УДК 539.376

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН В ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

ВЫЛЕКЖАНИН В. Д.

Получены неравенства, связывающие физические и геометрические величины в задаче кручения призматических стержней с многосвязным поперечным сечением при установившейся ползучести, характеризуемой степенным законом.

1. Рассмотрим призматический стержень, поперечное сечение которого представляет многосвязную область Ω с границей из $N+1$ кривых $C_1, C_2, \ldots, C_N, C$, причем Ω лежит внутри C и вне C_i. Обозначим через H_i внутренность C_i (область, занятая отверстием в материале), A_i – площадь H_i, A – площадь Ω, $\Gamma=C_1+C_2+\ldots+C_N+C$, $\Delta=\Omega+H_1+H_2+\ldots+H_N+\Gamma$, ν – внешняя нормаль к Γ в переменной точке. Как известно [1], задача о кручении стержня при установившейся ползучести со степенным законом сводится к краевой задаче для функции напряжений

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(|\nabla\Psi|^{(1-\mu)/\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(|\nabla\Psi|^{(1-\mu)/\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)=-2 \text{ в } \Omega \tag{1.1}$$

$$\Psi|_C=0,\quad \Psi|_{C_i}=a_i\quad (0<a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_N\leqslant\Psi_m) \tag{1.2}$$

Постоянные a_i определяются из условий

$$\oint_{C_i}|\nabla\Psi|^{(1-\mu)/\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}dS=-2A_i\quad (i=1,2,\ldots,N);\quad \nabla\Psi=\operatorname{grad}\Psi \tag{1.3}$$

где μ – величина, обратная показателю ползучести $(0<\mu<1)$, Ψ_m – наибольшее значение Ψ в Ω.

Величина D_μ, определяемая равенством

$$D_\mu=2\iint_\Omega\Psi\,d\Omega+2\sum_{i=1}^N a_iA_i\quad (d\Omega=dx\,dy)$$

называется геометрической жесткостью при кручении; ее можно определить, как максимальное значение некоторого функционала.

Пусть $f=f(x, y)$ – функция, определенная и непрерывная в Ω и на Γ, удовлетворяющая условиям $f|_C=0$, $f|_{C_i}=b_i$, где b_i – произвольные постоянные. Считая, что функции f и Ψ продолжены соответственно, как b_i и a_i на H_i, нетрудно установить (см. [2]):

$$D_\mu\geqslant\left(2\iint_\Delta f\,d\Omega\right)^{1+\mu}\left(\iint_\Delta|\nabla f|^{(1+\mu)/\mu}d\Omega\right)^{-\mu} \tag{1.4}$$

Равенство здесь будет, когда f пропорциональна Ψ.

Лемма. Пусть числа u_i и v_i таковы, что $0\leqslant u_1<v_1<u_2<\ldots<v_{N-1}<u_N$. Тогда

$$(u_1+u_2-v_1+\ldots+u_N-v_{N-1})^t-(u_1^t+u_2^t-v_1^t+\ldots+u_N^t-v_{N-1}^t)\left\}\begin{matrix}\leqslant 0 & (t>1)\\ \geqslant 0 & (0<t<1)\end{matrix}\right. \tag{1.5}$$

Доказательство. Пусть числа U, V, W, t таковы, что $0<U<V<W$, $t>1$. Рассмотрим функцию $f(t, U, V, W)=(U-V+W)^t-U^t+V^t-W^t$. Зафиксировав любые допустимые значения t, V, W, обратим f в функцию одного переменного U. Поскольку $\partial f/\partial U>0$, то f на промежутке $0<U<V$ возрастает. Ввиду того что при $U\to V-0$ имеем $f\to-0$, то всюду на $(0, V)$ функция $f<0$, т. е. $(U-V+W)^t<U^t-V^t+W^t$. Полагая $U=u_1+u_2-v_1+\ldots+u_{k-1}-v_{k-2}$, $V=v_{k-1}$, $W=u_k$, получаем при $k=2, 3, \ldots, N$ совокупность неравенств, приводящую к (1.5.1). Доказательство (1.5.2) аналогично.

Равенство в (1.5) будет только при $N=1$.

2. Область пространства, ограниченная плоскостью x, y и поверхностью $z=\Psi(x, y)$, образует «холм напряжений». Применим к нему симметризацию Шварца относительно оси z [3]. При этом получим тело вращения «круглый холм». Основа-

ние холма — область Δ — переходит в круг Δ^* равной площади, который является основанием круглого холма. Каждое плато холма переходит в плато круглого холма, и эти два плато имеют одинаковую площадь. Проекция круглого холма на плоскость x, y дает совокупность концентрических круговых колец. Радиусы их окружностей обозначим α_1, β_1, α_2, $\beta_2, \ldots, \alpha_N$, β_N $(0 \leqslant \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_N < \beta_N)$.

