

УДК 534.1

К ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

СЕМЕНОВ В. А.

Исследованию параметрической стабилизации неустойчивых форм равновесия механических систем посвящены работы [1-4]. Обзор возможных технических приложений содержится в [5]. Классические методы нелинейной механики, эффективные для исследования параметрических резонансов, допускают лишь ограниченное применение в теории параметрической стабилизации. Например, при наличии у невозмущенной системы характеристических показателей с положительными действительными частями разделение «быстрых» и «медленных» движений не всегда представляется возможным. От этого ограничения свободен численный метод исследования устойчивости линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [6].

В [7] показано, что параметрическое воздействие, стабилизирующее равновесие по отношению к некоторой совокупности обобщенных координат, может оказаться дестабилизирующим по отношению к другим обобщенным координатам. В связи с этим возникает вопрос о влиянии числа степеней неустойчивости невозмущенной системы на структуру и конфигурацию области стабилизации. В публикуемой работе с использованием численного метода из [6] изучается структура и конфигурация областей стабилизации неустойчивых форм равновесия некоторых классов механических систем в зависимости от числа степеней неустойчивости невозмущенной системы.

1. Рассмотрим систему с n степенями свободы, линеаризованные уравнения возмущенного движения которой имеют вид

$$A \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + B \frac{d\mathbf{q}}{dt} + [C + \mu F(t)] \mathbf{q} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{q}(t)$ — вектор-функция обобщенных координат, A , B , C , F — матрицы размерностью $n \times n$, μ — действительное число. Матрицы A и B — числовые, симметричные и положительно-определенные. Элементы матрицы $F(t)$ считаем действительными интегрируемыми периодическими кусочно-непрерывными функциями t . Матрица C — числовая, симметричная; в общем случае ей соответствует знакопеременная квадратичная форма.

Пусть в главных обобщенных координатах матрица $A^{-1}C$ записывается в форме $A^{-1}C = \text{diag} \{-\omega_1^2, \dots, -\omega_r^2, \omega_{r+1}^2, \dots, \omega_n^2\}$, где r — степень неустойчивости невозмущенной системы.

Числа $\omega_k > 0$ назовем собственными частотами системы для всех k , в том числе и для $k \leq r$. Собственную форму движения с обобщенной координатой q_k , соответствующую собственной частоте ω_k , будем называть устойчивой при $k > r$. Если $k \leq r$, то собственную форму движения с обобщенной координатой q_k будем считать неустойчивой. Невозмущенному состоянию равновесия соответствует решение $\mathbf{q} = 0$ системы (1.1). Исследуем возможность параметрической стабилизации при различных значениях μ и $1 \leq k \leq n$. При этом под областью стабилизации будем понимать открытое множество точек в пространстве параметров системы, для которых решение $\mathbf{q} = 0$ системы (1.1) является асимптотически устойчивым.

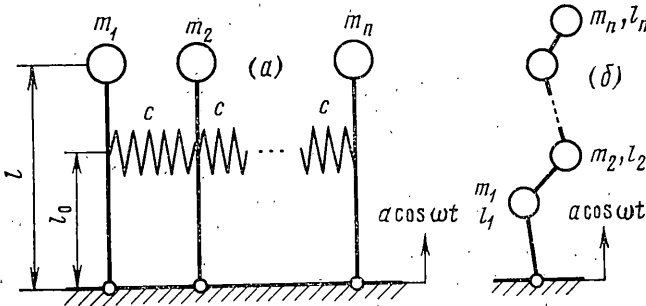
Рассмотрим систему скрепленных пружинами обращенных маятников на основании, совершающем колебания по закону $a \cos \omega t$ (фиг. 1, а). Пусть все параметры маятников (массы: $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$; длины: $l_1 = l_2 = \dots = l_n = l$; $l_{10} = l_{20} = \dots = l_{n-1,0} = l_0$; коэффициенты демпфирования: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = \varepsilon$; жесткости пружин: $c_1 = c_2 = \dots = c_n = c$) одинаковы. Тогда уравнения движения (1.1) примут вид

$$\frac{d^2 q_k}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dq_k}{dt} + \omega_0^2 (2\eta - 1 + 2\mu \omega^2 \cos \omega t) q_k - \eta \omega_0^2 (q_{k-1} + q_{k+1}) = 0 \quad (1.2)$$

$$\omega_0^2 = g/l, \quad \eta = cl_0^2/(mgl), \quad \mu = 1/2 a/l \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

где q_k — угол отклонения k -го маятника от вертикали.

