

УДК 531.38

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ВОЛЧКА ПО ПЛОСКОСТИ С ТРЕНИЕМ

САМСОНОВ В. А.

Задача о движении тела осесимметричной формы по горизонтальной плоскости — одна из классических задач теоретической механики. Два варианта этой задачи — в случае идеально гладкой плоскости и в случае абсолютно шероховатой — изучены довольно подробно. Полностью исследовано движение однородного шара по плоскости с трением. Обширная литература (см. [1–4]) посвящена анализу движения тела сферической формы («китайский» волчок или «тип-топ») по плоскости с трением. В этих работах в основном изучается вопрос об устойчивости вращения волчка вокруг вертикальной оси симметрии. Несколько работ (среди них [1]) содержат анализ конечных движений волчка и дают описание наблюдаемого в экспериментах переворота «китайского» волчка.

Ниже на базе методики квазистационарных движений [5] построены некоторые приближенные аналитические решения задачи о волчках.

1. Постановка задачи о движении волчка. Предположим, что волчок представляет собой тяжелое твердое тело осесимметричной выпуклой формы. Пусть центр тяжести G лежит на оси симметрии тела, которая служит осью симметрии эллипсоида инерции для точки G ($A=B \neq C$). Такой волчок, двигаясь по горизонтальной плоскости, касается ее единственной точкой P .

Будем считать, что в точке P к телу приложена со стороны плоскости не только вертикальная сила, но и горизонтальная сила трения F , направленная в сторону, противоположную скорости V_P точки P , если $V_P \neq 0$. Очевидно, что во многих случаях учет силовых факторов типа трения о воздух или трения верчения необходим лишь тогда, когда $V_P = 0$ или $V_P \approx 0$.

Направим ось $G\xi$ вверх по вертикали, Gz — по оси симметрии тела, горизонтальную ось Gx — ортогонально осям ξ и z (по линии узлов), горизонтальную ось $G\eta$ — ортогонально осям ξ и x , ось Gy — ортогонально осям z и x . Состояние тела охарактеризуем проекциями V_x и V_η скорости его центра тяжести G , углами Эйлера: θ — угол ξGz (угол нутации или поклона), ψ — угол поворота оси x вокруг вертикали (угол прецессии), φ — угол поворота тела в осях xyz (угол собственного вращения) — и угловыми скоростями $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$. Высота центра тяжести над опорной плоскостью представляет собой некоторую функцию $f(\theta)$, определяемую формой волчка.

Введем обозначения: $z_P(\theta)$, $y_P(\theta)$, $\eta_P(\theta)$, ξ_P — координаты точки P , V_{Px} , $V_{P\eta}$ — проекции скорости точки P , F_x , F_η — проекции силы F .

Кинетическая энергия тела имеет вид

$$T = \frac{1}{2} [A\dot{\theta}^2 + A\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + mV_x^2 + mV_\eta^2 + m(f'(\theta))^2 \dot{\theta}^2]$$

Движение волчка, сопровождаемое скольжением, описывается следующей системой дифференциальных уравнений.

Уравнения движения центра тяжести

$$V_x \dot{\psi} + \dot{\psi} V_\eta = - |F_x| \operatorname{sgn} V_{Px} / m$$

(1.1)

$$V_{\eta} \dot{\psi} - \dot{\psi} V_x = -|F_{\eta}| \operatorname{sgn} V_{P\eta} / m$$

Уравнения движения волчка относительно центра тяжести в форме уравнений Рауса

$$\dot{u} = y_P |F_x| \operatorname{sgn} V_{Px}, \quad u = \partial T / \partial \varphi, \quad \dot{v} = \eta_P |F_x| \operatorname{sgn} V_{Px}, \quad v = \partial T / \partial \psi \quad (1.2)$$

$$A \ddot{\varphi} + m f'^2 \dot{\varphi} + m f' f'' \dot{\varphi}^2 + m g f' + \frac{(u-v \cos \vartheta)(v-u \cos \vartheta)}{A \sin^3 \vartheta} = \zeta_P |F_{\eta}| \operatorname{sgn} V_{P\eta}$$

