

УДК 534.1

ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫЙ МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

КУЛИФЕЕВ Ю. Б.

Важное и актуальное направление современной механики — исследование управляемых и оптимальных механических динамических систем — развивается на стыке механики с наукой об управлении [1]. Успех в осуществлении оптимального управления главным образом зависит от степени соответствия математической модели системы, заложенной в алгоритм управления, реальному закону движения этой системы.

В том случае, когда аналитические и численные методы механики не позволяют достаточно точно определить параметры модели системы, возникает проблема уточнения их значений в процессе натурных испытаний или эксплуатации системы.

Параметрическая идентификация систем, подтвержденных случайным возмущением, выполняется в общем случае совместным оцениванием состояния системы и ее параметров, что в свою очередь приводит к задаче нелинейного сглаживания или фильтрации. Если параметры системы в течение времени идентификации остаются постоянными, то решения задач сглаживания и фильтрации для момента времени окончания наблюдений совпадают. В этом случае можно решать более простую задачу фильтрации.

Методы нелинейной фильтрации для случая аддитивных случайных возмущений изложены, например, в [2].

В зависимости от того, является ли математическая модель системы непрерывной или дискретной, применяются соответственно непрерывные или дискретные методы фильтрации.

Механические системы — это непрерывные системы, идентификация которых предполагает применение непрерывных методов нелинейной фильтрации. Однако применение этих методов затруднено, так как, во-первых, они плохо приспособлены для реализации на цифровых (дискретных) ЭВМ, что приводит к большому времени вычислений, а во-вторых, что весьма существенно, предполагают наличие в канале наблюдения ошибок типа «непрерывного» белого шума.

Дискретные методы фильтрации достаточно просто реализуются на цифровых ЭВМ, легко учитывают временную коррелированность ошибок в канале наблюдения, сохраняют работоспособность для точных наблюдений. В последнем случае предполагается наличие случайных возмущений, действующих на испытываемую систему.

При идентификации непрерывных линейных систем можно использовать дискретные методы нелинейной фильтрации, если предварительно преобразовать их непрерывные модели в эквивалентные дискретные [3]. Весьма важно при этом получить аналитическую зависимость параметров эквивалентной дискретной модели от идентифицируемых параметров непрерывной системы. Последнее обстоятельство обычно выполнимо только лишь для систем малой размерности.

Для нелинейных непрерывных систем не существует общих методов построения эквивалентных дискретных моделей.

В публикуемой работе предлагается дискретно-непрерывный метод идентификации непрерывных систем, не требующий построения их эквивалентных дискретных моделей. В основу такой идентификации положена дискретная нелинейная фильтрация по методу инвариантного погружения [2].

1. Пусть динамическая система описывается разностным уравнением

$$x_{k+1} = \Phi[x_k, k] + \Theta[x_k, k]w_k \quad (1.1)$$

$$M[w_k] = 0, M[w_k w_j^T] = R_w(k) \delta(k-j) \quad (k, j = 0, 1, \dots)$$

где x_k — n -мерный вектор состояния системы, Φ — n -мерная векторная функция, Θ — матрица размером $n \times m$, w_k — m -мерный нормальный вектор случайных возмущений, $R_w(k)$ — корреляционная матрица вектора w_k .

Уравнение наблюдений имеет вид

$$z_k = h[x_k, k] + e_k, \quad M[e_k] = 0 \quad (1.2)$$

$$M[e_k e_j^T] = R_e(k) \delta(k-j), \quad M[w_k e_j^T] = 0 \quad (k, j=0, 1, \dots)$$

Здесь z_k — r -мерный вектор наблюдений, h — r -мерная дважды дифференцируемая по x_k векторная функция, e_k — r -мерный нормальный вектор ошибок наблюдений, $R_e(k)$ — корреляционная матрица вектора e_k .

Начальное состояние системы (1.1) определяется нормальным случайным вектором x_0 , причем $x_0 \in N(m_0, V_0)$, где m_0 и V_0 — математическое ожидание и корреляционная матрица вектора x_0 .