В уравнениях (1.2) при $k=1$ и $k=n$ следует положить $q_0 = q_1$, $q_{n+1} = q_n$. Из структуры уравнений (1.2) видно, что область стабилизации для рассматриваемой системы маятников должна полностью принадлежать обла-



Фиг. 1

сти стабилизации одного обращенного маятника длины l и массы m , основание которого возбуждается по тому же закону. При изменении значения параметра связанности системы η число степеней неустойчивости невозмущенной системы будет принимать различные значения.

Пусть $n=3$. Тогда, вводя новые переменные $x_1 = q_1 + q_2 + q_3$, $x_2 = q_1 - q_3$, $x_3 = q_3$, систему (1.2) запишем в виде

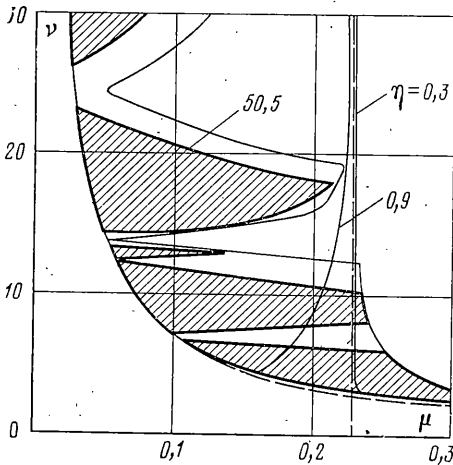
$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2 (-1 + 2\mu \omega^2 \cos \omega t) x_1 = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dx_2}{dt} + \omega_0^2 (\eta - 1 + 2\mu \omega^2 \cos \omega t) x_2 = 0$$

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dx_3}{dt} + \omega_0^2 (3\eta - 1 + 2\mu \omega^2 \cos \omega t) x_3 - \eta \omega_0^2 x_1 = 0$$

При $\eta < 1/3$ степень неустойчивости невозмущенной системы $r=3$. При $1/3 < \eta < 1$ имеем $r=2$, а при $\eta > 1$ имеем $r=1$. Структура системы уравнений такова, что если при некоторых значениях параметров μ и $\nu = \omega/\omega_0$ движение асимптотически устойчиво по отношению к обобщенной координате x_1 , то движение будет асимптотически устойчиво по отношению к обобщенной координате x_3 при условии, что точка (μ, ν) принадлежит области устойчивости третьего уравнения (1.3) при $x_1 = 0$. Если же точка (μ, ν) принадлежит области неустойчивости первого из уравнений (1.3), то движение будет неустойчиво. Это означает, что область стабилизации системы (1.3) можно строить как суперпозицию областей стабилизации каждого из уравнений, входящих в (1.3).

Рассмотрим зависимость конфигурации области стабилизации от параметра связанности маятников η . На фиг. 2 нанесены границы областей стабилизации на плоскости μ, ν при коэффициенте демпфирования $\gamma = \varepsilon/\omega_0 = 0,01$. Тонкие линии соответствуют значениям параметра связанности $\eta = 0,3$ и $0,9$; толстая линия — значению $\eta = 50,5$, для которого область стабилизации заштрихована.



Фиг. 2

При $\eta = 0,3$ степень неустойчивости невозмущенной системы равна трем и область стабилизации имеет ту же конфигурацию, что и область стабилизации одиночного обращенного маятника. Если $\eta = 0,9$, то степень неустойчивости равна двум, т. е. одна из обобщенных координат, а именно x_3 , будет устойчивой при $\mu = 0$. Для этой обобщенной координаты при $\mu > 0$ возможно возбуждение параметрических колебаний. В результате область стабилизации системы будет представлять собой суперпозицию областей стабилизации по отношению к координатам x_1 и x_2 и областей устойчивости тривиального решения третьего уравнения системы (1.3). Основной параметрический резонанс будет наблюдаться при значении частоты возбуждения $\nu = 2(3\eta - 1)^{1/2} \approx 2,8$.

