

УДК 539.3

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ  
УПРУГОГО КОНТАКТА ДВУХ ТЕЛ

ГАЛАНОВ Б. А.

В последнее время предложен ряд подходов к получению приближенных решений контактных задач с неизвестной площадкой контакта [1-4]. Данная статья посвящена приближенному методу решения одного класса таких задач (функция, описывающая форму поверхностей тел, является выпуклой и положительно однородной степени  $m$ ).

Для отыскания решения контактной задачи (давления, площадки контакта, сближения тел) предлагается метод последовательных приближений. Сходимость иллюстрируется примером приближенного решения на ЭВМ задачи вдавливания пирамиды Вика в полупространство. В некоторых отношениях метод близок к методу решения задачи о существенно наклонном круговом штампе [1]. Получено обобщение соотношения Г. Герца между сближением тел, сдавливающей силой, упругими характеристиками и геометрией поверхностей тел.

1. Рассматривается статическая контактная задача сжатия двух упругих тел, ограниченных поверхностями, которые касаются в недеформированном состоянии в одной точке (трение отсутствует).

Как известно [5], эта задача сводится к нахождению величин  $p(M)$ ,  $S$ ,  $h$  из нелинейной системы

$$D \int_S \frac{p(N)}{R_{MN}} dS_N = h - f(M), \quad \int_S p(N) dS_N = P, \quad D = \text{const} > 0 \quad (1.1)$$

$$p(M)|_L = 0, \quad p(M) \geq 0, \quad M(x, y), \quad N(\xi, \eta) \in S$$

где  $P$  — сила, сжимающая тела,  $L$  — граница площадки контакта  $S$ ,  $h$  — сближение тел,  $R_{MN}$  — расстояние между точками  $M$  и  $N$ ,  $f(M)$  — непрерывная на  $\mathbb{R}^2$  функция, определяемая формами поверхностей тел и имеющая непрерывные на  $L$  производные, кроме, быть может, конечного числа точек.

Недеформированные поверхности тел отнесены к системе координат  $Oxyz$ . Начало системы координат находится в точке начального касания поверхностей, ось  $Oz$  направлена внутрь одного из тел по линии действия силы  $P$ .

Будем предполагать, что  $f(M)$  — выпуклая положительно однородная функция  $m$ -й степени, т. е. для  $\lambda \geq 0$  имеем  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$ . Для многих практически важных контактных задач это условие выполняется.

Сделаем в (1.1) замену переменных:  $x = \lambda x_0$ ,  $y = \lambda y_0$ ,  $h = \lambda^m h_0$ ,  $\lambda = (PD)^{1/(m+1)}$ ,  $p_0(x_0, y_0) = D\lambda^{1-m} p(\lambda x_0, \lambda y_0)$ . При этой замене область  $S$  перейдет в  $S_0$ , контур  $L$  — в  $L_0$ , точки  $M, N$  — соответственно в точки  $M_0, N_0$ . Тогда получим систему

$$\int_{S_0} \frac{p_0(N_0)}{R_{M_0N_0}} dS_{N_0} = h_0 - f(M_0), \quad \int_{S_0} p_0(N_0) dS_{N_0} = 1, \quad p_0(M_0)|_{L_0} = 0, \quad M_0, N_0 \in S_0 \quad (1.2)$$

Условие  $p_0(M_0) \geq 0$  следует из выпуклости  $f(M)$ .

Решив систему (1.2) относительно  $p_0, h_0, S_0$  и вернувшись к прежним переменным, найдем

$$h = h_0 (PD)^{m/(m+1)}, \quad p(x, y) = \frac{p_0(x/\lambda, y/\lambda)}{D\lambda^{1-m}} \quad (1.3)$$

При  $m=2$  формулы (1.3) переходят в формулы Герца. По виду они совпадают с [3], однако здесь их смысл более широкий. Очевидно, что  $h_0$  определяется только геометрией поверхностей контактирующих тел.