Необходимо по наблюдениям z_1, z_2, \dots, z_N определить оценки состояния x_0, x_1, \dots, x_N .

Функционирование системы (1.1) на отрезке дискретного времени $k=0, 1, \dots, N$ при наблюдениях (1.2) полностью определяется совокупностью нормальных случайных векторов $x_0, w_0, w_1, \dots, w_{N-1}, e_1, e_2, \dots, e_N$. Функция правдоподобия этой совокупности имеет вид

$$p = A \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_0 - m_0)^T V_0^{-1} (x_0 - m_0) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (z_k - h[x_k, k])^T \times \right. \\ \left. \times R_e^{-1}(k) (z_k - h[x_k, k]) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} w_k^T R_w^{-1}(k) w_k \right\} \quad (1.3)$$

В соответствии с принципом максимума правдоподобия будем искать такие оценки последовательности $\{x_k\}$, которые обеспечивают максимум функции (1.3) и удовлетворяют уравнению системы (1.1). Отсюда следует, что искомые оценки должны минимизировать функционал J :

$$J = \frac{1}{2} (x_0 - m_0)^T V_0^{-1} (x_0 - m_0) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (z_k - h[x_k, k])^T R_e^{-1}(k) (z_k - h[x_k, k]) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} w_k^T R_w^{-1}(k) w_k - \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_{k+1} (x_{k+1} - \Phi[x_k, k] - \Theta[x_k, k] w_k) \quad (1.4)$$

где λ_k ($k=1, \dots, N$) — неопределенные множители Лагранжа.

Определим частные производные функционала J по векторным переменным x_k ($k=0, \dots, N$), w_k ($k=1, \dots, N$), λ_k ($k=1, \dots, N$) и приравняем их нулю. После алгебраических преобразований получим так называемую систему канонических уравнений и граничные условия для этой системы. Каноническая система определяет оценки сглаживания x_k^\vee ($k=1, \dots, N$):

$$x_{k+1} = \Phi[x_k^\vee, k] - \Theta[x_k^\vee, k] R_w(k) \Theta^T[x_k^\vee, k] \Psi^{-1} \lambda_k \\ \lambda_{k+1} = \Psi^{-1} \lambda_k + \frac{\partial h^T[x_{k+1}^\vee, k+1]}{\partial x_{k+1}^\vee} R_e^{-1}(k+1) \{z_{k+1} - h[x_{k+1}^\vee, k+1]\} \\ \Psi = \frac{\partial \Phi^T[x_k^\vee, k]}{\partial x_k^\vee} + \frac{\partial (\Theta[x_k^\vee, k] w_k)^T}{\partial x_k^\vee}, \quad w_k^\vee = -R_w(k) \Theta^T(x_k^\vee, k) \Psi^{-1} \lambda_k \quad (1.5)$$

Граничное условие для первого уравнения системы (1.5) определяется соотношением

$$\mathbf{V}_0^{-1}(\mathbf{x}_0^{\sim} - \mathbf{m}_0) - \Psi^T(0) \frac{\partial \mathbf{h}^T[\mathbf{x}_1^{\sim}, 1]}{\partial \mathbf{x}_1^{\sim}} \mathbf{R}_e^{-1}(1) \{z_1 - \mathbf{h}[\mathbf{x}_1^{\sim}, 1]\} + \Psi^T(0) \lambda_1 = 0$$

а граничное условие для второго ее уравнения — соотношением $\lambda_N = 0$.

Решить систему (1.5) достаточно сложно, так как граничное условие для первого уравнения определено на левом конце интервала наблюдения, а для второго — на правом.

В [2] на основе известного метода оптимизации — метода инвариантного погружения — предложено приближенное решение канонической системы, определяющее рекуррентные соотношения нелинейной фильтрации состояния системы (1.1) по наблюдениям (1.2).

