине с плоским контуром, которые под действием нормальных к их плоскости сил частично прижаты к натянутой на этот контур гладкой жесткой поверхности. При помощи известных вариационных формулировок этих задач [1, 2] доказывается, что упругая энергия и объем полости между мембраной (пластиной) и жесткой поверхностью как функционалы от границы контакта максимальны для истинной формы пятна контакта, если перемещения мембраны удовлетворяют уравнениям равновесия и условию непроницаемости опорной поверхности.

В качестве приложения приведем задачу об упругопластическом кручении цилиндра односвязного поперечного сечения F:

$$\partial^2\psi/\partial x^2+\partial^2\psi/\partial y^2=-2\mu\alpha \quad ((x,\ y)\in G_\alpha) \tag{5.1}$$

$$(\partial\psi/\partial x)^2+(\partial\psi/\partial y)^2<k_s^2((x,\ y)\in G_\alpha) \tag{5.2}$$

$$(\partial\psi/\partial x)^2+(\partial\psi/\partial y)^2=k_s^2((x,\ y)\in F\backslash G_\alpha)$$

$$\psi|_L=0, \qquad L=\partial F \tag{5.3}$$

где ψ — функция напряжений при кручении, k_s — предел текучести при сдвиге, α — угол закручивания на единицу длины стержня, G_α — заранее неизвестное упругое ядро.

Пусть $\varphi(x,\ y)$ — функция напряжений при чисто пластическом кручении, уравнение $z=\varphi(x,\ y)$ задает поверхность Σ постоянного угла ската, натянутую на контур L. В соответствии с аналогией Надаи [19] задача (5.1) — (5.3) трактуется как задача о мембране формы F в плане, растянутой силами $1/(2\mu)$ на единицу длины L, которая прижата давлением α к вогнутой стороне поверхности Σ, и условия (5.2) эквивалентны следующим:

$$\psi(x,\ y)<\varphi(x,\ y)\,((x,\ y)\in G_\alpha);\quad \psi(x,\ y)=\varphi(x,\ y)\,((x,\ y)\in F\backslash G_\alpha) \tag{5.4}$$

Следствие. Из всех возможных границ раздела Γ_α' упругой и пластической зон для данного угла закручивания α истинной форме упругого ядра G_α отвечает минимальный крутящий момент на единицу длины

$$M[\alpha;\Gamma_\alpha']=2\int_F\psi(x,y;G_\alpha')\,dx\,dy \tag{5.5}$$

где $\psi(x, y; G_\alpha')$ — решение задачи $\partial^2\psi/\partial x^2+\partial^2\psi/\partial y^2=-2\mu\alpha$ $((x,y)\in G_\alpha'$, $\psi(x,y)=\varphi(x,y)$ $((x,y)\in F\setminus G_\alpha')$.

Действительно, согласно обобщению теоремы 3 на задачу Синьорини для мембраны из всех возможных границ контакта Γ_α' истинной области отрыва G_α соответствует максимальный объем образующейся полости

$$V[\Gamma_\alpha']=\int_{F\setminus G_\alpha'}[\varphi(x,y)-\psi(x,y;G_\alpha')]\,dx\,dy$$

Это выражение представляет дополнение к объему, ограниченному деформированной мембраной и плоскостью контура L:

$$V_M[\Gamma_\alpha']=\int_{F\setminus G_\alpha'}\varphi(x,y)\,dx\,dy+\int_{G_\alpha'}\psi(x,y;G_\alpha')\,dx\,dy \tag{5.6}$$

до полного объема под равноскатной поверхностью Σ. В аналогии Надаи крутящий момент (5.5) пропорционален объему (5,6) откуда и вытекает экстремальное свойство упругого ядра.

В работе [20], содержащей попытку критики [10], на примере задачи о трещине при условии конечности напряжений делаются выводы об отсутствии экстремума упругой энергии на искомом контуре и о невозможности определения геометрических параметров этого контура $\mu_1^0, \ldots, \mu_n^0$ из условий стационарности упругой энергии

$$\partial W(\mu_1,\ldots,\mu_n)/\partial\mu_k=0 \quad (k=1,\ldots,n) \tag{5.7}$$