Аналогично выполним в (1.1) замену переменных:  $x = h^{1/m} x', y = h^{1/m} y', P = P' h^{(m+1)/m} D^{-1}$

$$p'(x', y') = D h^{(1-m)/m} p(h^{1/m} x', h^{1/m} y'), \quad P' = \int_{S'} p'(N') dS_{N'}$$

Тогда относительно неизвестных  $p'(M'), S'$  получим систему

$$\int_{S'} \frac{p'(N')}{R_{M'N'}} dS_{N'} = 1 - f(M'), \quad p'(M')|_{L'} = 0, \quad M', N' \in S' \quad (1.4)$$

Нетрудно установить связь:  $h_0 = (P')^{-m/(m+1)}$ ,

$$p_0(x_0, y_0) = h_0^{(m-1)/m} p'(h_0^{-1/m} x_0, h_0^{-1/m} y_0), \quad x_0 = h_0^{1/m} x', \quad y_0 = h_0^{1/m} y'.$$

Таким образом, достаточно решить систему (1.2) или (1.4):  $(p_0, S_0, h_0)$  — решение задачи при единичной сдвигивающей силе, а  $(p', S', P')$  — при единичном сближении тел. В дальнейшем для упрощения записи штрихи у величин, соответствующих единичному сближению, опускаются (исключением является п. 4).

2. Запишем систему (1.4) в полярных координатах

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\rho(\varphi)} \frac{p(r, \varphi') r' d\varphi' dr'}{R_{MN}} = 1 - r^m f(\cos \varphi, \sin \varphi),$$

$$p(r, \varphi)|_{L} = 0, \quad M(r, \varphi), N(r', \varphi') \in S \quad (2.1)$$

где  $r = \rho(\varphi)$  — уравнение границы площадки  $S$ , или в операторном виде

$$A_\rho p = b, \quad p|_L = 0, \quad b = 1 - r^m f(\cos \varphi, \sin \varphi) \quad (2.2)$$

Здесь индекс  $\rho$  у оператора  $A_\rho$  означает зависимость оператора от  $\rho$ .

Преобразуем систему (2.2) к виду, удобному для применения метода последовательных приближений. Пусть функция  $\rho^*(\varphi)$  удовлетворяет уравнению

$$|p(\rho^*, \varphi)| = \min_{0 \leq r \leq \rho} |p(r, \varphi)|$$

где  $p(r, \varphi)$  — решение первого уравнения системы (2.2), соответствующее границе  $r = \rho(\varphi)$  площадки контакта  $S$ .

При  $\rho^* = \rho$  и  $p(\rho, \varphi) \neq 0$  полагаем  $\rho^* = \rho + [p'_\rho(\rho, \varphi)]^{-1} p(\rho, \varphi)$  и  $p(\rho^*, \varphi) = 0$ . Введем оператор

$$B_\rho(\rho) = \rho(\varphi) + \sigma(\rho(\varphi) - \rho^*(\varphi)) \frac{p(\rho(\varphi), \varphi)}{|p(\rho^*(\varphi), \varphi)| + |p(\rho(\varphi), \varphi)|}$$

Если на границе площадки контакта давление не ограничено, то значение дроби в операторе  $B_p$  принимается равным  $\pm 1$  в соответствии со знаком давления; при нулевом давлении на контуре дробь считается равной  $1/2$ . Параметр  $\sigma$  удовлетворяет неравенствам  $0 < \sigma \leq 1$ .

Рассмотрим систему

$$A_p p = b, \quad \rho = B_p(\rho) \quad (2.3)$$

Можно доказать эквивалентность систем (2.2) и (2.3). Она означает следующее: если система (2.2) имеет единственное решение  $(p, \rho)$ , то система (2.3) также имеет единственное решение  $(p, \rho)$ , удовлетворяющее условию  $p(\rho(\varphi), \varphi) = 0$ , и наоборот.

