МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1981

УДК 531.55:521.1

ЗАДАЧА О РАЗДЕЛЕНИИ ДВИЖЕНИЙ В ДИНАМИКЕ ПОЛЕТА

БОРЗОВ В. И.

Исследованию задач динамики полета посвящена обширная литература [1–3]. В большинстве работ из физических соображений проводится упрощение уравнений движения. Точность получающихся математических моделей и интервал времени при этом обычно не обсуждаются.

В публикуемой работе при некоторых общих предположениях о характере движения тяжелых летательных аппаратов рассматривается задача о разделении движений. В результате введения малого параметра и перехода к медленному безразмерному времени исходная система дифференциальных уравнений преобразовывается к системе уравнений с малым параметром при части производных. Показана возможность применения методов исследования систем с сингулярными возмущениями [4], получены системы дифференциальных уравнений короткопериодического и длиннопериодического движений летательного аппарата.

Положение центра масс летательного аппарата относительно Земли будем определять квазисферическими координатами λ, φ, r. Здесь λ — долгота, φ — геоцентрическая широта, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор центра масс. В центре масс поместим начало системы координат $Mx_0y_0z_0$, оси которой направлены следующим образом: ось y_0 по геоцентрическому радиус-вектору r, ось x_0 лежит в плоскости меридиана и направлена в сторону Северного полюса, ось z_0 направлена к Востоку. Ориентация траекторной системы координат $x_cy_cz_c$ относительно $x_0y_0z_0$ определяется [3] углами скоростного ψ_c курса и наклона траектории θ. Последовательность поворотов задается следующей схемой:

$$x_0y_0z_0 \xrightarrow[y_0]{\psi_c} x_0^\circ y_0^\circ z_0^\circ \xrightarrow[z_0^\circ]{\theta} x_cy_cz_c$$

Здесь над стрелкой указан угол, а под стрелкой — ось, вокруг которой совершается поворот. В траекторной системе координат вектор путевой скорости $\mathbf{V}$ (скорости по отношению к Земле) направлен по оси x_c.

Если не учитывать деформацию корпуса летательного аппарата, то уравнения движения можно записать в виде уравнений движения центра масс и уравнений движения вокруг центра масс: $m\mathbf{W}=\mathbf{F}$, $d\mathbf{G}/dt=\mathbf{M}$. Здесь m — масса аппарата, $\mathbf{W}$ — абсолютное ускорение центра масс, $\mathbf{G}$ — момент количества движения, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M}$ — действующие на него силы и моменты.

В проекциях на оси траекторной системы ускорение центра масс записывается так:

$$\begin{gathered}W_{x_c}=V^{\cdot}+u^2r\cos\varphi(\cos\theta\cos\psi_c\sin\varphi-\sin\theta\cos\varphi)\\ W_{y_c}=V\theta^{\cdot}-(V^2/r)\cos\theta+2uV\sin\psi_c\cos\varphi-\\ -u^2r\cos\varphi(\sin\theta\cos\psi_c\sin\varphi+\cos\varphi\cos\theta) \qquad (1)\\ W_{z_c}=-V\cos\theta\psi_c^{\cdot}+(V/r)^2\cos^2\theta\sin\psi_c\operatorname{tg}\varphi+2uV(\sin\theta\cos\varphi\cos\psi_c-\\ -\cos\theta\sin\varphi)+u^2r\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi_c, \qquad (\cdot)=d/dt\end{gathered}$$

где u — угловая скорость вращения Земли. Кинематические уравнения движения центра масс записываются в виде

$$r^{\bullet}=V\sin\theta,\quad \varphi^{\bullet}=\left(\frac{V}{r}\right)\cos\theta\cos\psi_c,\quad \lambda^{\bullet}=-\frac{V\cos\theta\sin\psi_c}{r\cos\varphi} \tag{2}$$

Величина радиус-вектора центра масс с точностью до e^2 определяется из выражения [5]:

$$r=a(1+h/a-{}^1/_2e^2\sin^2\varphi) \tag{3}$$

где a — большая полуось Земли (a=6,3782·10^6 м), e^2 — квадрат первого эксцентриситета земного эллипсоида (e^2=0,669·10^{-2}), h — высота полета (расстояние от центра масс до поверхности земного эллипсоида). Выражение (3) справедливо с указанной точностью до высот порядка 40 км.

Уравнения движения вокруг центра масс составляются относительно поступательно перемещающейся системы координат в проекциях на оси системы $Mxyz$, жестко связанной с корпусом аппарата. Ориентация системы координат $Mxyz$ относительно траекторной системы задается следующей схемой:

$$x_cy_cz_c\xrightarrow[x_c]{\gamma}x^\circ y^\circ z^\circ\xrightarrow[y^\circ]{\beta}x_ny_nz_n\xrightarrow[z_n]{\alpha}xyz$$