Если круглый холм имеет плоскую вершину, то $\alpha_1 > 0$, если — центральный пик, то $\alpha_1 = 0$. Пусть в результате симметризации C, C_i, H_i, Ω, Δ, Ψ переходят соответственно в C^*, C_i^*, H_i^*, Ω^*, Δ^*, Ψ^* и для определенности считаем, что $\alpha_1 > 0$.

Симметризация Шварца увеличивает все отношение в правой части (1.4) или его минимум [3]. Тогда

$$D_\mu = \left(2 \iint_\Delta \Psi \, d\Omega \right)^{1+\mu} \left(\iint_\Delta |\nabla \Psi|^{(1+\mu)/\mu} d\Omega \right)^{-\mu} \leqslant$$

$$\leqslant \left(2 \iint_{\Delta^*} f^* \, d\Omega \right)^{1+\mu} \left(\iint_{\Delta^*} |\nabla f^*|^{(1+\mu)/\mu} d\Omega \right)^{-\mu} \tag{2.1}$$

Определив непрерывную функцию Ψ^* — решение задачи вида (1.1), (1.2) (с заменой Ω, C, C_i на Ω^*, C^*, C_i^*), найдем

$$D_\mu^* = 2 \iint_{\Delta^*} \Psi^* \, d\Omega = \frac{2\pi}{3+\mu} \sum_{i=1}^{N} (\beta_i^{3+\mu} - \alpha_i^{3+\mu}) \tag{2.2}$$

Установив величину D_μ^* вариационным путем, имеем

$$D_\mu^* = \left(2 \iint_{\Delta^*} \Psi^* \, d\Omega \right)^{1+\mu} \left(\iint_{\Delta^*} |\nabla \Psi^*|^{(1+\mu)/\mu} d\Omega \right)^{-\mu} \geqslant$$

$$\geqslant \left(2 \iint_{\Delta^*} f^* \, d\Omega \right)^{1+\mu} \left(\iint_{\Delta^*} |\nabla f^*|^{(1+\mu)/\mu} d\Omega \right)^{-\mu} \geqslant D_\mu \tag{2.3}$$

Рассмотрим стержень с поперечным сечением в форме кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями. Пусть в нем площадь поперечного сечения равна площади поперечного сечения заданного многосвязного стержня, а площадь отверстия — общей площади отверстий многосвязного стержня. Поперечное сечение и жесткость кручения такого стержня обозначим через Ω° и D_μ°

$$D_\mu^\circ = \frac{2\pi}{3+\mu} [\beta_N^{3+\mu} - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \beta_1^2 + \alpha_3^2 - \ldots + \alpha_N^2 - \beta_{N-1}^2)^{1/2(3+\mu)}] \tag{2.4}$$

Полагая в (1.5) $u_i = \alpha_i^2$, $v_i = \beta_i^2$, $t = 1/2(3+\mu)$, с учетом (2.2), (2.4) находим, что $D_\mu^* \leqslant D_\mu^\circ$, и ввиду (2.3) имеем

$$D_\mu \leqslant D_\mu^\circ = \frac{2}{(3+\mu)\pi^{1/2(1+\mu)}} \left[\left(A + \sum_{i=1}^{N} A_i \right)^{1/2(3+\mu)} - \left(\sum_{i=1}^{N} A_i \right)^{1/2(3+\mu)} \right] \tag{2.5}$$

Это неравенство выражает теорему: из всех многосвязных стержней с заданной площадью и с заданной общей площадью отверстий максимальное значение величины D_μ имеет кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями.

Этим обобщается аналогичная теорема для упругого кручения [4].