*Доказательство.* Пусть  $(p, \rho)$  — единственное решение системы (2.2). Тогда можем написать [5]

$$p(M) = \int_S G(M, N) \Delta f(N) dS_N, \quad M \in \Pi$$

где  $\Delta$  — двумерный оператор Лапласа,  $\Pi$  — плоскость, которая разделяет тела и в которой лежит  $S$ ,  $G(M, N)$  — функция Грина для области  $\mathbb{R}^3 \setminus \Pi'$ ,  $\Pi' = \Pi \setminus S$ .

Из данного представления  $p(M)$ , из строгой положительности функции Грина во всякой внутренней точке области  $\mathbb{R}^3 \setminus \Pi'$  и из того, что  $f(M)$  — выпуклая негармоническая функция, следует, что  $p(M) \geq 0$ , причем знак равенства имеет место только на  $L \cup \Pi'$ . Поэтому  $\rho^* = \rho$  и  $(p, \rho)$  — решение системы (2.3).

Пусть теперь  $(\tilde{p}, \tilde{\rho})$  — второе решение системы (2.3), удовлетворяющее условию  $\tilde{p}(\tilde{\rho}, \varphi) = 0$ . Тогда оно тоже является вторым решением системы (2.2), что противоречит его единственности. Обратное очевидно.

Если функция  $f(M)$  достаточно гладкая, то легко видеть, что любое решение  $p(M)$  системы (2.3) ограничено.

Таким образом, если бы удалось доказать существование и единственность такого решения  $(p, \rho)$  системы (2.3), что  $p(\rho, \varphi) = 0$ , то тем самым было бы доказано существование единственного решения системы (2.2).

В отличие от (2.2) система (2.3) подготовлена к применению метода последовательных приближений, который можно записать, например, в виде итерационного процесса

$$p_k = A_p^{-1} b, \quad \rho_{k+1} = \rho_k + \sigma (\rho_k - \rho_k^*) \frac{p_k(\rho_k, \varphi)}{|p_k(\rho_k^*, \varphi)| + |p_k(\rho_k, \varphi)|} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

Очевидно, что изучение вопроса сходимости метода (2.4) равносильно изучению вопроса существования и единственности решения задачи.

В связи с тем, что первое уравнение системы (2.2) удовлетворяется и на контуре  $L$ , имеем

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\rho(\varphi)} \frac{p(r', \varphi') r' dr' d\varphi'}{R_{MN}} = 1 - \rho^m f(\cos \varphi, \sin \varphi)$$

Отсюда следует (поскольку  $p \geq 0$ ), что  $\rho(\varphi) \leq (f \cos \varphi, \sin \varphi)^{-1/m}$  и первое приближение для  $\rho$  в итерационных процессах можно принять равным  $\rho_1(\varphi) = (f \cos \varphi, \sin \varphi)^{-1/m}$ .

Итак, процесс получения последовательных приближений состоит из двух этапов: на первом этапе решается относительно  $p_k(r, \varphi)$  первое урав-

нение системы (2.3) при заданной границе  $r = \rho_k(\varphi)$ ; на втором этапе по полученному решению  $p_k(r, \varphi)$  строится следующее приближение  $p_{k+1}(\varphi)$  для контура  $L$ .

Можно показать, что при  $b \in C^{(0,1)}(S)$  первое уравнение (2.3) имеет в  $L_2(S)$  единственное решение.

3. Описанный метод последовательных приближений осложнен тем, что в (2.4)  $A_p^{-1}$  — неограниченный оператор, и поэтому при его реализации возможны явления, обычные для некорректных задач [6]. В связи с этим рассмотрим более подробно первый этап и укажем алгоритм регуляризации. Как известно [6], свойства оператора  $A_p$  определяют выбор алгоритма регуляризации.

В нашем случае оператор  $A_p$  положительный в  $L_2(S)$  и вполне непрерывный из  $L_p(S)$  в  $L_2(S)$ ,  $p \geq 2$  [7, 8].