Здесь γ — угол скоростного крена, β — угол скольжения, α — угол атаки. Абсолютная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ определяется векторным соотношением

$$\boldsymbol{\omega}=\mathbf{u}+\boldsymbol{\lambda}^{\bullet}+\boldsymbol{\varphi}^{\bullet}+\boldsymbol{\psi}_c^{\bullet}+\boldsymbol{\theta}^{\bullet}+\boldsymbol{\gamma}^{\bullet}+\boldsymbol{\beta}^{\bullet}+\boldsymbol{\alpha}^{\bullet}=\boldsymbol{\omega}_c+\boldsymbol{\gamma}^{\bullet}+\boldsymbol{\beta}^{\bullet}+\boldsymbol{\alpha}^{\bullet}$$

$$\boldsymbol{\omega}_c=\mathbf{u}+\boldsymbol{\lambda}^{\bullet}+\boldsymbol{\varphi}^{\bullet}+\boldsymbol{\psi}_c^{\bullet}+\boldsymbol{\theta}^{\bullet}$$

где $\boldsymbol{\omega}_c$ — абсолютная угловая скорость траекторной системы координат. Для простоты считаем, что главные оси инерции аппарата совпадают с осями системы xyz и в процессе движения моменты инерции не изменяются. Уравнения движения вокруг центра масс в этом случае записываются в виде

$$(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})^{\bullet}+[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}]=\mathbf{M},\qquad \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}=(I_x\omega_x,\ I_y\omega_y,\ I_z\omega_z) \tag{4}$$

где $\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ — вектор момента количества движения, заданный своими проекциями на оси xyz.

Проекции абсолютной угловой скорости летательного аппарата на оси системы xyz имеют вид

$$\begin{aligned}
\omega_x&=\omega_{cx}+\gamma^{\bullet}\cos\beta\cos\alpha+\beta^{\bullet}\sin\alpha\\
\omega_y&=\omega_{cy}-\gamma^{\bullet}\cos\beta\sin\alpha+\beta^{\bullet}\cos\alpha\\
\omega_z&=\omega_{cz}+\gamma^{\bullet}\sin\beta+\alpha^{\bullet}
\end{aligned} \tag{5}$$

и ω_{cx}, ω_{cy}, ω_{cz} — проекции абсолютной угловой скорости траекторной системы координат на оси системы xyz. Представим $\boldsymbol{\omega}_c$ в виде суммы $\boldsymbol{\omega}_c=\boldsymbol{\omega}^0+\boldsymbol{\Omega}$, где $\boldsymbol{\omega}^0=\mathbf{u}+\boldsymbol{\lambda}^{\bullet}+\boldsymbol{\varphi}^{\bullet}$ и $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\psi}_c^{\bullet}+\boldsymbol{\theta}^{\bullet}$. Проекции этих составляющих на оси системы xyz:

$$\begin{aligned}
\omega_x^\circ&=\omega_1\cos\beta\cos\alpha+\omega_2(\cos\gamma\sin\alpha+\sin\gamma\sin\beta\cos\alpha)+\\
&+\omega_3(\sin\gamma\sin\alpha-\cos\gamma\sin\beta\cos\alpha)\\
\omega_y^\circ&=-\omega_1\cos\beta\sin\alpha+\omega_2(\cos\gamma\cos\alpha-\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha)+\\
&+\omega_3(\sin\gamma\cos\alpha+\cos\gamma\sin\beta\sin\alpha)\\
\omega_z^\circ&=\omega_1\sin\beta-\omega_2\sin\gamma\cos\beta+\omega_3\cos\gamma\cos\beta
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\omega_1 = (u+\lambda^\cdot)(\cos\varphi\cos\theta\cos\psi_c+\sin\varphi\sin\theta)-\varphi^\cdot\cos\theta\sin\psi_c$$

$$\omega_2 = (u+\lambda^\cdot)(\sin\varphi\cos\theta-\cos\varphi\sin\theta\cos\psi_c)+\varphi^\cdot\sin\theta\sin\psi_c$$

$$\omega_3 = (u+\lambda^\cdot)\cos\varphi\sin\psi_c+\varphi^\cdot\cos\psi_c$$

Для Ω_x, Ω_y, Ω_z имеем

$$\Omega_x=\psi_c^\cdot(\sin\theta\cos\beta\cos\alpha+\cos\theta\sin\gamma\sin\beta\cos\alpha+$$
$$+\cos\theta\cos\gamma\sin\alpha)+\theta^\cdot(\sin\gamma\sin\alpha-\cos\gamma\sin\beta\cos\alpha)$$

$$\Omega_y=\psi_c^\cdot(-\sin\theta\cos\beta\sin\alpha-\cos\theta\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha+\cos\theta\cos\gamma\cos\alpha)+$$
$$+\theta^\cdot(\cos\gamma\sin\beta\sin\alpha+\sin\gamma\cos\alpha)$$

$$\Omega_z=\psi_c^\cdot(\sin\theta\sin\beta-\cos\theta\sin\gamma\cos\beta)+\theta^\cdot\cos\gamma\cos\beta$$

Движение центра масс аппарата происходит под действием гравитационных сил $m\mathbf{g}$, силы тяги двигателей $\mathbf{P}$ и аэродинамических сил $\mathbf{A}=\mathbf{X}+\mathbf{Y}+\mathbf{Z}$, где $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ — соответственно силы сопротивления, подъемная и боковая.