Вычислительная процедура состоит в последовательном выполнении на каждом шаге фильтрации следующих операций: вычисление прогноза состояния на шаг вперед $\mathbf{x}_{k+1|k}^{\sim} = \Phi[\mathbf{x}_k^{\sim}, k]$; вычисление приближенной корреляционной матрицы ошибки прогноза

$$\mathbf{V}_{k+1|k} = \frac{\partial \Phi[\mathbf{x}_k^{\sim}, k]}{\partial \mathbf{x}_k^{\sim}} \mathbf{V}_k \frac{\partial \Phi^T[\mathbf{x}_k^{\sim}, k]}{\partial \mathbf{x}_k^{\sim}} + \Theta[\mathbf{x}_k^{\sim}, k] \mathbf{R}_w(k) \Theta^T[\mathbf{x}_k^{\sim}, k]$$

определение матрицы наблюдений \mathbf{H}_{k+1} из уравнения

$$\mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{R}_e^{-1}(k+1) \mathbf{H}_{k+1} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{k+1|k}^{\sim}} \left(\frac{\partial \mathbf{h}^T[\mathbf{x}_{k+1|k}^{\sim}, k+1]}{\partial \mathbf{x}_{k+1|k}^{\sim}} \mathbf{R}_e^{-1}(k+1) \times \right. \\ \left. \times \{z_{k+1} - \mathbf{h}[\mathbf{x}_{k+1|k}^{\sim}, k+1]\} \right)$$

вычисление корреляционной матрицы ошибки фильтрации

$$\mathbf{V}_{k+1} = \mathbf{V}_{k+1|k} - \mathbf{V}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{V}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_e(k+1))^{-1} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{V}_{k+1|k}$$

вычисление коэффициента усиления

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{V}_{k+1} \frac{\partial \mathbf{h}^T[\mathbf{x}_{k+1|k}^{\sim}, k+1]}{\partial \mathbf{x}_{k+1|k}^{\sim}} \mathbf{R}_e^{-1}(k+1)$$

вычисление текущей оценки вектора состояния

$$\mathbf{x}_{k+1}^{\sim} = \mathbf{x}_{k+1|k}^{\sim} + \mathbf{K}_{k+1} \{z_{k+1} - \mathbf{h}[\mathbf{x}_{k+1|k}^{\sim}, k+1]\}$$

На первом шаге алгоритма фильтрации полагается $\mathbf{x}_0^{\sim} = \mathbf{m}_0$.

Составной индекс $k+1|k$ в обозначении прогноза $\mathbf{x}_{k+1|k}^{\sim}$ состояния системы на $k+1$ -м шаге дискретного времени показывает, что для вычисления прогноза используются измерения только до z_k включительно. Индекс $k+1$ в обозначении оценки \mathbf{x}_{k+1}^{\sim} подчеркивает, что для ее вычисления использованы все измерения до z_{k+1} включительно.

Если уравнение наблюдений линейно

$$z_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + e_k \quad (1.6)$$

то алгоритм дискретной нелинейной фильтрации, предложенный в [2], может быть значительно упрощен. Нетрудно показать, что в этом случае алгоритм будет содержать следующие вычислительные операции:

вычисление прогноза вектора состояния

$$\mathbf{x}_{k+1|k} = \Phi[\mathbf{x}_k, k] \quad (1.7)$$

вычисление приближенной корреляционной матрицы ошибки прогноза

$$\mathbf{V}_{k+1|k} = \frac{\partial \Phi[\mathbf{x}_k, k]}{\partial \mathbf{x}_k} \mathbf{V}_k \frac{\partial \Phi^T[\mathbf{x}_k, k]}{\partial \mathbf{x}_k} + \Theta[\mathbf{x}_k, k] \mathbf{R}_w(k) \Theta^T[\mathbf{x}_k, k] \quad (1.8)$$

вычисление коэффициента усиления

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{V}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{V}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_e(k+1))^{-1}$$

вычисление корреляционной матрицы ошибки фильтрации

$$\mathbf{V}_{k+1} = (\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} - \mathbf{I}) \mathbf{V}_{k+1|k} (\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} - \mathbf{I})^T + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{R}_e(k+1) \mathbf{K}_{k+1}^T$$

вычисление текущей оценки вектора состояния

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1|k})$$

где \mathbf{I} — единичная матрица соответствующей размерности.

