МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1981

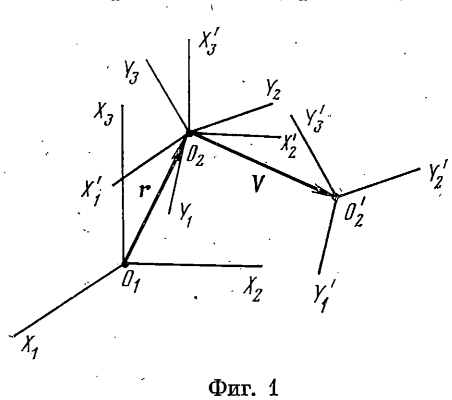
УДК 531.55:521.1

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

ЧЕЛНОКОВ Ю. Н.

Получена новая форма общих уравнений инерциальной навигации, использующая в качестве кинематических параметров величины, комплексные комбинации которых являются компонентами бикватернионов винтовых конечных перемещений двух определенным образом выбранных систем координат. Предлагаемые уравнения симметричны, в их общую структуру естественным образом вписываются кинематические уравнения в параметрах Родрига – Гамильтона, для их исследования можно применять теорию винтовых конечных перемещений твердого тела.

1. Рассмотрим кинематические уравнения винтового движения твердого тела. Введем две системы координат: связанную с телом $O_2Y_1Y_2Y_3(Y)$ и опорную $O_1X_1X_2X_3(X)$, относительно которой исследуется движение тела (фиг. 1). Мотор мгновенного винта скоростей $\mathbf{U}$ (кинематического винта) твердого тела, отнесенный к полюсу O_2 (в его качестве может быть взят центр масс тела), равен дуальному вектору $\boldsymbol{\omega}+s\mathbf{V}$ [1]. Здесь $\mathbf{V}$ – вектор скорости движения точки O_2 тела относительно базиса X, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения тела в базисе X, s – символ Клиффорда: $s^2=0$. Мотор винта $\mathbf{U}$, отнесенный к точке O_1, будет равен дуальному вектору $\boldsymbol{\omega}+s(\mathbf{V}+\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega})$ [1], в котором $\mathbf{r}$ – радиус-вектор полюса O_2 тела (фиг. 1).



Фиг. 1

Поэтому дуальные ортогональные проекции U_i ($i=1, 2, 3$) кинематического винта $\mathbf{U}$ на оси связанной системы координат

$$U_i=\omega_i+sV_i \quad (i=1, 2, 3) \tag{1.1}$$

где ω_i, V_i – проекции векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{V}$ на связанную ось O_2Y_i. Дуальные ортогональные проекции U_{0i} ($i=1, 2, 3$) кинематического винта $\mathbf{U}$ на оси опорной системы координат

$$U_{0i}=\omega_{0i}+s\left(V_{0i}+\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}x_j\omega_{0k}\right) \quad (i=1, 2, 3) \tag{1.2}$$

Здесь ω_{0i}, V_{0i}, x_i ($i=1, 2, 3$) – проекции векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{r}$ на оси системы координат X, ε_{ijk} – символ Леви-Чивита [2].

Конечное перемещение связанной системы координат Y из начального положения, совпадающего с опорной системой координат X, в конечное будем характеризовать дуальным вектором конечного винтового перемещения [1]: $\boldsymbol{\Theta}=2\mathbf{E}\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\Phi$, где $\mathbf{E}$ – единичный винт оси винтового перемещения, $\Phi=\varphi+s\varphi^\circ$ – дуальный угол поворота тела, φ – обычный угол поворота тела вокруг оси винта Θ, φ° — поступательное перемещение тела вдоль этой оси.

Винту Θ соответствуют дуальные параметры Родрига — Гамильтона Λ_j ($j=0, 1, 2, 3$), определяемые соотношениями

$$\Lambda_0=\cos {}^1/_2\Phi, \quad \Lambda_i=\sin {}^1/_2\Phi \cos \Gamma_i \quad (i=1, 2, 3) \tag{1.3}$$

Здесь $\Gamma_i=\gamma_i+s\gamma_i^\circ$ — дуальный угол между осью винта Θ и осью O_2Y_i (O_1X_i), γ_i — обычный угол между осью винта Θ и осью O_1X_1, γ_i° — кратчайшее расстояние между этими осями.

Параметры Λ_j являются дуальными аналогами вещественных параметров Родрига — Гамильтона. Их можно представить в виде комплексных комбинаций вещественных величин

$$\Lambda_j=\lambda_j+s\lambda_j^\circ \quad (j=0, 1, 2, 3) \tag{1.4}$$

где λ_j — вещественные параметры Родрига — Гамильтона, определяемые соотношениями [2—4]

$$\lambda_0=\cos {}^1/_2\varphi, \quad \lambda_i=\sin {}^1/_2\varphi \cos \gamma_i \quad (i=1, 2, 3) \tag{1.5}$$

а величины λ_j° имеют выражения [5]

$$\begin{aligned}
&\lambda_0^\circ=\varphi^\circ\partial\lambda_0/\partial\varphi=-{}^1/_2\varphi^\circ \sin {}^1/_2\varphi \\
&\lambda_i^\circ=\varphi^\circ\partial\lambda_i/\partial\varphi+\gamma_i^\circ\partial\lambda_i/\partial\gamma_i= \\
&={}^1/_2\varphi^\circ \cos {}^1/_2\varphi \cos \gamma_i-\gamma_i^\circ \sin {}^1/_2\varphi \sin \gamma_i \quad (i=1, 2, 3)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Величины λ_j, λ_j° ($j=0, 1, 2, 3$) будем называть параметрами винтового движения твердого тела.

