

Для определения n вещественных постоянных c_1, c_2, \dots, c_n имеется n условий

$$w(b_k) - w(a_k) = 2 \int_{a_k}^{b_k} \operatorname{Re}[q_1 \Phi^+(t) + q_2 \Psi^+(t)] dt \quad (1.14)$$

образующих систему n линейных алгебраических уравнений относительно этих констант. Если решение системы (1.14) известно, то комплексные потенциалы (1.12) и (1.13) удовлетворяют всем граничным условиям и решают смешанную задачу для полуплоскости (1.1)–(1.3) при связях напряжений и перемещений с функциями $\Phi(z_1)$ и $\Psi(z_2)$ в виде формул (1.4).

Решение (1.12) и (1.13) не ограничено вблизи точек a_k, b_k . Построение решения, ограниченного вблизи заранее заданных концов, легко осуществить методами, изложенными в [1].

2. В качестве примера сформулируем и решим следующую задачу для верхней полуплоскости с границей вдоль действительной оси x . Считаем, что на части границы от $-\infty$ до 0 отсутствуют вертикальные смещения $v^+ = 0$. В области $0 < x < x_0$ действует равномерно распределенная нормальная нагрузка $\sigma_y^+ = q_0$. При $x_0 < x < \infty$ смещения равны $v^+ = h$. Вдоль всей границы полуплоскости отсутствуют касательные напряжения $\tau_{xy}^+ = 0$.

Ограниченное в точке $x=0$ и неограниченное в точке $x=x_0$ общее решение смешанной задачи для верхней ортогональной полуплоскости, исчезающее на бесконечности, находим в виде (1.12) и (1.13):

$$\Phi(z) = -\frac{\mu_2}{\mu_1} \Psi(z) = \frac{q_0}{2} \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \left[1 - \sqrt{\frac{z}{z - x_0}} \right] \quad (2.1)$$

Используя представления (1.4), граничные условия для смещений v , функцию (2.1), находим формулу

$$x_0 = 2hE_1 / [(1 - \nu_1^2) \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2) \pi q_0] \quad (2.2)$$

определяющую длину загруженной части границы полуплоскости в зависимости от упругих свойств среды, величины h и нагрузки q_0 . Смещения границы полуплоскости при $0 \leq x \leq x_0$ на основании (1.4) и (2.1) равны

$$v(x) = q_0 \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2) \beta_{11} \left[x_0 \arcsin \sqrt{\frac{x}{x_0} - \sqrt{x(x_0 - x)}} \right], \quad \beta_{11} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1}$$

где E_1, ν_1 — модуль упругости и коэффициент Пуассона в направлении оси x , величина x_0 определяется формулой (2.2). Заметим, что для изотропного материала ($\beta_1 = \beta_2 = 1$) формула (2.2) совпадает с известным результатом [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
3. Баренблатт Г. И., Христианович С. А. Об обрушении кровли при горных выработках. — Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 11, с. 75–86.

Донецк

Поступила в редакцию
16.VII.1979

УДК 539.374

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

АННИН В. Д., САДОВСКИЙ В. М.

Дано приближенное решение задачи упругопластического кручения стержня прямоугольного сечения, когда пластические зоны развиваются лишь вблизи одной пары сторон.

1. Пусть цилиндрический стержень прямоугольного поперечного сечения D со сторонами $a < b$ (фиг. 1) скручивается моментом M . Обозначим: α — угол закручивания на единицу длины G — модуль сдвига, k_s — предел текучести при чистом сдвиге, $\lambda = G\alpha k_s^{-1}$.

Пусть α_* и α^* — значения угла закручивания, при которых модуль максимального касательного напряжения достигает значения k_s в точках $(\pm a/2, 0)$ и в точках $(0, \pm b/2)$ соответственно. Известно [1], что $\alpha_* = k_s (2Ga\eta)^{-1}$, причем безразмерный параметр η меняется от 0,339 до 0,500, когда отношение сторон b/a меняется от единицы до бесконечности.

Для $\alpha_* < \alpha < \alpha^*$ упругопластическая граница состоит [2, 3] из двух симметричных относительно оси Ox кривых Γ^+ и Γ^- , расположенных симметрично относительно оси Oy . При этом всякая прямая, параллельна оси Ox , пересекает каждую из кривых Γ^+ и Γ^- не более чем в одной точке.

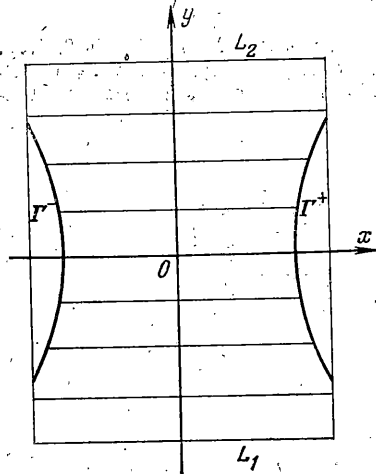
Обозначим через B открытую область, определяемую как разность прямоугольника D и областей, ограниченных Γ^+ и $x = a/2$, Γ^- и $x = -a/2$. На фиг. 1 область B заштрихована. Обозначим далее через S разность областей D и B .