Рассмотрим задачу согласования данного алгоритма дискретной нелинейной фильтрации с непрерывными уравнениями идентифицируемой системы.

2. Объединим уравнение идентифицируемой непрерывной системы с уравнением для оцениваемых параметров

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{a}, t) + \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{a}' = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

Здесь \mathbf{y} — p -мерный вектор состояния системы, \mathbf{a} — q -мерный вектор оцениваемых параметров, $\mathbf{w}(t)$ — белый нормальный шум с нулевым средним и матрицей интенсивности \mathbf{S}_w .

Пусть n -мерный вектор \mathbf{x} обобщает состояние системы (2.1):

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix}, \quad n = p + q$$

Будем полагать, что белый шум $\mathbf{w}(t)$ задает не только случайные возмущения, действующие на идентифицируемую систему, но и случайные ошибки в канале наблюдений. Следовательно, вектор \mathbf{y} содержит также переменные состояния формирующего фильтра ошибок наблюдений, а уравнение наблюдений детерминировано и в линейном случае имеет вид

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{H}(t) \mathbf{x}(t) \quad (2.2)$$

где \mathbf{z} — r -мерный вектор наблюдений, $\mathbf{H}(t)$ — матрица наблюдений размером $r \times n$.

Пусть наблюдения производятся в дискретные моменты времени t_k ($k=1, 2, \dots$) с постоянным шагом $T = t_{k+1} - t_k$.

В соответствии с (2.2) дискретное уравнение наблюдений будет иметь вид

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{z}_k = \mathbf{z}(t_k), \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k), \quad \mathbf{H}_k = \mathbf{H}(t_k) \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) соответствует уравнению (1.6) дискретной нелинейной фильтрации при $\mathbf{R}_e(k) = \mathbf{0}$ ($k=1, 2, \dots$).

Определим прогноз состояния системы (2.1) на момент времени t_{k+1} , если известна оценка \tilde{x}_k ее состояния на момент t_k :

$$\tilde{x}_k = \begin{pmatrix} \tilde{y}(t_k) \\ \tilde{a}(t_k) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Наилучший прогноз в смысле минимума дисперсии ошибки прогноза определяется математическим ожиданием вектора \tilde{x}_{k+1} . Следовательно, для вычисления прогноза необходимо решить на отрезке времени $[t_k, t_{k+1}]$ систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\tilde{y}} = M[f(\tilde{y}, \tilde{a}, t)], \quad \dot{\tilde{a}} = 0 \quad (2.5)$$

с начальными условиями (2.4), где M — символ операции вычисления математического ожидания.

Точное решение системы (2.5) приводит к весьма сложному в вычислительном отношении уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова. Найдем приближенное решение системы (2.5). Для этого разложим функцию $f(\tilde{y}, \tilde{a}, t)$ в ряд Тейлора относительно оценок $\tilde{y}(t)$ и $\tilde{a}(t)$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Ограничившись в разложении членами первого порядка, получим

$$\dot{\tilde{y}} = f(\tilde{y}, \tilde{a}, t), \quad \dot{\tilde{a}} = 0 \quad (2.6)$$

Система (2.6) нелинейна. Ее решение на отрезке времени $[t_k, t_{k+1}]$ с начальными условиями (2.4) определяет прогноз состояния системы (2.1) в момент t_{k+1} :

$$\tilde{x}_{k+1|k} = \begin{pmatrix} \tilde{y}(t_{k+1} | t_k) \\ \tilde{a}(t_{k+1} | t_k) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Решение системы (2.6) эквивалентно выполнению операции (1.7) дискретного алгоритма нелинейной фильтрации.