Кинематические уравнения винтового движения твердого тела, устанавливающие зависимости между дуальными параметрами Родрига — Гамильтона, их производными и дуальными ортогональными проекциями кинематического винта на оси связанного трехгранника, можно записать в двух эквивалентных матричных формах [5]:

$$2\Theta^\bullet=N_U\Theta, \quad 2N^\bullet=N_UN \tag{1.7}$$

$$\Theta=\|\Lambda_0 \ \ \Lambda_1 \ \ \Lambda_2 \ \ \Lambda_3\|^T, \quad \Theta^\bullet=\|\Lambda_0^\bullet \ \ \Lambda_1^\bullet \ \ \Lambda_2^\bullet \ \ \Lambda_3^\bullet\|^T$$

$$N=\begin{Vmatrix} \Lambda_0 & -\Lambda_1 & -\Lambda_2 & -\Lambda_3 \\ \Lambda_1 & \Lambda_0 & \Lambda_3 & -\Lambda_2 \\ \Lambda_2 & -\Lambda_3 & \Lambda_0 & \Lambda_1 \\ \Lambda_3 & \Lambda_2 & -\Lambda_1 & \Lambda_0 \end{Vmatrix}, \quad N_U=\begin{Vmatrix} 0 & -U_1 & -U_2 & -U_3 \\ U_1 & 0 & U_3 & -U_2 \\ U_2 & -U_3 & 0 & U_1 \\ U_3 & U_2 & -U_1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.8}$$

Кинематические уравнения винтового движения твердого тела, устанавливающие связи между дуальными параметрами Родрига — Гамильтона, их производными и дуальными ортогональными проекциями кинематического винта на оси опорного трехгранника, также можно представить в двух эквивалентных матричных формах

$$2\Theta^\bullet=M_{0U}\Theta, \quad 2M^\bullet=M_{0U}M \tag{1.9}$$

$$M=\begin{Vmatrix} \Lambda_0 & -\Lambda_1 & -\Lambda_2 & -\Lambda_3 \\ \Lambda_1 & \Lambda_0 & -\Lambda_3 & \Lambda_2 \\ \Lambda_2 & \Lambda_3 & \Lambda_0 & -\Lambda_1 \\ \Lambda_3 & -\Lambda_2 & \Lambda_1 & \Lambda_0 \end{Vmatrix}, \quad M_{0U}=\begin{Vmatrix} 0 & -U_{01} & -U_{02} & -U_{03} \\ U_{01} & 0 & -U_{03} & U_{02} \\ U_{02} & U_{03} & 0 & -U_{01} \\ U_{03} & -U_{02} & U_{01} & 0 \end{Vmatrix}$$

Кинематические уравнения (1.7) и (1.9) винтового движения твердого тела представляют собой дуальные линейные однородные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Из соотношений (1.2) видно, что дуальные проекции U_{0i} винта U, входящие в уравнения (1.9), содержат проекции x_i радиус-вектора $\mathbf{r}$ полюса O_2 тела на оси опорной системы координат. Это затрудняет непосредственное использование кинематических уравнений (1.9) винтового движения тела. От указанного недостатка свободны кинематические уравнения (1.7).

Перейдем в уравнениях (1.7) от дуальных параметров Родрига — Гамильтона к вещественным параметрам λ_j, $\lambda_j{}^\circ$ винтового движения тела, используя равенства (1.4). В результате каждое из этих дуальных уравнений распадается на два вещественных

$$2\theta^{\boldsymbol{\cdot}}=n_\omega\theta,\quad 2\theta^{\boldsymbol{\cdot}\circ}=n_\omega\theta^\circ+n_V\theta \tag{1.10}$$

$$2n^{\boldsymbol{\cdot}}=n_\omega n,\quad 2n^{\boldsymbol{\cdot}\circ}=n_\omega n^\circ+n_V n \tag{1.11}$$

$$\theta=\|\lambda_0\quad\lambda_1\quad\lambda_2\quad\lambda_3\|^T,\qquad \theta^\circ=\|\lambda_0{}^\circ\quad\lambda_1{}^\circ\quad\lambda_2{}^\circ\quad\lambda_3{}^\circ\|^T$$

$$n_\omega=\begin{Vmatrix}0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3\\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2\\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1\\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0\end{Vmatrix},\quad n_V=\begin{Vmatrix}0 & -V_1 & -V_2 & -V_3\\ V_1 & 0 & V_3 & -V_2\\ V_2 & -V_3 & 0 & V_1\\ V_3 & V_2 & -V_1 & 0\end{Vmatrix} \tag{1.12}$$

Матрицы n и n° имеют структуру матрицы N (см. выражение (1.8)) и составлены из параметров λ_j и $\lambda_j{}^\circ$ соответственно.