Систему (1.1), (1.2) необходимо дополнить соотношениями

$$\dot{\psi} = \frac{v-u \cos \vartheta}{A \sin^2 \vartheta}, \quad \dot{\varphi} = \frac{u}{C} - \dot{\psi} \cos \vartheta$$

$$V_{Px} = V_x - z_P \frac{v-u \cos \vartheta}{A \sin \vartheta} - y_P \frac{u}{C}$$

$$V_{P\eta} = V_{\eta} + \zeta_P \dot{\varphi}$$

Для интегрирования уравнений (1.1), (1.2) следует представить F_x , F_{η} в виде функций от фазовых координат. Однако в настоящее время нельзя указать надежную, простую и универсальную формулу для силы трения. Поэтому представляет интерес построение хотя бы частных решений системы (1.1), (1.2) без использования конкретного вида упомянутых функций. Именно такое построение оказывается возможным в случае малой силы трения.

Исходная система рассматривается ниже как возмущенная по отношению к некоторой другой, которую принимаем за невозмущенную. Асимптотические методы позволяют установить, что возмущенная система «наследует» некоторые свойства невозмущенной, по крайней мере при достаточно малом возмущении. В частности, если невозмущенная система обладает многообразием K стационарных движений, то возмущенная система имеет многообразие квазистационарных движений [5]. Поле фазовых скоростей возмущенной системы на многообразии K позволяет получить представление о характере квазистационарных движений. Для построения такого поля необходима карта стационарных движений невозмущенной системы.

Примем в качестве невозмущенной задачи задачу о движении волчка по гладкой плоскости при отсутствии трения и построим карту его стационарных движений.

2. Карта стационарных движений. При $F=0$ уравнения (1.2) отщепляются от полной системы и имеют первые интегралы $u(t) = u(t_0) = \text{const}$, $v(t) = v(t_0) = \text{const}$.

Кроме того, третье уравнение из системы (1.2) имеет частное решение $\vartheta(t) = \vartheta_0(u, v) = \text{const}$, где ϑ_0 — решение алгебраического уравнения

$$(u-v \cos \vartheta)(v-u \cos \vartheta) + m g A f' \sin^3 \vartheta = 0 \quad (2.1)$$

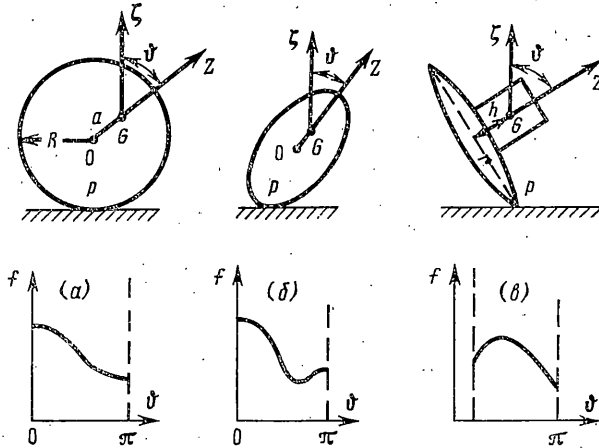
Это частное решение отвечает стационарному движению — регулярной прецессии волчка.

Уравнение (2.1) определяет некоторую поверхность в пространстве ϑ, u, v . Нетрудно видеть, что проекция на плоскость u, v линии уровня этой поверхности, т. е. кривая $\vartheta_0(u, v) = \vartheta = \text{const}$ — в общем случае гиперболы. Асимптоты этой гиперболы — прямые $u = v \cos \vartheta$, $v = u \cos \vartheta$.

Пусть $f'(\vartheta)$ обращается в нуль в некоторой точке ϑ_* . Тогда кривая $\vartheta_0(u, v) = \vartheta_*$ превращается в пару пересекающихся прямых $u = v \cos \vartheta_*$,

$v = u \cos \vartheta_*$, при $\sin \vartheta_* \neq 0$. Если $\vartheta_* = 0$ ($\vartheta_* = \pi$), то линия $\vartheta_0 = 0$ ($\vartheta_0 = \pi$) — прямая $u = v$ ($u = -v$).