В случае, если $\eta > 1$, степень неустойчивости уменьшается до единицы. Однако, если $\eta \approx 1$ и демпфирование мало, то конфигурация области стабилизации мало отличается от конфигурации области стабилизации для случая $r = 2$, так как $\omega_3^2 = (3\eta - 1)\omega_0^2 > \omega_2^2 = (\eta - 1)\omega_0^2$. Если же $\eta \gg 1$, то на конфигурацию области стабилизации существенное влияние оказывают параметрические резонансы при $\nu = 2\omega_j / (p\omega_0)$ ($j = 2, 3$; $p = 1, 2, \dots$). Так, при $\eta = 50,5$ собственные частоты $\omega_2 = 7,05 \omega_0$, $\omega_3 = 12,3 \omega_0$ и существенное влияние на конфигурацию области стабилизации оказывают резонансы, соответствующие частотам возбуждения $\nu = 24,6$; $14,1$; $12,3$; $7,05$.

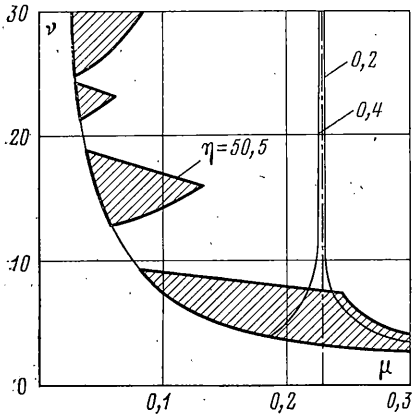
Условие параметрической стабилизации, полученное согласно методу усреднения, для системы (1.3) имеет вид $\nu > 1/(\sqrt{2}\mu)$. Граница области стабилизации, описываемая данным условием для значения $\eta = 50,5$, нанесена на фиг. 2 штриховой линией.

2. Рассмотрим случай $n = 4$. Вводя новые переменные $x_1 = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$, $x_2 = q_2 + q_3 - q_1 - q_4$, $x_3 = q_1 - q_4$, $x_4 = q_2 - q_3$, приведем систему (1.2) к виду

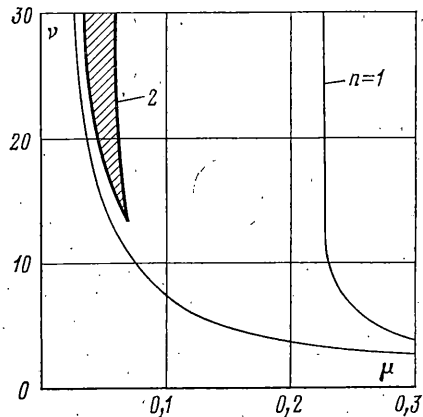
$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2 (-1 + 2\mu \omega^2 \cos \omega t) x_1 &= 0 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dx_2}{dt} + \omega_0^2 (2\eta - 1 + 2\mu \omega^2 \cos \omega t) x_2 &= 0 \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dx_3}{dt} + \omega_0^2 (\eta - 1 + 2\mu \omega^2 \cos \omega t) x_3 - \eta \omega_0^2 x_4 &= 0 \\ \frac{d^2 x_4}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dx_4}{dt} + \omega_0^2 (3\eta - 1 + 2\mu \omega^2 \cos \omega t) x_4 - \eta \omega_0^2 x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Степень неустойчивости невозмущенной системы соответствующей системе (2.1) изменяется от четырех при $\eta < 1/3$ до единицы при $\eta > 1$. При $1/3 < \eta < 0,5$ параметр $r=3$, при $0,5 < \eta < 1$ параметр $r=2$. Собственные частоты системы равны: $\omega_1^2 = -\omega_0^2$, $\omega_2^2 = (2\eta - 1)\omega_0^2$, $\omega_3^2 = (\eta - 1)\omega_0^2$, $\omega_4^2 = (3\eta - 1)\omega_0^2$.

На фиг. 3 представлены области стабилизации системы (2.1), полученные для различных значений параметра связанности η . Для случая $\eta=0,2$ степень неустойчивости системы равна четырем, а область стабилизации имеет ту же конфигурацию, что и область стабилизации одиночного обращенного маятника. При $\eta=0,4$ и $\mu=0$ обобщенная координата x_4 будет устойчивой. В результате область стабилизации системы (2.1) представ-



Фиг. 3.



Фиг. 4

ляет собой суперпозицию областей стабилизации для координат x_1 , x_2 и областей устойчивости нулевого решения третьего и четвертого уравнений из (2.1). Если $0,5 < \eta < 1$, то обобщенная координата x_2 также становится устойчивой. Однако существенного отличия конфигурации области стабилизации при $r=2$ от конфигурации области стабилизации для случая $r=3$ не будет, так как $\omega_2^2 < \omega_4^2$.