Для дальнейшего введем криволинейные координаты в Ω. Пусть одна координатная линия будет элементом дуги вдоль линии уровня функции $\Psi(x, y)$, другая — нормалью к этой кривой. Обозначим через $B_i(\Psi_\theta)$ площадь в Ω между кривыми $\Psi = a_i$ и $\Psi = \Psi_\theta \leqslant a_{i+1}$, приняв $a_0 = 0$, $a_{N+1} = \Psi_m$:

$$B_i(\Psi_\theta) = \int_{a_i}^{\Psi_\theta} d\Psi \oint_{C(\Psi)} \frac{dS}{|\nabla \Psi|} \tag{2.6}$$

где внутренний интеграл берется по линии уровня $C(\Psi)$ по переменной Ψ. Пусть S – длина $C(\Psi_\theta)$. Дифференцируя и используя неравенство Гельдера, находим

$$\frac{dB_i(\Psi_\theta)}{d\Psi_\theta}=\oint\limits_{C(\Psi_\theta)}\frac{dS}{|\nabla\Psi|}\geqslant S^{1+\mu}\left(\oint\limits_{C(\Psi_\theta)}|\nabla\Psi|^{1/\mu}dS\right)^{-\mu} \tag{2.7}$$

Обозначим через $B(\Psi_\theta)$ площадь внутри $C(\Psi_\theta)$, через n – внешнюю нормаль к $C(\Psi_\theta)$ и применим теорему Бредта

$$\oint\limits_{C(\Psi_\theta)}|\nabla\Psi|^{1/\mu}dS=-\oint\limits_{C(\Psi_\theta)}|\nabla\Psi|^{(1-\mu)/\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial n}dS=2B(\Psi_\theta) \tag{2.8}$$

Используя классическое изопериметрическое неравенство $S^2\geqslant 4\pi B(\Psi_\theta)$, при помощи (2.7), (2.8) находим

$$\frac{dB_i(\Psi_\theta)}{d\Psi_\theta}\geqslant 2\pi^{1/2(1+\mu)}[B(\Psi_\theta)]^{1/2(1-\mu)} \tag{2.9}$$

Выразив $B(\Psi_\theta)$, проинтегрируем (2.9):

$$\int\limits_{B_i(a_i)}^{B_i(a_{i+1})}[B(a_i)-B_i(\Psi_\theta)]^{1/2(\mu-1)}dB_i(\Psi_\theta)\geqslant 2\pi^{1/2(1+\mu)}\int\limits_{a_i}^{a_{i+1}}d\Psi_\theta \tag{2.10}$$

Но $B_i(a_i)=0$. Вычислим интегралы в (2.10) и, полагая $i=0, 1, 2, \ldots, N$, просуммируем все неравенства. Используя (1.5.2), установим, что левая часть полученного неравенства не превосходит величины $2A^{1/2}/(1+\mu)$. Окончательно имеем

$$\Psi_m\leqslant(A/\pi)^{1/2(1+\mu)}/(1+\mu) \tag{2.11}$$

В (2.10) верхние пределы примем переменными

$$[B(a_i)]^{1/2(1+\mu)}-[B(a_i)-B_i(\Psi_\theta)]^{1/2(1+\mu)}\geqslant(1+\mu)\pi^{1/2(1+\mu)}(\Psi_\theta-a_i) \tag{2.12}$$

Просуммируем (2.10) от 0 до $j-1$:

$$\sum_{i=0}^{j-1}[B(a_i)]^{1/2(1+\mu)}-\sum_{i=0}^{j-1}[B(a_i)-B_i(a_{i+1})]^{1/2(1+\mu)}\geqslant(1+\mu)\pi^{1/2(1+\mu)}a_j \tag{2.13}$$

Заменим в (2.12) индекс i на j и сложим это выражение с (2.13). При помощи (1.5.2) установим, что левая часть полученного неравенства не превосходит величины $[B_0(\Psi_\theta)]^{1/2(1+\mu)}$, где $B_0(\Psi_\theta)$ – площадь в Ω между кривыми $\Psi=0$ и $\Psi=\Psi_\theta$. Тогда

$$B_0(\Psi_\theta)\geqslant\pi[(1+\mu)\Psi_\theta]^{2/(1+\mu)} \tag{2.14}$$

Определим величину

$$D_\mu^i(\Psi_\theta)=\int\limits_{a_i}^{\Psi_\theta}d\Psi\oint\limits_{C(\Psi)}|\nabla\Psi|^{1/\mu}dS \tag{2.15}$$

Дифференцируем (2.15) и, используя (2.8) и (2.14), получим

$$\frac{d}{d\Psi_\theta}D_\mu^i(\Psi_\theta)=\oint\limits_{C(\Psi_\theta)}|\nabla\Psi|^{1/\mu}dS=2B(\Psi_\theta)=$$

$$=2\left[A+\sum_{j=i+1}^{N}A_j-B_\theta(\Psi_\theta)\right]\leqslant 2\left\{A+\sum_{j=i+1}^{N}A_j-\pi[(1+\mu)\Psi_\theta]^{2/(1+\mu)}\right\} \tag{2.16}$$