Набор таких линий, нанесенных на плоскость u, v , представляет собой карту стационарных движений. Она дает представление о рельефе поверхности $\vartheta = \vartheta_0(u, v)$. Естественно, детали этой карты зависят от свойств функции $f(\vartheta)$, которая определяется формой волчка. Некоторые типовые формы изображены на фиг. 1. В случае волчка сферической формы карта



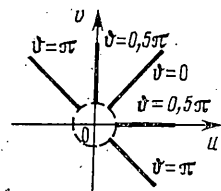
Фиг. 1

его стационарных движений совпадает с такой же картой для тела с неподвижной точкой и построена в [6].

Как правило, $f'(0) = f'(\pi) = 0$. Поэтому (2.1) имеет решения $\vartheta = 0$ при $u = v$ и $\vartheta = \pi$ при $u = -v$, отвечающие режиму вращения волчка вокруг вертикальной оси симметрии.

Многие интересные свойства движения волчка проявляются при вращениях с большой угловой скоростью, т. е. при больших значениях величины $u^2 + v^2$. Очевидно, в этой части плоскости гиперболы близки к своим асимптотам (фиг. 2). В частности, для участков гипербол, которые находятся в области $|u| > |v|$, $|u| \gg 1$, можно принять $v \approx u \cos \vartheta$. Поэтому здесь $\psi \approx 0$. Эту область назовем областью «медленных» прецессий.

В той части плоскости, где $|u| < |v|$, $|v| \gg 1$, имеем $u \approx v \cos \vartheta$. Здесь $\psi \approx v/A$, $\varphi \approx u(1/C - 1/A)$ достаточно велики. Эту область назовем областью «быстрых» прецессий.



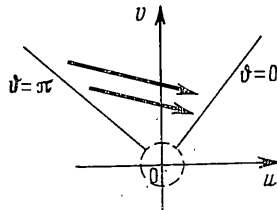
Фиг. 2

3. Квазистационарные движения. Пусть сила трения мала. Тогда переменные u, v медленно изменяются во времени. Среди траекторий системы (1.1), (1.2) имеется семейство таких, на которых и угол ϑ меняется также медленно. Это семейство квазистационарных движений. Естественно мгновенное значение угла ϑ мало отличается от стационарного, т. е. $\vartheta(t) \approx \vartheta_0(u(t), v(t))$.

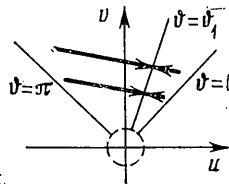
Квазистационарные движения волчка представляют собой прецессии с медленно изменяющимся наклоном волчка. Уравнения (1.2) на этих движениях могут быть записаны в приближенном виде

$$\dot{u} = -y_F(\vartheta_0(u, v)) |F_x| \operatorname{sgn} V_{Fx}, \quad \dot{v} = -\eta_F(\vartheta_0(u, v)) |F_x| \operatorname{sgn} V_{Fx} \quad (3.1)$$

Семейство квазистационарных движений в [5] трактуется как асимптотически устойчивое интегральное многообразие возмущенной системы, существующее в окрестности многообразия асимптотически устойчивых стационарных движений невозмущенной системы. Рассмотренное же выше множество стационарных движений волчка без трения не обладает



Фиг. 3



Фиг. 4

асимптотической устойчивостью. Если параметры u , v принадлежат областям «быстрых» и «медленных» прецессий, то изменение угла ϑ на движениях, близких к стационарному, носит характер периодических колебаний. В этом случае допустима процедура осреднения [7] уравнений (1.2) по движениям невозмущенной системы.

Осредненные уравнения первого приближения, очевидно, имеют частное решение, на котором уравнения для «медленных» переменных u , v принимают вид (3.1). Общая теория осреднения гарантирует близость решений осредненной и исходной систем на некотором конечном интервале изменения «медленных» переменных. Таким образом, существуют частные движения волчка с малым трением, отрезки траекторий которых находятся в окрестности множества регулярных прецессий волчка без трения, причем длины этих отрезков конечны.