Системы уравнений (1.10) и (1.11) эквивалентны. Первое из уравнений (1.10) или уравнений (1.11) является матричным кинематическим уравнением сферического движения тела в вещественных параметрах Родрига — Гамильтона.

Уравнения (1.10) или (1.11) позволяют находить по заданным проекциям векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{V}$ на связанный базис и по заданным начальным условиям параметры λ_j, $\lambda_j{}^\circ$ ($j=0, 1, 2, 3$) винтового движения тела. Параметры Родрига — Гамильтона λ_j характеризуют ориентацию тела в опорной системе координат, а для определения поступательного движения тела (проекций вектора $\mathbf{r}$ на оси связанного и опорного базисов) необходимо воспользоваться формулами [5]:

$$n_r=2n^\circ n^T,\quad n_{0r}=2n^T n^\circ \tag{1.13}$$

или эквивалентными им формулами

$$\begin{gathered}\|0\quad x_1\quad x_2\quad x_3\|^T=2n^\circ\|\lambda_0\quad -\lambda_1\quad -\lambda_2\quad -\lambda_3\|^T\\ \|0\quad y_1\quad y_2\quad y_3\|^T=2n^T\|\lambda_0{}^\circ\quad \lambda_1{}^\circ\quad \lambda_2{}^\circ\quad \lambda_3{}^\circ\|^T\end{gathered} \tag{1.14}$$

Здесь матрицы n_r и n_{0r} имеют структуру матрицы $n_\omega(n_V)$ и образованы из проекций y_i и x_i ($i=1, 2, 3$) вектора $\mathbf{r}$ на оси связанного и опорного базисов соответственно, T — символ транспонирования.

Из соотношений (1.14) имеем

$$\begin{gathered}y_i=2\left(\lambda_0\lambda_i{}^\circ-\lambda_0{}^\circ\lambda_i-\sum_{j=1}^3\sum_{k=1}^3\varepsilon_{ijk}\lambda_j\lambda_k{}^\circ\right)\\ x_i=2\left(\lambda_0\lambda_i{}^\circ-\lambda_0{}^\circ\lambda_i+\sum_{j=1}^3\sum_{k=1}^3\varepsilon_{ijk}\lambda_j\lambda_k{}^\circ\right)\end{gathered} \tag{1.15}$$

Уравнения (1.10) или (1.11) можно записать в кватернионной форме

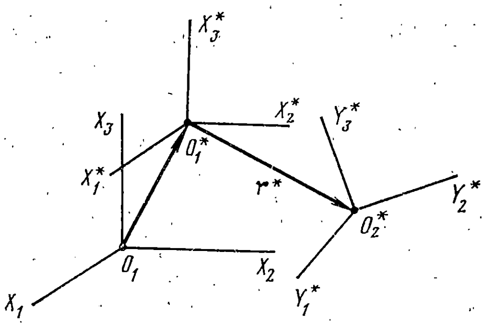
$$2\frac{d\lambda}{dt}=\lambda\odot\omega_Y,\quad 2\frac{d\lambda^\circ}{dt}=\lambda^\circ\odot\omega_Y+\lambda\odot\mathbf{V}_Y \tag{1.16}$$

$$\mathbf{r}_X=2\boldsymbol{\lambda}^\circ\odot\bar{\boldsymbol{\lambda}}=2\left[\lambda_0 \operatorname{rect}\boldsymbol{\lambda}^\circ-\lambda_0^\circ \operatorname{vect}\boldsymbol{\lambda}+(\operatorname{vect}\boldsymbol{\lambda})\times(\operatorname{vect}\boldsymbol{\lambda}^\circ)\right]$$
$$\mathbf{r}_Y=2\bar{\boldsymbol{\lambda}}\odot\boldsymbol{\lambda}^\circ=2\left[\lambda_0 \operatorname{vect}\boldsymbol{\lambda}^\circ-\lambda_0^\circ \operatorname{vect}\boldsymbol{\lambda}-(\operatorname{vect}\boldsymbol{\lambda})\times(\operatorname{vect}\boldsymbol{\lambda}^\circ)\right] \qquad (1.17)$$