Поэтому может быть принят алгоритм [9], в котором рассматривается вспомогательное уравнение

$$\alpha p_\alpha + A_p p_\alpha = b \quad (3.1)$$

и приближенное для (3.1) уравнение

$$\alpha p_\alpha^\sim + A_p^\sim p_\alpha^\sim = b^\sim \quad (3.2)$$

где  $\alpha$  — положительное число.

За приближенное решение уравнения  $A_p p = b$  принимается приближенное решение  $p_\alpha^\sim$  уравнения (3.2) с достаточно малым  $\alpha$ , которое согласовано с аппроксимациями  $A_p^\sim$  и  $b^\sim$ .

Если  $\|A_p^\sim - A_p\| \rightarrow 0$ ,  $\|b - b^\sim\| \rightarrow 0$  быстрее  $\alpha$ , то  $\|p_\alpha^\sim - p\|_{L_2(S)} \rightarrow 0$ ,  $\|b - A_p^\sim p_\alpha^\sim\|_{L_2(S)} \rightarrow 0$  [9]. Отсюда из полной непрерывности  $A_p$  и теоремы Харнака [8] (если  $A_p^\sim p_\alpha^\sim$  — гармонические функции при  $z \geq 0$  или  $z \leq 0$ ) следует, что приближения  $u_\alpha^\sim = A_p^\sim p_\alpha^\sim$  при  $\alpha \rightarrow 0$  сходятся равномерно в полупространстве  $z > 0$  или  $z < 0$  к гармонической в  $R^3 \setminus S$  функции

$$u(M) = \int_s \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}$$

Это же касается и производных при  $z > 0$  или  $z < 0$ , что особенно важно при определении перемещений и напряжений.

Задача определения параметра регуляризации  $\alpha$  как функции погрешностей аппроксимаций  $\|b - b^\sim\| = \varepsilon_1$  и  $\|A_p^\sim - A_p\| = \varepsilon_2$ ,  $\alpha = \alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , для которой оператор  $(\alpha E + A_p)^{-1} b$  регуляризирующий, является трудной задачей [6]. В большинстве случаев она решается приближенно, численными методами.

В силу свойств оператора  $A_p$  здесь параметр регуляризации может быть определен из условия

$$\inf_\alpha \|b(M) - u_\alpha^\sim(M)\|_{C(S)} = \inf_\alpha \Delta_\alpha'$$

или

$$\inf_\alpha \|b(M) - u_\alpha^\sim(M)\|_{L_2(S)} = \inf_\alpha \Delta_\alpha''$$

Величины  $\Delta_\alpha'$  и  $\Delta_\alpha''$  вычисляются приближенно с помощью последовательностей сеточных функций для  $b$  и  $u_\alpha^\sim$  с шагами сетки, сходящимися к нулю. Кроме того, следует иметь в виду, что минимизация функций  $\Delta_\alpha'$ ,  $\Delta_\alpha''$  должна быть согласована с точностью  $\nabla$  обработки поверхностей контактирующих тел (бессмысленно добиваться минимума функций  $\Delta_\alpha'$ ,  $\Delta_\alpha''$ , меньшего указанной точности  $\nabla$ , см. [6]).

Описанный способ регуляризации может быть реализован следующим способом. Рассмотрим случай  $z \geq 0$  (случай  $z \leq 0$  рассматривается анало-

гично). Введем непрерывную при  $z \geq 0$  функцию

$$G_\delta(M, N) = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \delta)^2]^{-1/2}, \quad \delta > 0$$

Очевидно, что  $\lim_{\delta \rightarrow 0} G_\delta(M, N) = G(M, N)$  и операторы

$$A_\delta p \equiv \int_{S_i} G_\delta(M, N) p(N) dS_N, \quad M, N \in S$$

при  $\delta \rightarrow 0$  сходятся по норме операторов к оператору  $A_p$ .