Уравнения (3.1) допускают построение фазовой траектории на плоскости u , v , так как

$$dv/du = \eta_F(\vartheta_0(u, v)) / y_F(\vartheta_0(u, v)) \quad (3.2)$$

Как видно, в это уравнение не входят моменты инерции тела и сила F , т. е. конкретная зависимость малой силы трения от скорости скольжения или от нормального давления не влияет на вид фазовой траектории квазистационарного движения. Ее построение может быть проведено качественно для волчка любой заданной формы. Отметим, что разные фазовые траектории пересекают гиперболу $\vartheta_0(u, v) = \text{const}$ с одним и тем же наклоном.

Для определения направления движения изображающей точки вдоль фазовой траектории необходим знак V_{Fx} , для чего следует интегрировать систему (1.1). Это можно сделать, если рассматривать лишь движения с большими угловыми скоростями. В области «медленных» прецессий $\dot{\varphi} \approx 0$ и определяемое уравнение примет вид $V_x = -|F_x| \operatorname{sgn} V_{Fx} / m$.

В этом случае сила F_x определяет и движение вдоль фазовой траектории и уменьшение величины $|V_{Fx}|$. Направление движения и длина отрезка траектории, который пройдет изображающая точка, зависит от начального значения V_x .

В области «быстрых» прецессий угловая скорость ψ принимает большие значения. При этом, как нетрудно видеть, система (1.1) имеет частное решение $V_x \approx V_{\eta} \approx 0$.

Фазовая траектория уравнения (3.2) в области «быстрых» прецессий может быть разделена на части, в каждой из которых свое направление движения изображающей точки. На границе раздела выполняется условие $V_{px} = 0$, которое трансформируется в уравнение

$$Cz_p \sin \vartheta + Ay_p \cos \vartheta = 0 \quad (3.3)$$

При определении направления движения изображающей точки следует учесть, что

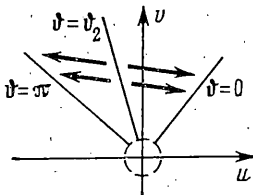
$$\operatorname{sgn} u \Big|_{\vartheta=\pi/2} = \operatorname{sgn} V_{px}(\pi/2) = -\operatorname{sgn} z_p(\pi/2)$$

Это означает, что квазистационарное изменение поклона волчка в окрестности $\vartheta \approx \pi/2$ происходит таким образом, что центр тяжести G поднимается, если $z(\pi/2) \neq 0$.

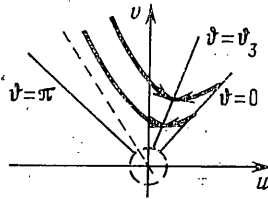
4. Сфера. Для «китайского» волчка (фиг. 1, а) $y_p = R \sin \vartheta$, $z_p = -a \sin \vartheta$. Поэтому уравнение (3.2) имеет интеграл $Rv + au = \text{const}$. Уравнение (3.3) в этом случае принимает вид

$$R(A-C) \cos \vartheta = aC \quad (4.1)$$

Если $aC > |A-C|R$, то уравнение (4.1) не имеет решения, изображающая точка, двигаясь по прямой $Rv + au = \text{const}$ пересекает всю область «быстрых» прецессий от $\vartheta = \pi$ («нижнее» расположение центра тяжести) до $\vartheta = 0$ («верхнее» расположение) (фиг. 3). Волчок совершает «переворот».



Фиг. 5



Фиг. 6

рот». Пусть $A > C$, $a > 0$, $aC < R(A-C)$. Уравнение (4.1) при этих условиях имеет решение $\vartheta_1 < \pi/2$. Это значение угла поклона волчка является финальным для квазистационарных движений в области «быстрых» прецессий (фиг. 4). Пусть $C > A$, $a > 0$, $aC < R(C-A)$, тогда уравнение (4.1) имеет решение $\vartheta_2 > \pi/2$. В этом случае на квазистационарных движениях с начальным наклоном оси $\vartheta(t_0) > \vartheta_2$ угол ϑ продолжает увеличиваться до своего максимального значения, а центр тяжести G опускается (фиг. 5). При $\vartheta(t_0) < \vartheta_2$ угол поклона уменьшается до нуля, а центр тяжести волчка поднимается до своего верхнего положения.

Приведенные условия совпадают с известными условиями устойчивости или неустойчивости вращения волчка [2, 3] вокруг вертикали с большой угловой скоростью.