Здесь $\mathbf{r}_Y=y_1\mathbf{i}_1+y_2\mathbf{i}_2+y_3\mathbf{i}_3$ и $\mathbf{r}_X=x_1\mathbf{i}_1+x_2\mathbf{i}_2+x_3\mathbf{i}_3$ – гиперкомплексные отображения вектора $\mathbf{r}$ на опорный и связанный базисы [3]; $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ – орты гиперкомплексного пространства; $\boldsymbol{\omega}_Y=\omega_1\mathbf{i}_1+\omega_2\mathbf{i}_2+\omega_3\mathbf{i}_3$ и $\mathbf{V}_Y=V_1\mathbf{i}_1+V_2\mathbf{i}_2+V_3\mathbf{i}_3$ – гиперкомплексные отображения векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{V}$ на связанный базис; кватернионы $\boldsymbol{\lambda}=\lambda_0+\lambda_1\mathbf{i}_1+\lambda_2\mathbf{i}_2+\lambda_3\mathbf{i}_3$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}}=\lambda_0-\lambda_1\mathbf{i}_1-\lambda_2\mathbf{i}_2-\lambda_3\mathbf{i}_3$, $\boldsymbol{\lambda}^\circ=\lambda_0^\circ+\lambda_1^\circ\mathbf{i}_1+\lambda_2^\circ\mathbf{i}_2+\lambda_3^\circ\mathbf{i}_3$, $\operatorname{vect}\boldsymbol{\lambda}$ и $\operatorname{vect}\boldsymbol{\lambda}^\circ$ – векторные части кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^\circ$: $\operatorname{vect}\boldsymbol{\lambda}=\lambda_1\mathbf{i}_1+\lambda_2\mathbf{i}_2+\lambda_3\mathbf{i}_3$, $\operatorname{vect}\boldsymbol{\lambda}^\circ=\lambda_1^\circ\mathbf{i}_1+\lambda_2^\circ\mathbf{i}_2+\lambda_3^\circ\mathbf{i}_3$; символ $\odot$ означает кватернионное умножение, $\times$ – векторное; скалярные части кватернионов $\boldsymbol{\lambda}^\circ\odot\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ и $\bar{\boldsymbol{\lambda}}\odot\boldsymbol{\lambda}^\circ$ равны нулю, так как $\lambda_0\lambda_0^\circ+\lambda_1\lambda_1^\circ+\lambda_2\lambda_2^\circ+\lambda_3\lambda_3^\circ=0$.

Аналогично осуществляется переход к параметрам винтового движения в кинематических уравнениях (1.9). При этом, используя формулы (1.15), можно исключить из полученных уравнений проекции x_i вектора $\mathbf{r}$.

2. Пусть имеется некоторый вектор $\mathbf{r}^*$, меняющийся с течением времени по модулю и произвольно перемещающийся относительно опорной системы координат $O_1X_1X_2X_3(X)$, принимаемой за инерциальную. Введем в рассмотрение систему координат $Y_1^*Y_2^*Y_3^*(Y^*)$, вращающуюся относительно инерциальной с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^*$, и систему координат $O_1^*X_1^*X_2^*X_3^*(X^*)$, движущуюся относительно инерциальной поступательно, оси которой параллельны одноименным осям инерциальной системы координат, а начало находится в начале вектора $\mathbf{r}^*$ (фиг. 2).



Фиг. 2

Известно, что абсолютная производная $d\mathbf{r}^*/dt$ по времени от вектора $\mathbf{r}^*$, заданного своими проекциями y_1^*, y_2^*, y_3^* в системе координат Y^*, равна

$$\frac{d\mathbf{r}^*}{dt}=\left(\frac{d\mathbf{r}^*}{dt}\right)_1+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}^* \qquad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{r}^*=y_1^*\mathbf{e}_1^*+y_2^*\mathbf{e}_2^*+y_3^*\mathbf{e}_3^*$ ($\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{e}_3^*$ – орты трехгранника Y^*), $(d\mathbf{r}^*/dt)_1=\Sigma y_i^{\cdot*}\mathbf{e}_i^*$ ($i=1, 2, 3$) – относительная (локальная) производная от вектора $\mathbf{r}^*$.

Дифференцирование в уравнении (2.1) проведено в системе координат X. Поскольку система координат X^* движется относительно инерциальной X поступательно, то его можно считать проведенным в системе координат X^*.

Рассмотрим задачу определения проекций y_1^*, y_2^*, y_3^* вектора $\mathbf{r}^*$ в подвижной системе координат Y^* по известным проекциям векторов $d\mathbf{r}^*/dt$, $\boldsymbol{\omega}^*$ в этой же системе координат. Эта задача решается обычно интегрированием трех скалярных уравнений, эквивалентных одному векторному (2.1), относительно неизвестных y_i^*.

Приведем другое решение указанной задачи. Доопределим движение системы координат Y^*: будем считать, что ее начало (точка O_2^*) совпадает с концом вектора $\mathbf{r}^*$ и движется в инерциальной системе координат вместе с ним. Положение системы координат Y^* относительно X^* в текущий момент времени t будем характеризовать дуальным вектором конечного винтового перемещения Θ^*. Параметры винтового движения системы координат Y^*, соответствующие винту Θ^*, обозначим через λ_j^*, $\lambda_j^{\circ *}$ ($j=0, 1, 2, 3$).

Так как условия, наложенные на движение координатного трехгранника Y^* относительно X^*, аналогичны условиям, наложенным на рассмотренное в п. 1 движение трехгранника Y относительно X, то, используя результаты п. 1, приходим к следующему выводу.

Задача нахождения проекций некоторого вектора $\mathbf{r}^*$ на оси подвижной системы координат, вращающейся относительно инерциальной с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^*$, по известным проекциям на эти же оси вектора $\boldsymbol{\omega}^*$ и абсолютной производной $d\mathbf{r}^*|dt=\mathbf{V}^*$ от вектора $\mathbf{r}^*$ сводится к определению параметров λ_j^*, $\lambda_j^{\circ *}$ винтового движения подвижной системы координат Y^*, мотор мгновенного винта скоростей движения которой относительно системы координат X^* равен дуальному вектору $\boldsymbol{\omega}^*+s\mathbf{V}^*=\boldsymbol{\omega}^*+sd\mathbf{r}^*/dt$.