Если значение параметра η незначительно превышает единицу и демпфирование мало, то область стабилизации по-прежнему мало отличается от области стабилизации для $r=2, 3$. При $\eta \gg 1$ на область стабилизации существенное влияние будут оказывать параметрические резонансы при $\nu = 2\omega_2 / (p\omega_0)$, $\nu = (\omega_j + \omega_k) / (p\omega_0)$ ($j, k=3, 4$; $p=1, 2, \dots$). На фиг. 3 заштрихована область стабилизации системы (2.1), полученная для случая $\eta=50,5$. При этом $\omega_2=10\omega_0$, $\omega_3=7,05\omega_0$, $\omega_4=12,3\omega_0$. Условие стабилизации системы (2.1) согласно методу усреднения совпадает с условием, полученным для случая $n=3$.

На примере обращенного маятника с вибрирующим основанием в [7] показано, что введение демпфирования слабо влияет на конфигурацию и не изменяет структуры области стабилизации системы с одной степенью свободы. Этот вывод остается справедливым и для систем с несколькими степенями свободы в случае, если степень неустойчивости невозмущенной системы совпадает с числом степеней свободы системы. Если же число степеней неустойчивости невозмущенной системы отлично от числа степеней свободы, то введение демпфирования может существенно изменить конфигурацию и структуру области стабилизации системы за счет подавления параметрических резонансов для устойчивых форм движения. Это

проиллюстрировано на фиг. 2, где тонкими линиями нанесены границы области стабилизации, вычисленные при коэффициенте демпфирования $\gamma=0,1$, $\eta=50,5$.

3. Исследуем возможность стабилизации цепочки вертикально направленных маятников при помощи вертикальных колебаний основания по закону $a \cos \omega t$ (фиг. 1, б). Пусть все параметры маятников (массы: $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$; длины: $l_1 = l_2 = \dots = l_n = l$; коэффициенты демпфирования: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = \varepsilon$) одинаковы. Тогда уравнения движения системы примут вид

$$\sum_{i=j}^n \sum_{k=1}^i \frac{d^2 q_k}{dt^2} + 2\varepsilon \sum_{k=j}^{j+1} (-1)^{k-j} \left(\frac{dq_k}{dt} - \frac{dq_{k-1}}{dt} \right) - (n-j+1) \frac{g - a\omega^2 \cos \omega t}{l} q_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (q_0=0, \quad q_{n+1}=q_n) \quad (3.1)$$

Здесь q_k — угол отклонения k -го маятника от вертикали, g — ускорение силы тяжести.

На фиг. 4 нанесены области стабилизации нулевого решения системы (3.1) на плоскости μ , ν ($\mu = 1/2 a/l$, $\nu = \omega/\sqrt{g/l}$) при $n=1, 2$. Область стабилизации, соответствующая случаю $n=2$, заштрихована. При $n=3, 4$ области стабилизации системы (3.1) обнаружить не удалось, вплоть до значений $\nu \leq 60$.

Как видно из проведенного численного анализа, во всех рассмотренных задачах условия стабилизации, полученные по методу усреднения, являются лишь приближенными необходимыми условиями. Области параметрической стабилизации имеют сложную структуру, зависящую от числа степеней свободы и числа степеней неустойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hirsch P. Das Pendel mit oszillierendem Aufhangepunkt. — ZAMM, 1930, В. 10, No. 2, p. 173.
2. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. — ЖЭТФ, 1951, т. 21, вып. 5, с. 588.
3. Челомей В. Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций. — Докл. АН СССР, 1956, т. 110, № 3, с. 345.
4. Bogdanoff J. L., Citron S. J. On the stabilization of the inverted pendulum. — Proc. Midwestern Mechanics Conference, University of Wisconsin, Madison, 1965, p. 153.
5. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1971. 440 с.
6. Бологин В. В. Численный анализ устойчивости линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Избранные проблемы прикладной механики: Сб. статей. М.: Изд-во ВИНТИ, 1974, с. 155.
7. Бологин В. В., Воробьев В. И., Семенов В. А., Чернов В. К. О параметрической стабилизации неустойчивых форм равновесия механических систем. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 1, с. 36.

Москва

Поступила в редакцию
24.IV.1980