5. «Ребро». Для волчка, имеющего круговое ребро (фиг. 1, в), при опоре на ребро имеем $z_p = -h = \text{const}$, $y_p = r = \text{const}$. Уравнение (3.2) в области «быстрых» прецессий имеет интегральные кривые — гиперболы

$$r\sqrt{v^2 - u^2} + hu = \text{const} \quad (5.1)$$

качественно изображенные на фиг. 6. Уравнение (3.3) в рассматриваемом случае имеет решение $\vartheta_3 = \arctg[Ar/Ch]$. Поэтому каждая из гипербол

(5.1) разделена точкой φ_3 на две части с разным направлением движения изображающей точки. Если учесть, что $z_p < 0$ и $u'(\pi/2) > 0$, то нетрудно установить, что движение волчка с поклоном φ_3 является финальным для всех квазистационарных движений в области «быстрых» прецессий (фиг. 6).


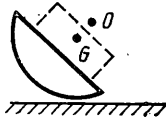
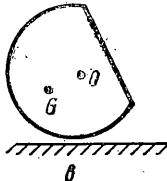
Отметим, что для рассматриваемого случая фазовые траектории уравнения (3.2) в области «медленных» прецессий тоже могут быть получены в аналитическом виде.

6. Влияние других диссипативных факторов. Предыдущий анализ показал, что движение волчка, сопровождаемое скольжением, изменяется таким образом, чтобы скольжение прекратилось. Ясно, что движение без проскальзывания в точке контакта (прецессия — качение) также сопровождается потерей энергии, хотя и менее интенсивной. Это обстоятельство дает основание относиться к множествам финальных движений в области «быстрых» прецессий ($\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_3$), как к траекториям квазистационарных движений волчка под действием трения качения или трения о воздух. Естественно, что изображающая точка движется вдоль этих траекторий к началу координат. Поклон волчка на этом этапе движения остается почти постоянным, пока изображающая точка не войдет в область движений с конечными угловыми скоростями.

7. Волчок со сферическим сегментом. Пусть поверхность волчка имеет сферический сегмент, оканчивающийся ребром. Если этот волчок закрутить с достаточно большой угловой скоростью, то в своем движении он может выйти в режим прецессии — качения с опорой на ребро. Торможение волчка может сопровождаться переходом точки опоры на сферическую часть волчка или его «опрокидыванием».

В таблице приведены типы возможного поведения таких волчков в зависимости от геометрических характеристик и распределения масс.

Для проверки выводов данной работы проведена серия опытов с волчками. Результаты экспериментов находятся в качественном соответствии с результатами теоретического анализа.

Тип волчка	$A > C$	$A < C$
 <p style="text-align: center;">a</p>	Качение на ребре, потом переход опоры на сферу	<ol style="list-style-type: none"> 1. Качение на ребре, потом «падение на срез». 2. Вращение вокруг вертикальной оси симметрии с опорой на сферу.
 <p style="text-align: center;">б</p>	Качение на ребре, потом «падение на срез»	<ol style="list-style-type: none"> 1. Качение на ребре, потом переход опоры на сферу. 2. Вращение вокруг вертикальной оси симметрии с опорой на сферу.
 <p style="text-align: center;">в</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Качение с опорой на сферу. 2. Качение на ребре, потом переход опоры на сферу. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Качение на ребре, потом «падение на срез». 2. Вращение вокруг вертикальной оси симметрии с опорой на сферу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kane T. R., Levinson D. A. A realistic solution of the symmetric top problem.— Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1978, v. 45, No. 4, p. 903–909.
2. Конгесу П. Связь между трением скольжения и трением вращения и ее учет в теории волчка.— В кн.: Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967, с. 60–77.
3. Рудянцева В. В. Об устойчивости гироскопов некоторого вида.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 4, с. 778–784.
4. Миндлин И. М. Об устойчивости движения волчка на горизонтальной плоскости при действии сухого трения скольжения.— Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 2, с. 211–216.
5. Самсонов В. А. О квазистационарных движениях механических систем.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 1, с. 32–35.
6. Самсонов В. А. О квазистационарных движениях тяжелого гироскопа в кардановом подвесе.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 4, с. 18–23.
7. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1974, 507 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.III.1980