Пусть L_1 и L_2 — общие части границ D и B . Задача упругопластического кручения состоит [2] в отыскании кривых Γ^+ и Γ^- и функции $\Psi = \Psi(x, y)$, определенной непрерывно дифференцируемой в $B + L_1 + \Gamma^+ + L_2 + \Gamma^-$, имеющей вторые производные в B , по следующим условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= -2\lambda, \\ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 &< 1 \text{ в } B; \\ \Psi &= 0, \text{ на } L_1, L_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\Psi = \frac{a}{2} - x, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -1 \text{ на } \Gamma^+; \quad (1.2)$$

$$\Psi = \frac{a}{2} + x, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 1 \text{ на } \Gamma^-$$



Фиг. 1

При этом момент равен

$$M \sim \frac{M}{k_s} = 2 \int_B \Psi \, dx \, dy + 2 \int_S \left(\frac{a}{2} - x \sin \theta \right) \, dx \, dy \quad (1.3)$$

Определим гармоническую в B функцию $u = u(x, y)$ в виде

$$u(x, y) = \Psi(x, y) + \lambda(y^2 - 0,25b^2), \quad u(x, y) = u(-x, y) = u(x, -y) \quad (1.4)$$

Будем решать задачу (1.1), (1.2) методом прямых [4, 5]. Пусть целое n нечетно и

$$y_h = -0,5b + kh \quad (h=1, 2, \dots, n) \quad (h=b(n+1)^{-1}), \quad u_h(x) \equiv u(x, y_h)$$

Абсциссы точек пересечения лучей $y = y_h$ ($x > 0$) обозначим через x_h . Имеют место следующие приближенные равенства:

$$\begin{aligned} u_h(x) &= \sum_{s=1}^n (-1)^{h+s} C_s \operatorname{ch}(\beta_s x) \sin(k\theta_s) \quad \left(0 \leq x \leq x_h \leq \frac{a}{2} \right) \quad (h=1, 2, \dots, n) \quad C_s = \text{const} \\ \beta_s &= 12(1 + \cos \theta_s) h^{-2} (5 - \cos \theta_s)^{-1}, \quad \theta_s = \pi s(n+1)^{-1} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для определения постоянных C_h , x_h из (1.2) и (1.4) получим следующую систему трансцендентных уравнений:

$$u_h(x_h) = \lambda(y_h^2 - b^2/4) + a/2 - x_h \quad (1.6)$$

$$du_h(x_h)/dx = -1, \text{ если } x_h < a/2 \quad (1.7)$$

и условие

$$du_h(x)/dx > -1 \text{ для } 0 \leq x < x_h \leq a/2 \quad (1.8)$$

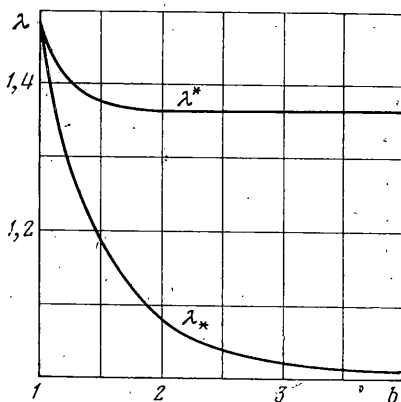
Решение уравнений (1.6), (1.7) ищем методом последовательных приближений. Ниже верхний индекс $i=0, 1, \dots$ означает номер итерации. Принимаем $x_h^0 = a/2$

($k=1, 2, \dots$). Пусть величины x_k^i известны. Подставляя их в (1.5), (1.6) и решая систему линейных уравнений, находим C_s^i . Затем определяем x_k^{i+1} , используя (1.7). Процесс заканчивается, если $\max_k |x_k^{i+1} - x_k^i| < a\epsilon$ при $i=I$, где $\epsilon > 0$ — заданное достаточно малое число. Полагаем $x_k = x_k^{I+1}$, $C_k = C_k^I$ и по формулам (1.4), (1.5) находим приближенное значение функции Ψ в B .