Как показывает проведенный в пп. 1,3 анализ, истинному контуру трещины отвечает экстремум (максимум) упругой энергии на множестве контуров, для которых перемещения берегов трещины удовлетворяют естественному физическому требованию «неперехлестывания», а решение этой экстремальной задачи с ограничениями может быть получено из условий стационарности (5.7) для функционала W на пространстве всех контуров. Действительно, используя (3.3) и (3.6), для производных от упругой энергии в точках истинной траектории распространения трещины $\{\mu_1^0(\sigma), \ldots, \mu_n^0(\sigma)\}$ получим выражение

$$\left.\frac{\partial W[\sigma;\mu_1,\ldots,\mu_n]}{\partial\mu_k}\right|_{\substack{\mu_j=\mu_j^0(\sigma)\\(j=1,\ldots,n)}}=\int_\sigma^\infty\left.\frac{\partial V[\tau;\mu_1,\ldots,\mu_n]}{\partial\mu_k}\right|_{\substack{\mu_j=\mu_j^0(\tau)\\(j=1,\ldots,n)}}d\tau \tag{5.8}$$

Из (5.8) видно, что условия (5.7) эквивалентны системе уравнений, которая получается из теоремы 3, когда искомый контур принадлежит к семейству, задаваемому конечным числом геометрических параметров $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$:

$$\partial V[\sigma;\mu_1,\ldots,\mu_n]/\partial\mu_k=0 \quad (k=1,\ldots,n)$$

Необходимость последующей проверки условия неперехлестывания берегов в большинстве случаев снимается замечанием к теореме 3.

Автор признателен Г. И. Баренблатту за полезные указания и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fichera G.* Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints.— Handbuch der Physik. B. 6a/2. Berlin: Springer, 1972.— Рус. перев.: М.: Мир, 1974. 159 с.
2. *Duvaut G., Lions J. L.* Les inéquations en mécanique et en physique. Paris: Dunod, 1972. 387 p.
3. *Bogomolnii A., Eskin G., Zuchowizkii S.* Numerical solution of the stamp problem.— Computer methods in appl. mech. and eng., 1978, v. 15, No. 2, p. 149–159.
4. *Kalker J. J.* Variational principles of contact elastostatics.— J. Inst. Math. and Applic., 1977, v. 20, No. 2, p. 199–219.
5. *Желтов Ю. П., Христианович С. А.* О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта.— Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 5, с. 3–41.
6. *Баренблатт Г. И.* О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 4, с. 475–486.
7. *Išlinskij A. Ju.* Consideration of the theory of cracks from the point of view of contact problems of the theory of elasticity.— In: The mechanics of the contact between deformable bodies. Delft: Univ. Press, 1975, p. 77–83.
8. *Гольдштейн Р. В., Спектор А. А.* Вариационные оценки решений некоторых смешанных пространственных задач теории упругости с неизвестной границей.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 2, с. 82–94.
9. *Goldstein R. V., Entov V. M.* Variational bounds and qualitative methods in fracture mechanics.— In: 4th, Internat. Congr. of Fracture. Waterloo, Canada, 1977. London: Pergamon Press, 1977, p. 93–121.
10. *Баренблатт Г. И.* Об условиях конечности в механике сплошных сред. Статические задачи теории упругости.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 2, с. 316–322.
11. *Керчман В. И.* Вариационные задачи определения площадки контакта упругих тел.— Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 6, с. 1326–1329.
12. *Barber J. R.* Determining the contact area in elastic-indentation problems.— J. Strain Anal., 1974, v. 9, No. 4, p. 230–232.
13. *Блох М. В., Ващенко Н. Г., Гинц А. А.* О вдавливании штампа в прямоугольную пластинку.— Прикл. механика, 1978, т. 14, № 7, с. 70–75.
14. *Чурилов В. А.* О действии на упругое полупространство движущейся по его границе с постоянной скоростью нормальной нагрузки.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 1, с. 134–142.
15. *Batra R. C., Levinson M.* Extension of an energy theorem of Barenblatt's to elastodynamics.— Mech. Res. Comm., 1976, v. 3, No. 4, p. 303–306.
16. *Моссаковский В. И.* Применение теоремы взаимности к определению суммарных сил и моментов в пространственных контактных задачах.— ПММ, 1953, т. 17, вып. 3, с. 477–482.
17. *Малый В. И., Ефимов А. Б., Воробьев В. Н.* О решении пространственных контактных задач теории упругости.— Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 2, с. 316–319.
18. *Керчман В. И.* О численном решении пространственных контактных задач теории упругости.— В кн.: Вопросы механики деформируемых систем. Вып. 1. Кишинев, 1978, с. 4–13.
19. *Nadai A.* Theory of flow and fracture of solids. V. 1. New York: McGraw-Hill, 1950.— Рус. перев.: М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 648 с.
20. *Линьков А. М.* Об условиях конечности напряжений в теории упругости.— Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 2, с. 319–320.

Кишинев

Поступила в редакцию
3.III.1980