Определим далее корреляционную матрицу ошибки прогноза. Для этого используем приближение как и при вычислении прогноза $\tilde{x}_{k+1|k}$, т. е. линеаризуем систему (2.1) относительно оценок $\tilde{y}(t)$ и $\tilde{a}(t)$ при $t \in [t_k, t_{k+1}]$. В результате получим

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}} &= f(\tilde{y}, \tilde{a}, t) + \frac{\partial f(\tilde{y}, \tilde{a}, t)}{\partial \tilde{y}} (\tilde{y} - \tilde{y}) + \frac{\partial f(\tilde{y}, \tilde{a}, t)}{\partial \tilde{a}} (\tilde{a} - \tilde{a}) + w(t) \\ \dot{\tilde{a}} &= 0 \end{aligned}$$

Почленно вычитая из уравнений данной системы уравнения (2.6), найдем

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}^\circ &= \frac{\partial f(\tilde{y}, \tilde{a}, t)}{\partial \tilde{y}} \tilde{y}^\circ + \frac{\partial f(\tilde{y}, \tilde{a}, t)}{\partial \tilde{a}} \tilde{a}^\circ + w(t) \\ \tilde{a}^\circ &= 0, \quad \tilde{y}^\circ = \tilde{y} - \tilde{y}, \quad \tilde{a}^\circ = \tilde{a} - \tilde{a} \end{aligned} \quad (2.8)$$

где \tilde{y}° и \tilde{a}° — ошибки прогноза состояния идентифицируемой системы и ее параметров.

Для линейной непрерывной системы (2.8) можно записать эквивалентную дискретную систему, если предварительно вычислить переходную матрицу $F(t_{k+1}, t_k)$ и корреляционную матрицу $V_w(t_{k+1}, t_k)$ дискретного шума w_k . Переходная матрица $F(t_{k+1}, t_k)$ определяется из решения на отрезке времени $[t_k, t_{k+1}]$ однородного дифференциального уравнения

$$dF(t, t_k)/dt = A(t)F(t, t_k) \quad (2.9)$$

при единичных начальных условиях: $F(t_k, t_k) = I_{(n \times n)}$.

Матрица $A(t)$ в соответствии с уравнением (2.8) имеет следующий вид:

$$A(t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f(y^\sim, a^\sim, t)}{\partial y^\sim} & \frac{\partial f(y^\sim, a^\sim, t)}{\partial a^\sim} \\ \mathbf{0}_{(q \times p)} & \mathbf{0}_{(q \times q)} \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

Упростим нахождение переходной матрицы $F(t_{k+1}, t_k)$, учитывая структуру матрицы $A(t)$. Легко показать, что матрица $F(t_{k+1}, t_k)$ может быть разбита на блоки

$$F(t_{k+1}, t_k) = \begin{vmatrix} F_1(t_{k+1}, t_k)_{(p \times n)} \\ \mathbf{0}_{(q \times p)} & I_{(q \times q)} \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

где матрица $F_1(t_{k+1}, t_k)$ — решение уравнения

$$\frac{dF_1(t, t_k)}{dt} = \frac{\partial f(y^\sim, a^\sim, t)}{\partial y^\sim} F_1(t, t_k) + \mathbf{0}_{(p \times p)} \frac{\partial f(y^\sim, a^\sim, t)}{\partial a^\sim} \quad (2.12)$$

для момента времени $t=t_{k+1}$ при начальных условиях

$$F_1(t_k, t_k) = \begin{vmatrix} I_{(p \times p)} & \mathbf{0}_{(p \times q)} \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

Корреляционная матрица $V_w(t_{k+1}, t_k)$ дискретного шума w_k находится из решения уравнения

$$\frac{dV_w(t, t_k)}{dt} = \frac{\partial f(y^\sim, a^\sim, t)}{\partial y^\sim} V_w(t, t_k) + V_w(t, t_k) \frac{\partial f^T(y^\sim, a^\sim, t)}{\partial y^\sim} + S_w \quad (2.14)$$

для момента времени $t=t_{k+1}$ при нулевых начальных условиях: $V_w(t_k, t_k) = \mathbf{0}_{(p \times p)}$.