Параметры λ_j^*, $\lambda_j^{\circ *}$ находятся интегрированием матричных дифференциальных уравнений

$$2n^{\cdot *}=n_\omega^* n^*, \quad 2n^{\cdot \circ *}=n_\omega^* n^{\circ *}+n_V^* n^* \tag{2.2}$$

а проекции вектора $\mathbf{r}^*$ на оси подвижной Y^* и инерциальной X систем координат определяются через λ_j^*, $\lambda_j^{\circ *}$ по формулам

$$n_r^*=2n^{\circ *}n^{*T}, \quad n_{0r}^*=2n^{*T}n^{\circ *} \tag{2.3}$$

В уравнениях (2.2), (2.3) n^* и $n^{\circ *}$ — матрицы параметров λ_j^*, $\lambda_j^{\circ *}$ винтового движения системы координат Y^*, имеющие вид матриц n и n°; матрицы n_ω^*, n_V^* и n_r^* имеют структуру матриц n_ω, n_V и n_r и составлены из проекций векторов $\boldsymbol{\omega}^*$, $\mathbf{V}^*$, $\mathbf{r}^*$ на оси базиса Y^*; матрица n_{0r}^* составлена из проекций вектора $\mathbf{r}^*$ на оси базиса X.

Видно, что предлагаемое решение указанной задачи в отличие от обычного включает в себя нахождение ориентации координатного трехгранника Y^* в инерциальной системе координат X, а также позволяет определять проекции вектора $\mathbf{r}^*$ на оси инерциального трехгранника.

Заметим, что уравнения (2.2), (2.3) можно записать в другой матричной форме, аналогичной матричным уравнениям (1.10), (1.14), а также в кватернионной форме, аналогичной кватернионным уравнениям (1.16), (1.17). Кроме того, вещественные уравнения (2.2) эквивалентны одному дуальному $2N^{\cdot *}=N_U^* N^*$, в котором $N^*=n^*+sn^{\circ *}$, $N_U^*=n_\omega^*+sn_V^*$. Это уравнение аналогично второму матричному дуальному кинематическому уравнению (1.7) винтового движения твердого тела.

3. Рассмотрим систему инерциальной навигации, построенную следующим образом [6]. На платформе трехстепенного измерителя абсолютной угловой скорости установлены три ньютонометра. Направления осей чувствительности ньютонометров совпадают с направлением осей O_2Y_1, O_2Y_2, O_2Y_3 системы координат $O_2Y_1Y_2Y_3(Y)$, связанной с платформой. Задачей инерциальной навигации будем считать определение декартовых координат x_1, x_2, x_3 точки O_2 в инерциальной системе координат $O_1X_1X_2X_3(X)$, проекций вектора $\mathbf{V}$ абсолютной скорости этой точки на оси систем координат X и Y, а также определение параметров ориентации платформы относительно системы координат X. В качестве инерциальной системы координат примем систему координат с началом в центре масс Земли, оси которой сохраняют свои направления на удаленные звезды неизменными.

Исходной информацией для решения указанной задачи служат показания измерителя абсолютной угловой скорости и ньютонометров. Показания измерителя абсолютной угловой скорости равны (при его идеальном функционировании) проекциям ω_1, ω_2, ω_3 вектора абсолютной угловой скорости ω' платформы на оси координатного трехгранника Y. Показания ньютонометров равны (опять-таки в идеале) проекциям a_1, a_2, a_3 вектора кажущегося ускорения $\mathbf{a}$ на оси трехгранника Y.

Уравнения идеальной работы пространственной системы инерциальной навигации, построенной таким образом, в векторной форме имеют вид [6]:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_1+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}=\mathbf{W},\quad \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_1+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}=\mathbf{V}$$
$$\left(\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}\right)_1+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_i=0 \quad (i=1,2,3) \tag{3.1}$$

$$V_{0i}=\mathbf{V}\cdot\mathbf{e}_i,\quad x_i=\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_i \quad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{3.2}$$

$$\mathbf{W}=\mathbf{a}+\mathbf{g}(\mathbf{r}),\quad \mathbf{W}=\sum_{i=1}^{3}W_i\mathbf{e}_i',\quad \mathbf{g}(\mathbf{r})=\sum_{i=1}^{3}g_i\mathbf{e}_i'$$

$$\mathbf{a}=\sum_{i=1}^{3}a_i\mathbf{e}_i',\quad \mathbf{r}=\sum_{i=1}^{3}y_i\mathbf{e}_i',\quad \boldsymbol{\omega}=\sum_{i=1}^{3}\omega_i\mathbf{e}_i',\quad \mathbf{V}=\sum_{i=1}^{3}V_i\mathbf{e}_i',\quad \mathbf{e}_i=\sum_{k=1}^{3}\alpha_{ik}\mathbf{e}_k'$$

$\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_i'$ — орты систем координат X и Y; α_{ik} (i, k=1, 2, 3) — направляющие косинусы, характеризующие взаимную ориентацию систем координат Y и X, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки O_2 местоположения чувствительных масс ньютонометров, y_i и x_i — проекции этого вектора на оси систем координат Y и X, V_i и V_{0i} — проекции вектора абсолютной скорости $\mathbf{V}$ точки O_2 на оси систем координат Y и X, W_i и g_i — проекции вектора абсолютного ускорения $\mathbf{W}$ точки O_2 и вектора ускорения $\mathbf{g}$ силы тяготения Земли соответственно на оси системы координат Y. Символ $(d/dt)_1$ означает локальное дифференцирование в системе координат Y.