Проекции вектора напряженности гравитационного поля Земли на оси системы $x_0y_0z_0$ с точностью до членов порядка e^2 равны [5]:

$$g_{x_0}=-g_e{}^1/_4e^2\sin2\varphi,\quad g_{z_0}=0$$

$$g_{y_0}=-g_e(1-2h/a+{}^1/_2e^2+{}^1/_4e^2\sin^2\varphi)$$

Здесь g_e=9,78049 м/с^2 — ускорение силы тяжести на экваторе. В проекциях на оси траекторной системы координат $x_cy_cz_c$ найдем

$$g_{x_c}=g_{x_0}\cos\theta\cos\psi_c+g_{y_0}\sin\theta$$

$$g_{y_c}=-g_{x_0}\sin\theta\cos\psi_c+g_{y_0}\cos\theta$$

$$g_{z_c}=g_{x_0}\sin\psi_c$$

Сила тяги двигателей P задается обычно в связанной системе координат, лежит в плоскости симметрии xy, составляет небольшой угол $\varkappa$ с продольной осью и направлена к носу аппарата.

Аэродинамические силы задаются обычно в полусвязанной системе координат $\mathbf{X}=-X\mathbf{i}_n$, $\mathbf{Y}=Y\mathbf{j}_n$, $\mathbf{Z}=Z\mathbf{k}_n$, где $\mathbf{i}_n$, $\mathbf{j}_n$, $\mathbf{k}_n$ — единичные орты полусвязанной системы $x_ny_nz_n$. Проекции сил, действующих на аппарат, на оси траекторной системы записываются так:

$$\begin{aligned}
F_{x_c}&=[-X+P\cos(\alpha+\varkappa)]\cos\beta+Z\sin\beta-{}^1/_4mg_ee^2\sin2\varphi\cos\theta\cos\psi_c-\\
&\quad-mg_e[1-2(h/a)+{}^1/_2e^2+{}^1/_4e^2\sin^2\varphi]\sin\theta\\
F_{y_c}&=[Y+P\sin(\alpha+\varkappa)]\cos\gamma+[-X+P\cos(\alpha+\varkappa)]\sin\beta\sin\gamma-Z\cos\beta\sin\gamma+\\
&\quad+{}^1/_4mg_ee^2\sin2\varphi\sin\theta\cos\psi_c-mg_e(1-2(h/a)+{}^1/_2e^2+{}^1/_2e^2\sin^2\varphi)\cos\theta\\
F_{z_c}&=[Y+P\sin(\alpha+\varkappa)]\sin\gamma-[-X+P\cos(\alpha+\varkappa)]\sin\beta\cos\gamma+\\
&\quad+Z\cos\beta\cos\gamma-mg_e{}^1/_4e^2\sin2\varphi\sin\psi_c
\end{aligned}\qquad(7)$$

Входящие в (7) аэродинамические силы вычисляются по формулам: $X={}^1/_2\rho V^2Sc_x$, $Y={}^1/_2\rho V^2Sc_y$, $Z={}^1/_2\rho V^2Sc_z$. Здесь ρ — плотность воздуха, S — характерная площадь летательного аппарата, c_x, c_y, c_z — безразмерные аэродинамические коэффициенты сил.

Моменты сил, действующих на аппарат, задаются в связанной системе координат и вычисляются по формулам

$$M_x={}^1/_2\rho V^2Slm_x,\qquad M_y={}^1/_2\rho V^2Slm_y,\qquad M_z={}^1/_2\rho V^2Sb_am_z \tag{8}$$

где l, b_a — характерные размеры (например, размах крыльев и средняя аэродинамическая хорда крыла соответственно), m_x, m_y, m_z — безразмерные аэродинамические коэффициенты моментов.

Соотношения (1), (4) совместно с (2), (3), (5), (7), (8) описывают достаточно широкий класс задач динамики полета. В дальнейшем будем рассматривать движение тяжелых летательных аппаратов [6], в процессе полета которых величина вектора перегрузки $n=|\mathbf{A}+\mathbf{P}|/mg_e$ порядка $1{,}5\div2$. К этому классу аппаратов относятся, например, пассажирские и транспортные самолеты, планеры и т. д. Для тяжелых аппаратов тяга двигателей $P<mg_e$. Ограничения по перегрузке накладывают ограничения и на маневренные свойства. Ускорение центра масс таких аппаратов — порядка нескольких м/с², таким образом, $F_i/m\sim a_1$ м/с², где $a_1\sim1$; угловые ускорения — порядка нескольких градусов в с², поэтому $M_i/I_0\sim a_2\cdot10^{-2}$ 1/с², где $a_2\sim1$, I_0 — характерное значение момента инерции (например, $I_0=\max(I_x, I_y, I_z)$).

Из практики известно, что существует два характерных движения летательных аппаратов, существенно отличающихся по временным характеристикам. Это сравнительно быстрые движения вокруг центра масс (постоянные времени T_1 порядка секунд) и медленные движения центра масс (постоянные времени T_2 порядка минут). В динамике полета эти движения получили наименование короткопериодических и длиннопериодических (фугоидных) [1—3]. Отношение постоянных времени этих движений порядка $T_1/T_2\sim10^{-2}$.