Если  $S$  разбить сеткой на  $n$  частей  $S_i$  площадью  $\Delta S_i$ , обозначить  $p_i \equiv p(M_i)$ ,  $b_i \equiv b(M_i)$ ,  $G_{ij} \equiv G_{\delta_n}(M_i, M_j)$ ,  $M_i \in S_i$ , применить формулу прямоугольников, то уравнение (3.2) можно записать так:

$$\alpha p_i + \sum_{j=1}^n G_{ij} p_j \Delta S_j = b_i \quad (i = \overline{1, n}) \quad (3.3)$$

и рассматривать его в  $R^n$ . Приближение  $u_\alpha(M)$  для функции  $u(M)$  можно записать в виде гармонической при  $z \geq 0$  функции

$$u_\alpha(M) = \sum_{i=1}^n p_i \Delta S_i G_{\delta_n}(M, M_i) \quad M_i \in S_i, \quad M \in \{z \geq 0\}$$

Поскольку при использовании формулы прямоугольников наибольшая погрешность возникает в окрестности точки  $M_i$ , число  $\delta_n > 0$  должно быть согласовано с размерами сетки. Это согласование можно приближенно выполнить, используя равенство

$$\int_{S_i} \frac{p(N)}{R_{MN}} dS_N = c \int_K \frac{dS_N}{R_{MN}} = 2\pi c \sqrt{\Delta S} = \pi c \Delta S G_{\delta_n}(M, M_i)$$

где  $K$  — круг радиуса  $\sqrt{\Delta S}$  с центром в  $M_i$ ,  $\Delta S = |S|/n$ ,  $M \in K$  — произвольная фиксированная точка,  $c$  — некоторая константа,  $\delta_n$  зависит от  $M$ . Отсюда при  $M = M_i$  получаем  $\delta_n = \sqrt{\Delta S}/2$ .

Систему (3.3) целесообразно решать методами последовательных приближений. Это объясняется тем, что решение системы (3.3) для  $n = n_1$  может быть взято за начальное приближение для решения расширенной системы:  $n = n_2 > n_1$ .

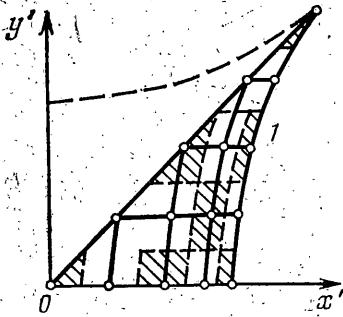
В силу свойств ядра интегрального оператора (оно является положительно-определенной функцией [10]) матрица системы (3.3) положительно-определенная. Кроме того, при достаточно малом  $\delta_n$  она имеет доминирующую главную диагональ. Эти свойства следует учитывать при выборе метода решения данной системы. В приведенном далее примере использовались методы простой итерации, наискорейшего спуска Л. В. Канторовича, а также модификации методов спуска [11]. Наиболее быстрая сходимость наблюдалась при использовании модификаций.

4. Рассмотрим следующий пример. Пусть в упругое полупространство  $z \geq 0$  вдавливается правильная четырехгранная пирамида. Для определения величин  $p(M)$ ,  $S$ ,  $h$  имеем систему

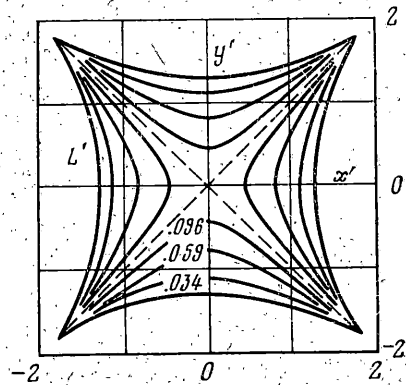
$$D \int_S \frac{p(N)}{R_{MN}} dS_N = h - \beta \max(|x|, |y|), \quad \int_S p(N) dS_N = P, \quad p(M)|_L = 0$$

Коэффициент  $\beta$  характеризует наклон граней пирамиды к оси  $Oz$  ( $h=h_0(PD)^{1/2}$ ,  $h_0=2,03\sqrt{\beta}$ ). Для рассматриваемой далее пирамиды Виккерса, используемой при испытаниях материалов,  $\beta=\text{ctg } 68^\circ$ .