Система пяти векторных уравнений (3.1) эквивалентна системе из пятнадцати скалярных, неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Уравнения (3.1), (3.2) (или 21 скалярное уравнение, им соответствующее) образуют замкнутую систему уравнений, позволяющую по измеренным векторам $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{a}$, по заданному вектору $\mathbf{g}$ и по заданным начальным условиям $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{v}(0)$, $\mathbf{e}_i(0)$ решить задачу инерциальной навигации, т. е. найти y_i, x_i, V_i, V_{0i}, α_{ik}.

Наряду с уравнениями (3.1), (3.2) существуют и другие виды уравнений инерциальной навигации. Например, вместо декартовых координат могут быть использованы криволинейные, вместо направляющих косинусов для определения ориентации объекта могут быть взяты другие кинематические параметры и т. д. [6]. Точность определения навигационных параметров, объем необходимых для этого вычислений в значительной мере зависят от выбора той или иной совокупности уравнений, позволяющих решать задачу инерциальной навигации. От этого выбора во многом зависит и эффективность теоретического рассмотрения вопросов инерциальной навигации. В связи с этим представляет интерес получение новых форм уравнений инерциальной навигации.

Изложенное в пп. 1, 2 позволяет получить уравнения идеальной работы указанной системы инерциальной навигации, использующие параметры винтового движения двух определенным образом выбранных систем координат.

Система координат $O_2X_1'X_2'X_3'(X')$ (фиг. 1) перемещается относительно инерциальной поступательно вместе с точкой O_2. Оси этих систем координат параллельны. Система координат $O_2'Y_1'Y_2'Y_3'(Y')$ связана с концом вектора $d\mathbf{r}/dt$, ее оси параллельны одноименным осям системы координат Y. Остальные обозначения на этой фигуре пояснены ранее.

Система координат Y, связанная с платформой, вращается относительно инерциальной системы координат с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, а ее начало движется с абсолютной скоростью $\mathbf{V}$, равной абсолютной производной по времени от радиус-вектора $\mathbf{r}$. Поэтому мгновенному винту скоростей $\mathbf{U}$ движения системы координат Y относительно X соответствует комплексный вектор $\boldsymbol{\omega}+s\mathbf{V}$:

$$\mathbf{U} \rightrightarrows \boldsymbol{\omega} + s\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} + s\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Положение системы координат Y относительно инерциальной X определим комплексным вектором конечного винтового перемещения Θ. Параметры винтового движения системы координат Y, соответствующие винту конечного перемещения Θ, обозначим через λ_j, λ_j^0. Сказанное представим в виде такой условной записи:

$$X \xrightarrow[\Theta \rightrightarrows \lambda_j + s\lambda_j^\circ (j=0,1,2,3)]{\mathbf{U} \rightrightarrows \boldsymbol{\omega} + s\mathbf{V}} Y \tag{3.3}$$

Система координат Y' вращается относительно инерциальной системы координат с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, а ее начало (точка O_2') движется относительно системы координат X' со скоростью $\mathbf{W}$, равной абсолютной производной по времени от вектора $\mathbf{V}$. Поэтому мгновенному винту скоростей $\mathbf{U}_+$ движения системы координат Y' относительно X' соответствует комплексный вектор $\boldsymbol{\omega}+s\mathbf{W}$:

$$\mathbf{U}_+ \rightrightarrows \boldsymbol{\omega}+s\mathbf{W}=\boldsymbol{\omega}+sd\mathbf{V}\,/\,dt=\boldsymbol{\omega}+sd^2\mathbf{r}\,/\,dt^2$$

Положение системы координат Y' относительно системы координат X' определим комплексным вектором конечного винтового перемещения Θ_+. Параметры винтового движения системы координат Y', соответствующие винту конечного перемещения Θ_+, обозначим через λ_{j+}, λ_{j+}^0. Так как во все время движения одноименные оси систем координат X и X', Y и Y' параллельны, то $\lambda_j=\lambda_{j+}$. Изложенному соответствует условная запись

$$X' \xrightarrow[\Theta_+ \rightrightarrows \lambda_j + s\lambda_{j+}^\circ (j=0,1,2,3)]{\mathbf{U}_+ \rightrightarrows \boldsymbol{\omega} + s\mathbf{W}} Y \tag{3.4}$$

Задача системы инерциальной навигации, идеальная работа которой описывается уравнениями (3.1), (3.2), заключается в нахождении проекций векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{V}$ на оси связанного и инерциального координатных трехгранников, а также в определении взаимной ориентации этих трехгранников по известным проекциям векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{W}=\mathbf{a}+\mathbf{g}$ на оси связанного трехгранника. Из результатов, полученных в п. 2, следует, что эта задача сводится к определению параметров винтового движения систем координат Y и Y', движение которых относительно систем координат X и X' иллюстрируется схемами (3.3) и (3.4).