Интегрируя (2.16), полагая $i=0, 1, 2, \ldots, N$ и складывая полученные неравенства, находим окончательно

$$D_\mu - 2\sum_{i=1}^{N} a_i A_i \leqslant 2\Psi_m \left\{ A - \frac{1+\mu}{3+\mu}\pi[(1+\mu)\Psi_m]^{2/(1+\mu)} \right\} \tag{2.17}$$

Так как $a_i \leqslant \Psi_m$, то

$$D_\mu \leqslant 2\Psi_m \left\{ A + \sum_{i=1}^{N} A_i - \frac{1+\mu}{3+\mu}\pi[(1+\mu)\Psi_m]^{2/(1+\mu)} \right\}. \tag{2.18}$$

Это соотношение можно упростить. Выражение в фигурных скобках представляет выпуклую вверх функцию от Ψ_m. Проводя касательную к графику в точке с абсциссой Ψ_m, равной правой части (2.11), оценим сверху выражение в фигурных скобках через линейную функцию. Решив квадратное неравенство, получаем

$$\Psi_m \geqslant M[K - (K^2 - D_\mu/MA)^{1/2}] \tag{2.19}$$

$$M = \frac{3+\mu}{4(1+\mu)}\left(\frac{A}{\pi}\right)^{1/2(1+\mu)}, \qquad K = \left(\frac{4}{3+\mu}A + \sum_{i=1}^{N} A_i\right) \Big/ A$$

Просуммируем выражения (2.10) от $i=j+1$ до N:

$$\sum_{i=j+1}^{N} [B(a_i)]^{1/2(1+\mu)} - \sum_{i=j+1}^{N} [B(a_i) - B_i(a_{i+1})]^{1/2(1+\mu)} \geqslant (1+\mu)\pi^{1/2(1+\mu)}(\Psi_m - a_{j+1}) \tag{2.20}$$

Если в (2.10) нижние пределы взять переменными, то получим

$$[B(a_i) - B_i(\Psi_\theta)]^{1/2(1+\mu)} - [B(a_i) - B_i(a_{i+1})]^{1/2(1+\mu)} \geqslant (1+\mu)\pi^{1/2(1+\mu)}(a_{i+1} - \Psi_\theta) \tag{2.21}$$

Прибавим (2.21) к (2.20) и заменим индекс i на j. Применяя (1.5.2), нетрудно убедиться, что левая часть полученного неравенства не превосходит величины $[A - B_0(\Psi_\theta)]^{1/2(1+\mu)}$.

Таким образом

$$A - B_0(\Psi_\theta) \geqslant \pi[(1+\mu)(\Psi_m - \Psi_\theta)]^{2/(1+\mu)} \tag{2.22}$$

Рассмотрим величину

$$G_\mu{}^i(\Psi_\theta) = 2\int_{a_i}^{\Psi_\theta} \Psi\, d\Psi \oint_{C(\Psi)} \frac{dS}{|\nabla\Psi|} \tag{2.23}$$

Продифференцируем (2.23) с учетом (2.7) – (2.9) и (2.22):

$$\frac{d}{d\Psi_\theta} G_\mu{}^i(\Psi_\theta) = 2\Psi_\theta \oint_{C(\Psi_\theta)} \frac{dS}{|\nabla\Psi|} \geqslant 4\pi^{1/2(1+\mu)}\Psi_\theta [B(\Psi_\theta)]^{1/2(1-\mu)} =$$

$$= 4\pi^{1/2(1+\mu)}\Psi_\theta \left[A - B_0(\Psi_\theta) + \sum_{j=i+1}^{N} A_j \right]^{1/2(1-\mu)} \geqslant$$

$$\geqslant 4\pi^{1/2(1+\mu)}\Psi_\theta \left\{ \sum_{j=i+1}^{N} A_j + \pi[(1+\mu)(\Psi_m - \Psi_\theta)]^{2/(1+\mu)} \right\}^{1/2(1-\mu)} \tag{2.24}$$

Интегрируя (2.24) при $i=0, 1, 2, \ldots, N$ $(a_i \leqslant \Psi_\theta \leqslant a_{i+1})$ и складывая неравенства, получаем окончательно

$$D_\mu - 2\sum_{i=1}^{N} a_i A_i \geqslant$$

$$\geqslant 4\pi^{1/2(1+\mu)} \sum_{i=0}^{N} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \Psi_\theta \left\{ \sum_{j=i+1}^{N} A_j + \pi[(1+\mu)(\Psi_m - \Psi_\theta)]^{2/(1+\mu)} \right\}^{1/2(1-\mu)} d\Psi_\theta \tag{2.25}$$