Преобразуем полученную систему дифференциальных уравнений. Возьмем в качестве малого параметра отношение постоянных времени $\varepsilon=10^{-2}$ и перейдем к медленному безразмерному времени $\tau=\varepsilon\nu t$, где $\nu=1$ с$^{-1}$. Оценим величины, входящие в уравнения. Скорость полета тяжелых аппаратов порядка нескольких сотен м/с. Следовательно, можно записать $V=V_\nu\varepsilon^{-1}\nu l$, где $l=1$ м и V_ν — величина порядка единицы. Угловую скорость вращения Земли можно записать в виде $u=u_\nu\varepsilon^2\nu$, где $u_\nu=0{,}729$. Квадрат первого эксцентриситета представляется в виде $e^2=e_\nu^2\varepsilon$ ($e_\nu^2=0{,}669$), большая полуось Земли — в виде $a=a_\nu\varepsilon^{-3}l$ ($a_\nu=6{,}3782$). В процессе полета высота h может достигать десятков километров. Поэтому можно записать $h=h_\nu l\varepsilon^{-2}$, $h_\nu\sim1$. Как следует из (3), имеет место соотношение $r=\varepsilon^{-3}la_\nu(1+\varepsilon h_\nu/a_\nu-{}^1/_2\varepsilon e_\nu^2\sin^2\varphi)$. С учетом введенных обозначений и оценок уравнения движения центра масс и кинематические уравнения (2) после перехода к безразмерному времени примут вид

$$\frac{d\varphi_\nu}{d\tau}=\frac{V_\nu}{a_\nu}\cos\theta\cos\psi_c\left(1-\varepsilon\frac{h_\nu}{a_\nu}+\varepsilon\frac{e_\nu^2}{2}\sin^2\varphi_0\right)$$

$$\frac{d\lambda_\nu}{d\tau}=-\frac{V_\nu\cos\theta\sin\psi_c}{a_\nu\cos\varphi_0}\left(1-\varepsilon\frac{h_\nu}{a_\nu}+\varepsilon\frac{e_\nu^2}{2}\sin^2\varphi_0\right)$$

$$\frac{dh_\nu}{d\tau}=V_\nu\sin\theta+\varepsilon\frac{e_\nu^2V_\nu}{2}\sin2\varphi_0\cos\theta\cos\psi_c$$

$$\frac{dV_\nu}{d\tau}=\frac{F_{x_c}}{ml\nu^2}-\varepsilon u_\nu^2a_\nu\cos\varphi_0(\cos\theta\cos\psi_c\sin\varphi_0-\sin\theta\cos\varphi_0)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau}=\frac{F_{y_c}}{ml\nu^2V_\nu}+\varepsilon\left[\frac{V_\nu}{a_\nu}\cos\theta-2u_\nu\sin\psi_c\cos\varphi_0+\right.$$

$$+\frac{u_\nu^2 a_\nu}{V_\nu}\cos\varphi_0(\sin\theta\cos\psi_c\sin\varphi_0+\cos\varphi_0\cos\theta)\Big] \tag{9}$$

$$\frac{d\psi_c}{d\tau}=-\frac{F_{z_c}}{ml\nu^2V_\nu\cos\theta}+\varepsilon\Big[\frac{V_\nu}{a_\nu}\cos\theta\sin\psi_c\operatorname{tg}\varphi_0+$$

$$+2u_\nu(\operatorname{tg}\theta\cos\varphi_0\cos\psi_c-\sin\varphi_0)+\frac{u_\nu^2a_\nu\sin2\varphi_0\sin\psi_c}{2V_\nu\cos\theta}\Big]$$

$$\varphi=\varphi_0+\varepsilon\varphi_\nu,\quad \lambda=\lambda_0+\varepsilon\lambda_\nu,\quad \varphi(0)=\varphi_0,\quad \lambda(0)=\lambda_0$$

В (9) отброшены члены порядка ε^2, поскольку с такой точностью задавалось гравитационное поле Земли и величина радиуса r.

Рассмотрим уравнения движения летательного аппарата вокруг центра масс. После перехода к безразмерному времени его абсолютная угловая скорость запишется в виде

$$\omega=\varepsilon\nu\left(\varepsilon\mathbf{u}_\nu+\varepsilon\frac{d\varphi_\nu}{d\tau}+\varepsilon\frac{d\lambda_\nu}{d\tau}+\frac{d\psi_c}{d\tau}+\frac{d\theta}{d\tau}+\frac{d\gamma}{d\tau}+\frac{d\beta}{d\tau}+\frac{d\alpha}{d\tau}\right)=\varepsilon\nu\omega_\nu \tag{10}$$