Анализ схем (3.3), (3.4), использование результатов п. 2 и уравнений (3.1) приводит к следующим уравнениям идеальной работы описанной системы инерциальной навигации:

$$2n^\bullet=n_\omega n,\ 2n_+^{\bullet\circ}=n_\omega n_+^\circ+n_W n,\ 2n^{\bullet\circ}=n_\omega n^\circ+2n_+^\circ \tag{3.5}$$

$$n_{0V}=2n^T n_+^\circ,\qquad n_{0r}=2n^T n^\circ,\qquad n_V=2n_+^\circ n^T,\qquad n_r=2n^\circ n^T \tag{3.6}$$

Здесь n и n° – матрицы параметров винтового движения системы координат Y, они составлены из параметров λ_j и λ_j° и имеют вид матрицы N (см. выражение (1.8)); n_+° – матрица параметров винтового движения системы координат Y', она составлена из параметров λ_{j+}° и имеет ту же структуру, что и матрицы n, n°. Матрицы n_ω, n_W, n_V, n_r построены из проекций векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{r}$ соответственно на оси связанной системы координат Y. Матрицы n_{0r} и n_{0V} построены из проекций векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{V}$ на оси инерциальной системы координат. Все перечисленные матрицы имеют одинаковую структуру (см. выражения (1.12)).

Уравнения (3.5), (3.6) можно записать в другом матричном виде

$$2\theta^\bullet=n_\omega\theta,\quad 2\theta_+^{\bullet\circ}=n_\omega\theta_+^\circ+n_W\theta,\quad 2\theta^{\bullet\circ}=n_\omega\theta^\circ+2\theta_+^\circ \tag{3.7}$$

$$\theta^+=\|\,\lambda_0^+\ \ \lambda_1^+\ \ \lambda_2^+\ \ \lambda_3^+\,\|^T;\quad \theta^+=\theta,\theta^\circ,\theta_+^\circ;\quad \lambda_j^+=\lambda_j,\lambda_j^\circ,\overset{\circ}{\lambda}_{j+}$$

$$\|\,0\ \ V_{01}\ \ V_{02}\ \ V_{03}\,\|^T=2n^T\theta_+^\circ,\quad \|\,0\ \ x_1\ \ x_2\ \ x_3\,\|^T=2n^T\theta^\circ \tag{3.8}$$

$$\|\,0\ \ V_1\ \ V_2\ \ V_3\,\|^T=2n_+^\circ\|\,\lambda_0\ \ -\lambda_1\ \ -\lambda_2\ \ -\lambda_3\,\|^T,$$

$$\|\,0\ \ y_1\ \ y_2\ \ y_3\,\|^T=2n^\circ\|\,\lambda_0\ \ -\lambda_1\ \ -\lambda_2\ \ -\lambda_3\,\|^T \tag{3.9}$$

Для сферического поля тяготения Земли ускорение силы тяготения $\mathbf{g}=-\mu r^{-3}\mathbf{r}$, $r=|\mathbf{r}|$, где μ – произведение массы Земли на гравитационную постоянную.

Поэтому

$$n_W=n_a-\mu r^{-3}n_r=n_a-2\mu(2\lambda^\circ)^{-3}n^\circ n^T \tag{3.10}$$

$$\lambda^\circ=(\lambda_0^{\circ2}+\lambda_1^{\circ2}+\lambda_2^{\circ2}+\lambda_3^{\circ2})^{1/2}$$

Матрица n_a построена из проекций вектора кажущегося ускорения $\mathbf{a}$ на оси связанной системы координат Y.

С учетом выражения (3.10) второе из уравнений (3.5) в этом случае принимает вид

$$2n_+^{\bullet\circ}=n_\omega n_+^\circ-2\mu(2\lambda^\circ)^{-3}n^\circ+n_a n \tag{3.11}$$

а второе из уравнений (3.7) будет таким

$$2\theta_+^{\bullet\circ}=n_\omega\theta_+^\circ-2\mu(2\lambda^\circ)^{-3}\theta^\circ+n_a\theta \tag{3.12}$$

Уравнения (3.5), (3.6) и (3.7)–(3.9) представляют собой две матричные параметрические формы уравнений инерциальной навигации. Уравнения (3.5), (3.6) удобно применять при проведении различных аналитических выкладок (когда возникает необходимость проводить операции обращения матриц). Уравнения (3.7)–(3.9), эквивалентные уравнениям (3.5), (3.6), целесообразно использовать при проведении конкретных расчетов (при реализации уравнений инерциальной навигации на бортовом вычислительном устройстве).