Эквивалентная дискретная система для ошибок прогноза имеет вид

$$\begin{vmatrix} y_{k+1|k}^\circ \\ a_{k+1|k}^\circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1(t_{k+1}, t_k) \\ \mathbf{0}_{(q \times p)} & I_{(q \times q)} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} y_k^\circ \\ a_k^\circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} w_k \\ \mathbf{0} \end{vmatrix} \quad (2.15)$$

В соответствии с уравнением (2.15) можно теперь записать рекуррентное соотношение для вычисления корреляционной матрицы $V_{k+1|k}$ ошибки прогноза

$$V_{k+1|k} = F(t_{k+1}, t_k) V_k F^T(t_{k+1}, t_k) + \begin{vmatrix} V_w(t_{k+1}, t_k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix} \quad (2.16)$$

Здесь V_k — корреляционная матрица ошибки фильтрации на k -м шаге алгоритма.

Уравнение (2.16) соответствует уравнению (1.8) дискретного алгоритма нелинейной фильтрации.

Заметим, что уравнения (2.12) и (2.14) должны решаться совместно с уравнением (2.6). Их решение производится численно, например методом Рунге — Кутты. Так как величина T отрезка времени интегрирования мала, то число шагов интегрирования на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ обычно не превышает двух.

Запишем последовательность вычислительных операций дискретно-непрерывного метода идентификации вектора параметров a непрерывного объекта вида $dy/dt = f(y, a, t) + w(t)$ при дискретных наблюдениях

$$z_k = H_k x_k, \quad x_k = \begin{vmatrix} y(t_k) \\ a(t_k) \end{vmatrix}$$

1. Вычисление прогноза вектора состояния $\tilde{y}(t_{k+1}|t_k)$, блока переходной матрицы $F_1(t_{k+1}, t_k)$ и корреляционной матрицы $V_w(t_{k+1}, t_k)$ дискретного шума совместным решением следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{y}}{dt} &= f(\tilde{y}, \tilde{a}, t) \\ \frac{dF_1(t, t_k)}{dt} &= \frac{\partial f(\tilde{y}, \tilde{a}, t)}{\partial \tilde{y}} F_1(t, t_k) + \left\| 0 \quad \frac{\partial f(\tilde{y}, \tilde{a}, t)}{\partial \tilde{a}} \right\| \\ \frac{dV_w(t, t_k)}{dt} &= \frac{\partial f(\tilde{y}, \tilde{a}, t)}{\partial \tilde{y}} V_w(t, t_k) + V_w(t, t_k) \times \frac{\partial f^T(\tilde{y}, \tilde{a}, t)}{\partial \tilde{y}} + S_w \end{aligned} \quad (2.17)$$

Система (2.17) решается на отрезке $t \in [t_k, t_{k+1}]$ при начальных условиях $\tilde{y}(t_k) = \tilde{y}_k$, $F_1(t_k, t_k) = [I \ 0]$, $V_w(t_k, t_k) = 0$. При решении системы (2.17) полагается, что $\tilde{a}(t) = \tilde{a}(t_k) = \tilde{a}_k$ при $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Решение первого уравнения системы (2.17) определяет прогноз $\tilde{x}_{k+1|k}$ объединенного вектора состояния и параметров

$$\tilde{x}_{k+1|k} = \begin{Bmatrix} \tilde{y}(t_{k+1}|t_k) \\ \tilde{a}(t_k) \end{Bmatrix}$$

2. Вычисление корреляционной матрицы ошибки прогноза

$$\begin{aligned} V_{k+1|k} &= F(t_{k+1}, t_k) V_k F^T(t_{k+1}, t_k) + Q \\ F(t_{k+1}, t_k) &= \begin{Bmatrix} F_1(t_{k+1}, t_k) \\ 0 \quad I \end{Bmatrix}, \quad Q = \begin{Bmatrix} V_w(t_{k+1}, t_k) & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