Соотношение (10) имеет место в том случае, если углы ψ_c, θ, α, β, γ изменяются на конечные величины. Это возможно, например, при разворотах с большими углами крена, энергичном наборе высоты и т. д. Довольно часто в динамике полета углы α, β, γ мало изменяются вблизи своих стационарных значений. В качестве примера можно указать движение на постоянной или медленно меняющейся высоте, развороты с малыми углами крена, движение по глиссаде и т. д. В этом случае $\gamma=\varepsilon\gamma_\nu$, $\alpha=\alpha_0+\varepsilon\alpha_\nu$, $\beta=\varepsilon\beta_\nu$, где α_ν, β_ν, γ_ν — величины порядка единицы. Кинематическое уравнение (10) в этом случае запишется следующим образом:

$$\omega=\varepsilon^2\nu\left(\mathbf{u}_\nu+\frac{d\varphi_\nu}{d\tau}+\frac{d\lambda_\nu}{d\tau}+\frac{d\alpha_\nu}{d\tau}+\frac{d\beta_\nu}{d\tau}+\frac{d\gamma_\nu}{d\tau}\right)+\varepsilon\nu\left(\frac{d\psi_c}{d\tau}+\frac{d\theta}{d\tau}\right)=\varepsilon\nu\omega_\nu \tag{11}$$

Уравнения движения вокруг центра масс после перехода к безразмерному времени запишутся в виде

$$\varepsilon^2\frac{d\mathbf{i}\omega_\nu}{d\tau}+\varepsilon^2[\omega_\nu\times\mathbf{i}\omega_\nu]=\frac{\mathbf{M}}{I_0\nu^2}=\varepsilon\mathbf{M}_\nu$$

Здесь $i\omega_\nu=I\omega_\nu/I_0$ — вектор с координатами $i\omega_\nu=(i_x\omega_x,\ i_y\omega_y,\ i_z\omega_z)$ и $i_x=I_x/I_0$, $i_y=I_y/I_0$, $i_z=I_z/I_0$. Таким образом, динамические уравнения движения вокруг центра масс записываются в виде уравнений с малым параметром при старшей производной

$$\begin{aligned}\varepsilon i_x\frac{d\omega_{x\nu}}{d\tau}&=M_{x\nu}-\varepsilon(i_z-i_y)\,\omega_{y\nu}\omega_{z\nu}\\ \varepsilon i_y\frac{d\omega_{y\nu}}{d\tau}&=M_{y\nu}-\varepsilon(i_x-i_z)\,\omega_{x\nu}\omega_{z\nu}\\ \varepsilon i_z\frac{d\omega_{z\nu}}{d\tau}&=M_{z\nu}-\varepsilon(i_y-i_x)\,\omega_{y\nu}\omega_{x\nu}\end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотрим кинематические уравнения (5), (6). Из (5) найдем

$$\alpha^\bullet=(\omega_z-\omega_{cz})+[(\omega_y-\omega_{cy})\sin\alpha-(\omega_x-\omega_{cx})\cos\alpha]\operatorname{tg}\beta$$

$$\beta^\bullet=(\omega_y-\omega_{cy})\cos\alpha+(\omega_x-\omega_{cx})\sin\alpha$$

$$\gamma^{\bullet}=1/\cos\beta\,[(\omega_x-\omega_{cx})\cos\alpha-(\omega_y-\omega_{cy})\sin\alpha]$$

С учетом векторных соотношений (10), (11) запишем кинематические уравнения для случая произвольных углов α, β, γ:

$$\begin{gathered} d\alpha/d\tau=(\omega_{z\nu}-\omega_{cz\nu})+[(\omega_{y\nu}-\omega_{cy\nu})\sin\alpha-(\omega_{x\nu}-\omega_{cx\nu})\cos\alpha]\operatorname{tg}\beta \\ d\beta/d\tau=(\omega_{y\nu}-\omega_{cy\nu})\cos\alpha+(\omega_{x\nu}-\omega_{cx\nu})\sin\alpha \\ d\gamma/d\tau=[(\omega_{x\nu}-\omega_{cx\nu})\cos\alpha-(\omega_{y\nu}-\omega_{cy\nu})\sin\alpha]/\cos\beta \end{gathered} \tag{13}$$

и для случая малых углов с точностью до членов порядка ε^2:

$$\begin{gathered} \varepsilon d\alpha_\nu/d\tau=\omega_{z\nu}-\omega_{cz\nu}+\varepsilon\beta_\nu[(\omega_{y\nu}-\omega_{cy\nu})\sin\alpha_0-(\omega_{x\nu}-\omega_{cx\nu})\cos\alpha_0] \\ \varepsilon d\beta_\nu/d\tau=(\omega_{y\nu}-\omega_{cy\nu})\cos\alpha_0+(\omega_{x\nu}-\omega_{cx\nu})\sin\alpha_0+ \\ +\varepsilon[-(\omega_{y\nu}-\omega_{cy\nu})\sin\alpha_0+(\omega_{x\nu}-\omega_{cx\nu})\cos\alpha_0]\alpha_\nu \\ \varepsilon d\gamma_\nu/d\tau=(\omega_{x\nu}-\omega_{cx\nu})\cos\alpha_0-(\omega_{y\nu}-\omega_{cy\nu})\sin\alpha_0- \\ -\varepsilon\alpha_\nu[(\omega_{x\nu}-\omega_{cx\nu})\sin\alpha_0+(\omega_{y\nu}-\omega_{cy\nu})\cos\alpha_0] \end{gathered} \tag{14}$$

Входящие в кинематические уравнения проекции угловой скорости траекторной системы координат определяются из (6).