Представляет интерес кватернионная запись уравнений (3.5), (3.6), имеющая вид

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt}=\boldsymbol{\lambda}\circ\boldsymbol{\omega}_Y,\quad 2\frac{d\boldsymbol{\lambda}_+^\circ}{dt}=\boldsymbol{\lambda}_+^\circ\circ\boldsymbol{\omega}_Y+\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{W}_Y$$

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}^\circ}{dt}=\boldsymbol{\lambda}^\circ\circ\boldsymbol{\omega}_Y+2\boldsymbol{\lambda}_+^\circ$$

$$\mathbf{V}_X=2\boldsymbol{\lambda}_+^\circ\circ\overline{\boldsymbol{\lambda}},\ \mathbf{r}_X=2\boldsymbol{\lambda}^\circ\circ\overline{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$\mathbf{V}_Y=2\overline{\boldsymbol{\lambda}}\circ\boldsymbol{\lambda}_+^\circ,\ \mathbf{r}_Y=2\overline{\boldsymbol{\lambda}}\circ\boldsymbol{\lambda}^\circ$$

$$2\frac{d\boldsymbol{\lambda}_+^\circ}{dt}=\boldsymbol{\lambda}_+^\circ\circ\boldsymbol{\omega}_Y-2\mu(2\lambda^\circ)^{-3}\boldsymbol{\lambda}^\circ+\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{a}_Y\quad \text{для}\quad \mathbf{g}=-\mu r^{-3}\mathbf{r}$$

Здесь $\mathbf{W}_Y=W_1\mathbf{i}_1+W_2\mathbf{i}_2+W_3\mathbf{i}_3$, $\mathbf{a}_Y=a_1\mathbf{i}_1+a_2\mathbf{i}_2+a_3\mathbf{i}_3$ – гиперкомплексные отображения векторов $\mathbf{W}$, а на связанный базис, $\mathbf{r}_X=x_1\mathbf{i}_1+x_2\mathbf{i}_2+x_3\mathbf{i}_3$ и $\mathbf{V}_X=V_{01}\mathbf{i}_1+V_{02}\mathbf{i}_2+V_{03}\mathbf{i}_3$ — гиперкомплексные отображения векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{V}$ на инерциальный базис; кватернионы $\boldsymbol{\lambda}_+{}^\circ=\lambda_{0+}{}^\circ+\lambda_{1+}{}^\circ\mathbf{i}_1+\lambda_{2+}{}^\circ\mathbf{i}_2+\lambda_{3+}{}^\circ\mathbf{i}_3$, $\overline{\boldsymbol{\lambda}}=\lambda_0-\lambda_1\mathbf{i}_1-\lambda_2\mathbf{i}_2-\lambda_3\mathbf{i}_3$; скалярные части кватернионов $\boldsymbol{\lambda}_+{}^\circ\circ\overline{\boldsymbol{\lambda}}$, $\boldsymbol{\lambda}^\circ\circ\overline{\boldsymbol{\lambda}}$ равны нулю.

Из совокупности 28 скалярных уравнений, образующих систему (3.7) — (3.9), дифференциальных уравнений двенадцать, на три уравнения меньше, чем в совокупности уравнений (3.1), (3.2). Если задачей инерциальной навигации является определение проекций векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{V}$ на оси инерциальной системы координат (а также определение ориентации платформы в этой системе координат), то необходимо решать 18 уравнений (3.7), (3.8) вместо 21 в случае использования уравнений (3.1), (3.2). Если же требуется еще и вычисление проекций вектора $\mathbf{V}$ на оси связанной системы координат, то необходимо решать 21 параметрическое уравнение (уравнения (3.7), (3.8) и первое из матричных уравнений (3.9)), т. е. столько же, сколько при использовании уравнений (3.1), (3.2).

К недостаткам параметрических уравнений инерциальной навигации можно отнести то, что непосредственное интегрирование этих уравнений предполагает проведение вычислительных операций (правда простейших — умножения и сложения) над показаниями ньютонометров до интегрирования этих показаний. Это подтверждают члены $n_a n$ и $n_a\theta$ в уравнениях (3.11), (3.12).

К достоинствам параметрических уравнений инерциальной навигации следует отнести то, что они оперируют с единой системой кинематических параметров: системой параметров λ_j, $\lambda_j{}^\circ$, $\lambda_{j+}{}^\circ$ ($j=0, 1, 2, 3$) винтового движения двух координатных трехгранников (Y и Y'). Известно, что в ряде случаев в качестве кинематических параметров сферического движения в уравнениях инерциальной навигации целесообразно использовать параметры Родрига — Гамильтона, что дает повышение точности определения ориентации объекта и некоторые другие положительные эффекты. В используемом подходе параметры Родрига — Гамильтона λ_j являются частью единой системы кинематических параметров винтового движения, поэтому кинематические уравнения в параметрах Родрига — Гамильтона естественным образом вписываются в общую структуру уравнений инерциальной навигации.

Укажем также на то, что параметрические уравнения идеальной работы пространственных систем инерциальной навигации с принудительно вращающейся платформой и со стабилизированной в азимуте платформой, которые могут быть получены из уравнений (3.5), (3.6), имеют динамическую аналогию с регулярными уравнениями пространственной задачи двух тел [7] и обладают для определенного класса движений объекта лучшей численной устойчивостью в сравнении с обычными уравнениями.

Но этот вопрос требует отдельного изложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Диментберг М. Ф.* Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 328 с.
2. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
3. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
4. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
5. *Челноков Ю. Н.* Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 32.
6. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации. Автономные системы. М.: Наука, 1966. 580 с.
7. *Stiefel E. L., Scheifele C.* Linear and regular celestial mechanics. Berlin — Heidelberg — New York: Springer — Verlag, 1971.— Рус. перевод: М.: Наука, 1975. 304 с.

Саратов

Поступила в редакцию
27.III.1979