3. Вычисление матричного коэффициента усиления

$$K_{k+1} = V_{k+1|k} H_{k+1}^T (H_{k+1} V_{k+1|k} H_{k+1}^T)^{-1}$$

4. Вычисление корреляционной матрицы ошибки фильтрации

$$V_{k+1} = (K_{k+1} H_{k+1} - I) V_{k+1|k} (K_{k+1} H_{k+1} - I)^T$$

5. Вычисление текущей оценки вектора состояния и параметров

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_{k+1|k} + K_{k+1} (z_{k+1} - H_{k+1} \tilde{x}_{k+1|k})$$

Сделаем два замечания, первое из которых касается устойчивости метода.

Приведенный выше алгоритм идентификации можно рассматривать в общем случае как алгоритм нелинейной фильтрации. Если применить его к оценке состояния линейной динамической системы, то нетрудно показать его тождественность в этом случае линейному фильтру Калмана. Поскольку фильтр Калмана при выполнении известных предположений определяет несмещенные и эффективные оценки, то можно сделать вывод об устойчивости рассмотренного метода идентификации в малом. Это значит, что устойчивость метода сохраняется только лишь при ограниченных значениях входных сигналов системы.

Во-вторых, заметим, что при нелинейном уравнении наблюдений можно применять рассмотренный метод, если в качестве матрицы наблюдений

использовать линеаризованное выражение функции наблюдения $h[y, a, t]$:

$$H_{k+1} = \left\| \frac{\partial h[y^{\sim}(t_{k+1}|t_k), a^{\sim}(t_{k+1}|t_k), t_{k+1}]}{\partial x^{\sim}(t_{k+1}|t_k)} \right\|_{(r \times n)}$$

$$x^{\sim}(t_{k+1}|k) = \tilde{x}_{k+1|k}$$

3. Рассмотрим идентификацию нелинейной непрерывной системы вида

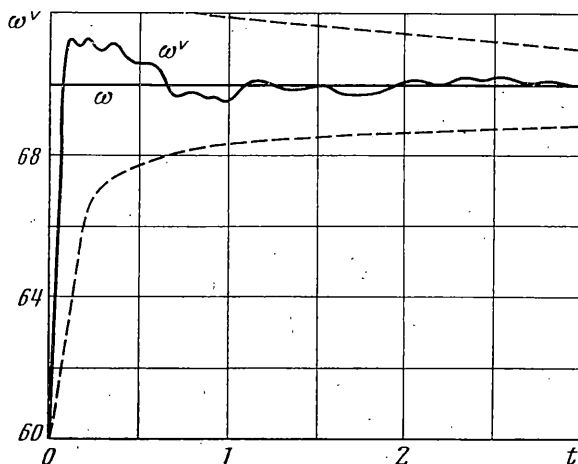
$$\begin{aligned} y_1^{\cdot} &= y_2, & y_2^{\cdot} &= -\omega^2 y_1 - 2\xi \frac{\omega}{\alpha} \arctg(\alpha y_2) + \omega^2 u(t) \\ y_3^{\cdot} &= -\mu y_3 + w(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $u(t)$ — входной сигнал системы, а $w(t)$ — белый шум с нулевым средним и интенсивностью $S_w = 2\mu\sigma^2$. Параметры ω , ξ и α подлежат идентификации, параметры μ и σ известны.

В дискретные моменты времени $t_k = kT$ ($k=1, 2, \dots, N$) наблюдается линейная функция состояния системы (3.1) вида $z_k = y_1(k) \cup y_3(k)$. Входной сигнал $u(t)$ наблюдается точно.

Система (3.1) отличается от линейной системы тем, что сила демпфирования не пропорциональна скорости изменения выходной координаты y_1 , а имеет вид характеристики с насыщением.