При заданной структуре сил и моментов движение аппарата описывается системой дифференциальных уравнений (9), (12), (13) или (14). Как следует из этих уравнений, движение центра масс описывается системой уравнений с регулярными возмущениями, а динамические уравнения движения вокруг центра масс — системой с сингулярными возмущениями. Кинематические движения вокруг центра масс имеют либо регулярные (13), либо сингулярные (14) возмущения. Рассмотрим вариант движения с кинематическими уравнениями вида (14). В этом случае движение будет описываться уравнениями

$$\begin{gathered} \frac{dV_\nu}{d\tau}=\frac{F_{x_c}}{ml\nu^2}+\varepsilon g_1(V_\nu,\theta,\psi_c) \\ \frac{d\theta}{d\tau}=\frac{F_{y_c}}{ml\nu^2V_\nu}+\varepsilon g_2(V_\nu,\theta,\psi_c) \\ \frac{d\psi_c}{d\tau}=-\frac{F_{z_c}}{ml\nu^2V_\nu\cos\theta}+\varepsilon g_3(V_\nu,\theta,\psi_c) \\ \frac{d\lambda_\nu}{d\tau}=\frac{V_\nu\cos\theta\sin\psi_c}{a_\nu\cos\varphi_0}+\varepsilon g_4(V_\nu,\theta,\psi_c,h_\nu) \\ \frac{d\varphi_\nu}{d\tau}=\frac{V_\nu}{a_\nu}\cos\theta\cos\psi_c+\varepsilon g_5(V_\nu,\theta,\psi_c,h_\nu) \\ \frac{dh_\nu}{d\tau}=V_\nu\sin\theta+\varepsilon g_6(V_\nu,\theta,\psi_c) \\ \varepsilon i_x\frac{d\omega_{x\nu}}{d\tau}=M_{x\nu}+\varepsilon f_1(\omega_{x\nu},\omega_{y\nu},\omega_{z\nu}) \\ \varepsilon i_y\frac{d\omega_{y\nu}}{d\tau}=M_{y\nu}+\varepsilon f_2(\omega_{x\nu},\omega_{y\nu},\omega_{z\nu}) \end{gathered} \tag{15}$$

$$\varepsilon i_z \frac{d\omega_{zv}}{d\tau} = M_{zv} + \varepsilon f_3(\omega_{xv}, \omega_{yv}, \omega_{zv}) \qquad (16)$$

$$\varepsilon \frac{d\alpha_v}{d\tau} = \omega_{zv} - \frac{d\theta}{d\tau} + \varepsilon f_4^\circ (V_v, \theta, \psi_c, \alpha_v, \beta_v, \gamma_v)$$

$$\varepsilon \frac{d\beta_v}{d\tau} = \omega_{yv} \cos \alpha_0 + \omega_{xv} \sin \alpha_0 - \frac{d\psi_c}{d\tau} \cos \theta + \varepsilon f_5^\circ (V_v, \theta, \psi_c, \alpha_v, \beta_v, \gamma_v)$$

$$\varepsilon \frac{d\gamma_v}{d\tau} = \omega_{xv} \cos \alpha_0 - \omega_{yv} \sin \alpha_0 - \frac{d\psi_c}{d\tau} \sin \theta + \varepsilon f_6^\circ (V_v, \theta, \psi_c, \alpha_v, \beta_v, \gamma_v)$$

Или после подстановки $d\psi_c/d\tau$ и $d\theta/d\tau$ из (15)

$$\varepsilon \frac{d\alpha_v}{d\tau} = \omega_{zv} - \frac{F_{y_c}}{ml v^2 V_v} + \varepsilon f_4 (V_v, \theta, \psi_c, \alpha_v, \beta_v, \gamma_v)$$

$$\varepsilon \frac{d\beta_v}{d\tau} = \omega_{yv} \cos \alpha_0 + \omega_{xv} \sin \alpha_0 + \frac{F_{z_c}}{ml v^2 V_v} + \varepsilon f_5 (V_v, \theta, \psi_c, \alpha_v, \beta_v, \gamma_v)$$

$$\varepsilon \frac{d\gamma_v}{d\tau} = \omega_{xv} \cos \alpha_0 - \omega_{yv} \sin \alpha_0 + \frac{F_{z_c} \operatorname{tg} \theta}{ml v^2 V_v} + \varepsilon f_6 (V_v, \theta, \psi_c, \alpha_v, \beta_v, \gamma_v)$$

Вид функций g_i, f_i легко получить из сравнения (15), (16) с (9), (12), (14). Запишем (15), (16) в матричном виде

$$\frac{dx}{d\tau} = c(x, y) + \varepsilon g(x, y), \quad \varepsilon \frac{dy}{d\tau} = b(x, y) + \varepsilon f(x, y) \qquad (17)$$

$$x = (V_v, \theta, \psi_c, \lambda_v, \varphi_v, h_v)^T, \quad y = (\omega_{xv}, \omega_{yv}, \omega_{zv}, \alpha_v, \beta_v, \gamma_v)$$

Здесь x, y — вектор-столбцы медленных и быстрых переменных. Матрицы $c(x, y)$, $b(x, y)$, $g(x, y)$, $f(x, y)$ определяются в соответствии с (15), (16). Если даже углы α, β, γ изменятся на конечные величины, то вид системы (17) сохранится. В соответствии с (13) эти переменные станут медленными и войдут в вектор x.