Интегралы (2.25) в элементарных функциях не выражаются, за исключением случая $i=N$. Однако на каждом из промежутков $[a_i, a_{i+1}]$ выражение в фигурных скобках – убывающая выпуклая вниз функция от Ψ_θ, что позволяет легко оценить интегралы снизу. Например, очевидно, что

$$D_\mu-2\sum_{i=1}^{N} a_iA_i\geqslant$$
$$\geqslant 2\pi^{1/2(1+\mu)}\sum_{i=0}^{N}\left\{\sum_{j=i+1}^{N} A_j+\pi[(1+\mu)(\Psi_m-a_{i+1})]^{2/(1+\mu)}\right\}^{1/2(1-\mu)}(a_{i+1}^2-a_i^2) \tag{2.26}$$

Если общая площадь отверстий мала, то

$$D_\mu-2\sum_{i=1}^{N} a_iA_i\geqslant\frac{2\pi}{3+\mu}[(1+\mu)\Psi_m]^{(3+\mu)/(1+\mu)} \tag{2.27}$$

В случае двухсвязного стержня с замкнутым тонкостенным профилем (труба) имеем $a_1\approx\Psi_m$, и из (2.26) следует

$$D_\mu\geqslant 2\pi^{1/2(1+\mu)}A_1^{1/2(1-\mu)}\Psi_m^2+2\Psi_mA_1 \tag{2.28}$$

Заметим, что вместо (2.28) можно получить приближенную формулу для D_μ, если считать функцию Ψ меняющейся линейно по толщине h стенки от нуля до Ψ_m. Тогда $|\nabla\Psi|=\Psi_m/h$ и при помощи (2.6), (2.8), (2.23) нетрудно установить соотношения

$$\Psi_m=2h^{1+\mu}\{\ln(1+A/A_1)\}^{-\mu},\qquad D_\mu=A\{2h/\ln(1+A/A_1)\}^{1+\mu}$$

Эти формулы в отличие от известных в литературе не содержат длины средней линии профиля.

В предельном случае, когда кручение упругое ($\mu=1$), из (2.5), (2.11), (2.17) – (2.19), (2.25) следуют изопериметрические неравенства [4, 5]:

$$D_1\leqslant\frac{1}{2\pi}\left[A_0^2-\left(\sum_{i=1}^{N}A_i\right)^2\right],\quad A_0=A+\sum_{i=1}^{N}A_i,\quad \Psi_m\leqslant\frac{A}{2\pi},\quad D_1-2\sum_{i=1}^{N}a_iA_i\leqslant\frac{A^2}{2\pi}$$

$$D_1\leqslant\frac{A^2}{2\pi}+2\Psi_m\sum_{i=1}^{N}A_i,\qquad \Psi_m\geqslant\frac{1}{2\pi}[A_0-(A_0^2-2\pi D_1)^{1/2}],$$

$$\Psi_m^2\leqslant\frac{1}{2\pi}\left(D_1-2\sum_{i=1}^{N}a_iA_i\right)$$

где A_0 – площадь, ограниченная кривой C, а равенство будет в случае, когда Ω – круговое кольцо.

В другом предельном случае, когда Ω односвязна (все $A_i=0$), из (2.5), (2.11), (2.25) следуют изопериметрические неравенства [2]:

$$D_\mu\leqslant\frac{2}{(3+\mu)\pi^{1/2(1+\mu)}}A^{1/2(3+\mu)},\qquad \Psi_m\leqslant\frac{1}{1+\mu}\left(\frac{A}{\pi}\right)^{1/2(1+\mu)},$$

$$D_\mu\geqslant\frac{2\pi}{3+\mu}[(1+\mu)\Psi_m]^{(3+\mu)/(1+\mu)}.$$

Равенство имеет место, когда Ω – круг.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
2. *Вылекжанин В. Д.* Некоторые изопериметрические соотношения в теории кручения призматических стержней при установившейся ползучести.– Инж. ж. МТТ, 1967, № 4, с. 151–154.
3. *Полиа Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
4. *Polya G., Weinstein A.* On the torsional rigidity of multiply connected cross — sections.— Ann. Math., 1950, v. 52, No. 2, p. 154–163.
5. *Payne L. E.* Some isoperimetric inequalities in the torsion problem for multiply connected regions.— In: Studies in Mathematical Analysis and Related Topics. Stanford. Calif. Univ. Press, 1962, p. 270–280.

Йошкар-Ола

Поступила в редакцию
5.I.1979