Применялся дискретный аналог метода (2.4) в декартовой системе координат ( $\sigma=0,5$ ). Площадка контакта  $S_k'$  с контуром  $L_k'$  разбивалась сеткой на  $n$  частей. Индекс  $k$  указывает номер приближения, а штрих — принятую систему координат. Сетка образована линиями, параллельными координатным осям и контуру  $L_k'$  (фиг. 1, кривая 1). Эти линии проходят



Фиг. 1



Фиг. 2

через точки, идущие с равными шагами по прямым  $y'=\pm x'$ . Элементарные площадки, на которые делилась площадка  $S_k'$ , заштрихованы; узлы сетки отмечены точками. При составлении системы (3.3) учитывалась симметрия решения ( $p'$ ,  $S'$ ) относительно четырех осей.

Координаты узлов сетки  $(i, j)$  и точек границы площадки контакта (узлы  $(i, 9)$ ), а также контактные давления в узлах, принятые за приближенное решение при  $n=289$ , даны в таблице. Соответствующая площадка контакта с изобарами контактного давления изображена на фиг. 2. На прямых  $y'=\pm x'$  функция  $p'(x', y')$  имеет особенность. Некоторые свойства этих особенностей могут быть изучены при помощи построения последовательности приближенных решений, соответствующей сгущающейся сетке.

Гармоническая в  $R^3 \setminus S'$  функция

$$u(M') = \int_{S'} \frac{p'(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 + z'^2}}$$

с помощью которой вычисляются перемещения и напряжения, при  $z \geq 0$  приближенно представляется в виде

$$u^*(x', y', z') = \sum_{i,j} p_{ij} \Delta S_{ij} G_{\delta_n}(x', y', z', \xi_i, \eta_j), \quad \delta_n = (|S'|/4n)^{1/2}$$

$$G_{\delta_n}(x', y', z', \xi_i, \eta_j) = [(x' - \xi_i)^2 + (y' - \eta_j)^2 + (z' + \delta_n)^2]^{-1/2}$$

где  $\Delta S_{ij}$  — площадь элементарной площадки, соответствующей узлу  $(i, j)$  с координатами  $(\xi_i, \eta_j)$ , а суммирование распространяется по всем узлам площадки  $S'$  с площадью  $|S'|$ . Для  $n=289$ ,  $\delta_n=0,0829$ , параметра регуляризации  $\alpha=0,03844$ .

Вычисления выполнялись на М-4030. Программа написана на языке ФОРТРАН-IV. Необходимый ресурс машинного времени может быть опре-

делен по формуле  $t \approx N^2/40$  мин. Здесь  $N = (\sqrt{n+1})(\sqrt{n+3})/8$  — наибольший порядок системы (3.3). При  $n \leq 121$  первое приближение для контура принималось по приведенной выше формуле; для  $n > 121$  — из расчета для меньших значений  $n$  (с применением линейной интерполяции между узлами контура).

Останов осуществлялся по критерию Гарвика: из 10 итераций после выполнения условия  $d(L'_k, L'_{k+1}) \leq d_{nk}/50$  выбиралась та, при которой давление на контуре  $L'_k$  минимальное. В последнем неравенстве