Летательный аппарат как объект управления имеет шесть степеней свободы и четыре управляющих органа: сектор газа, регулирующий тягу двигателей, рули высоты δ_H и направления δ_D, элероны δ_E. При автоматическом управлении движением отклонения управляющих органов формируются в зависимости от измеряемых значений вектора состояния $\delta = \delta(x, y)$ (для простоты будем считать управляющие органы безынерционными).

Для анализа системы уравнений (17) могут быть использованы методы, развитые в [4]. Проверим выполнение условий применимости этих методов в данной задаче.

В процессе полета тяжелого летательного аппарата углы α, β, γ, θ ограничены и не превосходят по модулю $\pi/2$. Поскольку полет происходит ограниченное время T, углы ψ_c и φ тоже ограничены. Угловые скорости, линейная скорость и высота полета ограничены техническими условиями. В кинематических уравнениях системы (15) имеется особенность (при $\varphi_0 \to \pi/2$). Эта особенность связана с выбором в качестве расчетной геоцентрической системы, одна из осей которой совпадает с осью вращения Земли. Если в процессе полета возможно движение вблизи полюсов Земли, то можно перейти к ортодромической системе [5], где указанной особенности не будет. Аэродинамические силы и моменты обычно задаются в виде разложения в ряды Тейлора, что хорошо согласуется с летной практикой и экспериментами в аэродинамических трубах [3] и являются непрерывными, дифференцируемыми функциями своих аргументов

$$A=A(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \omega,\ \delta,\ \rho,\ \mathrm{Ma},\ \mathrm{Re}),\quad M=M(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \omega,\ \delta,\ \rho,\ \mathrm{Ma},\ \mathrm{Re})\qquad(18)$$

где ρ — плотность воздуха, Ma — число Маха, Re — число Рейнольдса. Таким образом, правые части системы (17) являются непрерывными достаточное число раз дифференцируемыми функциями своих аргументов в некоторой открытой области G пространства переменных $(x,\ y)$.

При $\varepsilon=0$ система уравнений (16) принимает вид

$$\begin{gathered}
M_\nu(V_\nu,\rho,\alpha_\nu,\beta_\nu,\gamma_\nu,\omega_\nu,\delta)=0,\qquad \omega_{z\nu}=\frac{d\theta}{d\tau}=\frac{F_{y_c}}{ml\nu^2V_\nu}\\
\omega_{x\nu}=\frac{d\psi_c}{d\tau}\sin(\theta+\alpha_0)=-\frac{F_{z_c}\sin(\theta+\alpha_0)}{ml\nu^2V_\nu\cos\theta}\\
\omega_{y\nu}=\frac{d\psi_c}{d\tau}\cos(\theta+\alpha_0)=-\frac{F_{z_c}\cos(\theta+\alpha_0)}{ml\nu^2V_\nu\cos\theta}
\end{gathered}\qquad(19)$$

которая в динамике полета носит название системы балансировочных уравнений и для различных случаев рассматривается, например, в [1, 3]. Как указывалось, отклонения управляющих органов и тяга двигателей являются функциями состояния системы и зависят от выбранного алгоритма управления $\delta=\delta(x,\ y)$, $P=P(x,\ y)$. Если исключить особые случаи, когда отклонения управляющих органов выходят на ограничения, то δ и P — непрерывные функции своих аргументов (довольно часто линейные функции [3]). Подставляя δ, P и ω_ν в уравнения моментов, получим $M_\nu=M_\nu(x,\ \alpha_\nu,\ \beta_\nu,\ \gamma_\nu)=0$. Аэродинамические моменты задаются обычно в виде разложений. Поэтому частные производные неявных функций $M_\nu(x,\ \alpha_\nu,\ \beta_\nu,\ \gamma_\nu)=0$ по их аргументам существуют и непрерывны в G. Якобиан $\det|\partial M_\nu/\partial q_\nu|$ отличен от нуля, и система неявных функций имеет единственное решение $\alpha_\nu=\alpha_\nu(x)$, $\beta_\nu=\beta_\nu(x)$, $\gamma_\nu=\gamma_\nu(x)$. Физически это эквивалентно условию управляемости аппарата относительно центра масс. Следовательно, система балансировочных уравнений (19) имеет единственное непрерывное решение $y=\eta(x)$, т. е. уравнение $b(x,\ y)=0$ имеет изолированный корень $y=\eta(x)$ в некоторой ограниченной замкнутой области D° пространства (x).