Для отработки режима идентификации системы (3.1) был выполнен на ЭВМ численный эксперимент. Система моделировалась при следующих



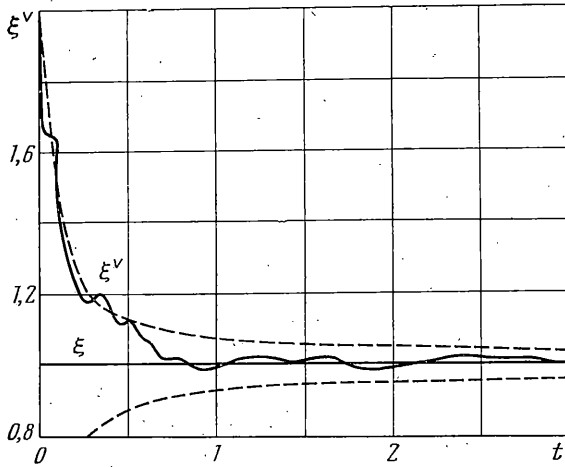
Фиг. 1

значениях параметров: $\omega = 70 \text{ с}^{-1}$, $\xi = 1$, $\alpha = 0,05 \text{ с}$, $\mu = 50 \text{ с}^{-1}$, $\sigma = 0,015$. Наблюдения выполнялись в течение трех секунд с шагом дискретности $T = 0,005 \text{ с}$. Входной сигнал $u(t)$ подавался с выхода формирующего фильтра с передаточной функцией

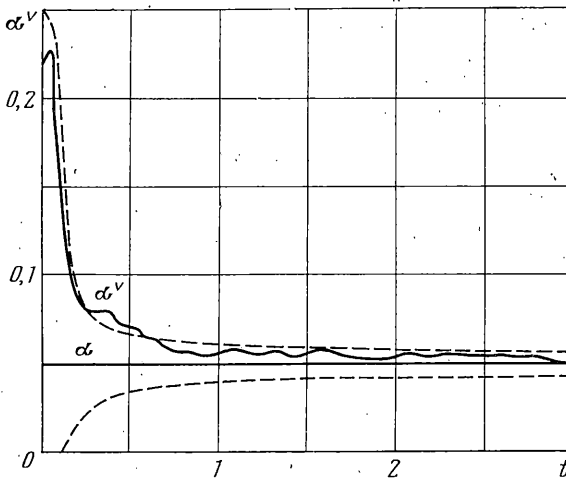
$$W_u(p) = 1/(p^2 + 2\xi_u \omega_u p + \omega_u^2)$$

на вход которого действовал непрерывный белый шум с интенсивностью $S_u = 4\xi_u \omega_u^3 \sigma_u^2$. Параметры фильтра $\omega_u = 40 \text{ с}^{-1}$, $\xi_u = 0,6$, $\sigma_u = 0,4$. Априорные оценки параметров были заданы следующими значениями: $\omega^{\sim} = 60 \text{ с}^{-1}$, $\xi^{\sim} = 2$, $\alpha^{\sim} = 0,20 \text{ с}$.

Процесс идентификации системы (3.1) с помощью дискретно-непрерывного метода, изложенного в п. 2, показан на фиг. 1–3 (по осям отложены размерные величины). Здесь же пунктиром обозначены доверительные



Фиг. 2



Фиг. 3

интервалы оценок по уровню двух среднеквадратичных отклонений ошибок оценивания. Графики изменения оценок показывают, что идентификация выполняется достаточно эффективно и в течение трех секунд практически заканчивается. Время численного моделирования на ЭВМ ЕС-1022 составило три минуты.

Заметим, что при заданном времени наблюдения эффективность идентификации зависит от интенсивности и частотных свойств входного сигнала, а также от уровня ошибок наблюдения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Задачи механики в десятой пятилетке.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2, с. 3.
2. Сейдж Э. П., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976. 495 с.
3. Острем К. Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973. 321 с.

Поступила в редакцию
16.IX.1980