| $ij$ | $\xi_i$ | $\eta_j$ | $p_{ij}$ | $ij$ | $\xi_i$ | $\eta_j$ | $p_{ij}$ |
|------|---------|----------|----------|------|---------|----------|----------|
| 11   | 0,0000  | 0,0000   | 0,3099   | 39   | 1,3279  | 0,4577   | 0,0000   |
| 12   | 0,2223  | 0,0000   | 0,1414   | 44   | 0,6865  | 0,6865   | 0,1798   |
| 13   | 0,4315  | 0,0000   | 0,0964   | 45   | 0,8692  | 0,6865   | 0,0840   |
| 14   | 0,6273  | 0,0000   | 0,0751   | 46   | 1,0381  | 0,6865   | 0,0545   |
| 15   | 0,8100  | 0,0000   | 0,0589   | 47   | 1,1708  | 0,6865   | 0,0394   |
| 16   | 0,9789  | 0,0000   | 0,0458   | 48   | 1,2949  | 0,6865   | 0,0282   |
| 17   | 1,1116  | 0,0000   | 0,0345   | 49   | 1,3609  | 0,6865   | 0,0000   |
| 18   | 1,2357  | 0,0000   | 0,0252   | 55   | 0,9153  | 0,9153   | 0,1731   |
| 19   | 1,3017  | 0,0000   | 0,0000   | 56   | 1,0842  | 0,9153   | 0,0755   |
| 22   | 0,2288  | 0,2288   | 0,2053   | 57   | 1,2169  | 0,9153   | 0,0455   |
| 23   | 0,4380  | 0,2288   | 0,1089   | 58   | 1,3410  | 0,9153   | 0,0307   |
| 24   | 0,6338  | 0,2288   | 0,0774   | 59   | 1,4070  | 0,9153   | 0,0000   |
| 25   | 0,8166  | 0,2288   | 0,0603   | 66   | 1,1442  | 1,1442   | 0,1738   |
| 26   | 0,9854  | 0,2288   | 0,0467   | 67   | 1,2769  | 1,1442   | 0,0666   |
| 27   | 1,1181  | 0,2288   | 0,0350   | 68   | 1,4010  | 1,1442   | 0,0401   |
| 28   | 1,2422  | 0,2288   | 0,0256   | 69   | 1,4669  | 1,1442   | 0,0000   |
| 29   | 1,3082  | 0,2288   | 0,0000   | 77   | 1,3730  | 1,3730   | 0,1711   |
| 33   | 0,4577  | 0,4577   | 0,1892   | 78   | 1,4971  | 1,3730   | 0,0520   |
| 34   | 0,6535  | 0,4577   | 0,0946   | 79   | 1,5631  | 1,3730   | 0,0000   |
| 35   | 0,8362  | 0,4577   | 0,0648   | 88   | 1,6019  | 1,6019   | 0,1861   |
| 36   | 1,0051  | 0,4577   | 0,0493   | 89   | 1,6678  | 1,6019   | 0,0000   |
| 37   | 1,1378  | 0,4577   | 0,0367   | 99   | 1,8307  | 1,8307   | 0,0000   |
| 38   | 1,2619  | 0,4577   | 0,0265   |      |         |          |          |

$d(L'_k, L'_{k+1})$  — расстояние между контурами  $L'_k$  и  $L'_{k+1}$ , а  $d_{nk}$  — расстояние между контуром  $L'_k$  и ближайшей параллельной к  $L'_k$  линией сетки (фиг. 1). Расстояние  $d_{nk}$  зависит от  $n$  и  $k$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачев В. Л., Проценко В. С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наукова думка, 1977. 236 с.
2. Малый В. И., Ефимов А. Б., Воробьев В. Н. О решении пространственных контактных задач теории упругости. — Докл. АН СССР, 1973, 209, № 2, с. 316–319.
3. Кильчевский М. О. Прямые методы развязывания контактной задачи. — Доп. АН УРСР, 1960, № 8, с. 1031–1034.
4. Kalker J. J. A Survey of the mechanics of contact between solid bodies. — Z. angew. Math. und Mech., 1977, V. 57, N. 5, S. 3–17.
5. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.
7. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966. 516 с.
8. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 432 с.
9. Бакушинский А. Б. О некотором численном методе решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода. — Вычислительные методы и программирование: Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, 1966, вып. 5, с. 99–106.
10. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
11. Галанов В. О. Про один дифференціальний метод та його апроксимації. — Доп. АН УРСР, 1972, сер. А, № 6, с. 494–497.

Киев

Поступила в редакцию  
3.V.1979