Вырожденная система уравнений, получающаяся из (15), (16) при $\varepsilon=0$, описывает длиннопериодические движения аппарата

$$\begin{gathered}
\frac{dV_\nu}{d\tau}=\frac{F_{x_c}}{ml\nu^2},\quad \frac{d\theta}{d\tau}=\frac{F_{y_c}}{ml\nu^2V_\nu},\quad \frac{d\psi_c}{d\tau}=-\frac{F_{z_c}}{ml\nu^2V_\nu\cos\theta}\\
\frac{dh_\nu}{d\tau}=V_\nu\sin\theta,\qquad \frac{d\lambda_\nu}{d\tau}=-\frac{V_\nu\cos\theta\sin\psi_c}{a_\nu\cos\varphi_0}\\
\frac{d\varphi_\nu}{d\tau}=\frac{V_\nu}{a_\nu}\cos\theta\cos\psi_c,\quad M_\nu=0,\quad \omega_{z\nu}=\frac{d\theta}{d\tau}\\
\omega_{y\nu}=\frac{d\psi_c}{d\tau}\cos(\theta+\alpha_0),\qquad \omega_{x\nu}=\frac{d\psi_c}{d\tau}\sin(\theta+\alpha_0)
\end{gathered}\qquad(20)$$

Первые три уравнения часто используются для построения траекторий движения центра масс [1]. Правые части уравнений системы (20) являются непрерывными дифференцируемыми функциями своих переменных. При заданных начальных значениях $x(0)$ система (20) имеет единственное решение на сегменте $0\leqslant\tau\leqslant T$ при $x\in D$, где D — множество внутренних точек D°.

Рассмотрим присоединенную систему $dy^\circ/dt_1=b(x^\circ,\ y^\circ)$, в которой $x=x^\circ$ рассматривается как параметр [4]. Из (16) имеем

$$\begin{gathered}
i_x \frac{d\omega^\circ_{x\nu}}{dt_1} = M_{x\nu}(x^\circ, \alpha_\nu{}^\circ, \beta_\nu{}^\circ, \gamma_\nu{}^\circ), \quad i_y \frac{d\omega^\circ_{y\nu}}{dt_1} = M_{y\nu}(x^\circ, \alpha_\nu{}^\circ, \beta_\nu{}^\circ, \gamma_\nu{}^\circ) \\
i_z \frac{d\omega^\circ_{z\nu}}{dt_1} = M_{z\nu}(x^\circ, \alpha_\nu{}^\circ, \beta_\nu{}^\circ, \gamma_\nu{}^\circ), \quad \frac{d\alpha_\nu{}^\circ}{dt_1} = \omega^\circ_{z\nu} - \frac{\overset{\circ}{F}_{y_c}}{ml\nu^2 V_\nu{}^\circ} \\
\frac{d\beta_\nu{}^\circ}{dt_1} = \omega^\circ_{y\nu}\cos\alpha_0 + \omega^\circ_{x\nu}\sin\alpha_0 + \frac{F^\circ_{z_c}}{ml\nu^2 V_\nu{}^\circ} \qquad (21) \\
\frac{d\gamma_\nu{}^\circ}{dt_1} = \omega^\circ_{x\nu}\cos\alpha_0 - \omega^\circ_{y\nu}\sin\alpha_0 + \frac{F^\circ_{z_c}\operatorname{tg}\theta^\circ}{ml\nu^2 V_\nu{}^\circ}, \quad t_1 = \frac{\tau}{\varepsilon}
\end{gathered}$$

Система (21) описывает короткопериодические движения вокруг центра масс. Она имеет единственную точку покоя $y^\circ=\eta(x^\circ)$. Цель управления движением вокруг центра масс – обеспечение устойчивости данного решения, причем устойчивости по первому приближению [2, 3]. При этом $\operatorname{Re}\lambda\leqslant-\lambda_0<0$, λ_0 – некоторое число и λ – корни характеристического уравнения

$$\det[b_{y^\circ}(x^\circ,\ y^\circ)-\lambda E]=0, \qquad b_{y^\circ}(x^\circ,\ y^\circ)=\partial b(x^\circ,\ y^\circ)/\partial y^\circ$$

Начальные условия системы (21) принадлежат области влияния точки покоя $y^\circ=\eta(x^\circ)$, поскольку такая точка единственная.

Таким образом, для построения асимптотических решений уравнений движения летательного аппарата могут быть применены методы, развитые в [4]. В частности, при обеспечении асимптотической устойчивости короткопериодических движений возможен переход от полной системы уравнений (15), (16) к системе уравнений длиннопериодического движения (20). Погрешность решения при $\tau_0\leqslant\tau\leqslant T$ $(\tau_0\sim\varepsilon\ln\varepsilon^{-1})$ будет величиной порядка ε.

Метод разделения движений нашел широкое применение в теории гироскопов при обосновании перехода от полных уравнений движения к прецессионным [7]. С этой точки зрения система уравнений длиннопериодического движения аналогична прецессионным уравнениям, а система уравнений короткопериодического движения – уравнениям нутационных колебаний теории гироскопов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Остославский И. В., Стражева И. В.* Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 499 с.
2. *Остославский И. В., Стражева И. В.* Динамика полета. Устойчивость и управляемость летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1965. 467 с.
3. *Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В.* Аэродинамика самолета. Динамика продольного и бокового движений. М.: Машиностроение, 1979. 349 с.
4. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных систем. М.: Наука, 1973. 272 с.
5. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации. Автономные системы. М.: Наука, 1966. 579 с.
6. *Склянский Ф. И.* Динамика полета и управляемость тяжелых реактивных самолетов. М.: Машиностроение, 1976. 207 с.
7. *Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г., Новожилов И. В.* О прецессионных уравнениях гироскопических систем.– ПММ, 1976, т. 40, № 2, с. 230.

Москва

Поступила в редакцию
24.IV.1980