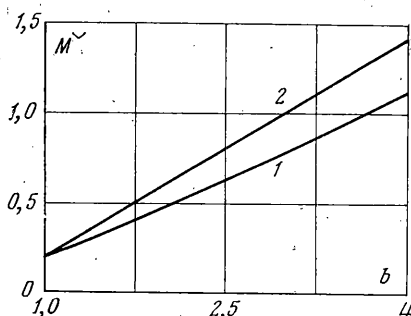
2. Расчеты на БЭСМ-6 проводились в следующем порядке. Задавалось значение $\lambda=1$ и на первом шаге итерационного процесса находилось λ_* по формуле

$$\lambda_* = - \left[\frac{du_k(a/2)}{dx} \right]^{-1} \quad \text{при } k = (n+1)/2 \quad (2.1)$$

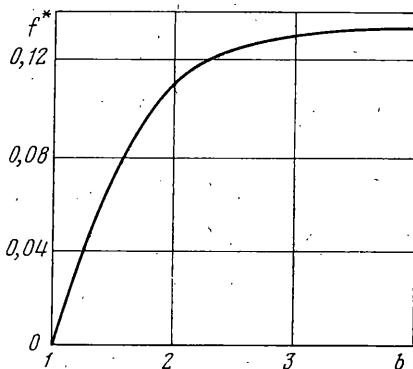
Затем для $\lambda = \lambda_* + l\delta$ ($l=0, 1, \dots, (p-1)$) по изложенному алгоритму вычислялись приближенные значения x_k и M^* . Численное интегрирование по переменной x в (1.3) выполнялось по методу Симпсона, решение системы линейных уравнений —



Фиг. 2



Фиг. 3



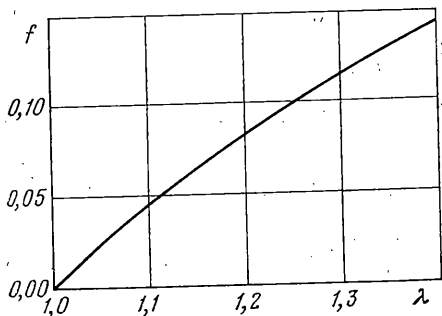
Фиг. 4

при помощи метода Гаусса, отыскание корней трансцендентного уравнения (1.7) производилось методом хорд. Если корень уравнения не существовал для $0 \leq x \leq a/2$, то принималось $x_k = a/2$. Числу δ придавалось определенное значение, p находилось из условия, чтобы величина $T(\lambda) - 1$ имела перемену знака на отрезке с концами $\lambda_* + (p-1)\delta$ и $\lambda_* + p\delta$. Здесь $T(\lambda)$ — разностная аппроксимация производной $\partial\Psi/\partial u$ в точке $(0, -b/2)$, найденная в силу формулы (1.4) по известным значениям $u_1(0)$, $u_2(0), \dots, u_m(0)$ с порядком $m < n$. Наконец, методом хорд отыскивалось λ^* из уравнения $T(\lambda) = 1$ и соответствующее ему M^* .

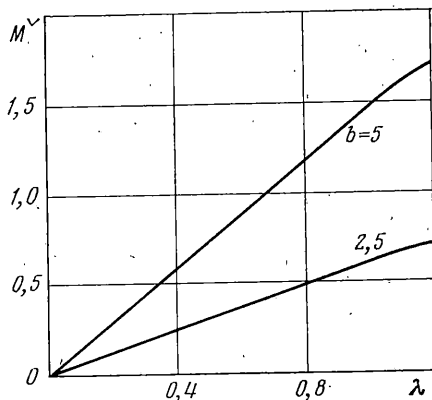
Приведем ряд результатов для $a=1$, $1 \leq b \leq 5$, $\delta=0,1$, $m=6$, $h=0,05$, $\varepsilon=10^{-5}$. Время счета одного описанного выше варианта на БЭСМ-6 при этих параметрах составляет не более пяти минут даже для достаточно больших b .

Численно получены соотношения между b и величинами λ_* и λ^* (фиг. 2), M_* (кривая 1) и M^* (кривая 2) (фиг. 3) и f^* (фиг. 4).

Здесь и ниже $f=a/2-x_h$ при $k=(n+1)/2$; звездочки указывают, что значения величин взяты при $\lambda=\lambda_*$ и $\lambda=\lambda^*$ соответственно. При анализе зависимости $f=f(\lambda)$



Фиг. 5



Фиг. 6

для достаточно больших b (на фиг. 5 $b=5$) с высокой степенью точности можно воспользоваться аналитическим решением [6] для случая $b=\infty$. Графики $M^{\sim}=M^{\sim}(\lambda)$ для $b=2,5$ и 5 представлены на фиг. 6 (для других значений b кривые выглядят аналогично).

ЛИТЕРАТУРА

1. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. М.: Гостехиздат, 1947. 300 с.
2. Галин Л. А. Упругопластическое кручение стержней полигонального сечения.— ПММ, 1944, т. 8, вып. 4, с. 307–322.
3. Ting T. W. Elastic-plastic torsion problem II.— Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1967, v. 25, No. 5, p. 342–366.
4. Фаддеева В. Н. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам.— Тр. матем. ин-та АН СССР, т. 28. М.: Изд-во АН СССР, 1949, с. 73–103.
5. Аругюлян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
6. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 606 с.
7. Ваничук Н. В. Расчет упругопластического кручения стержней методом локальных вариаций.— Инж. ж., МГТ, 1967, № 1, с. 145–148

Новосибирск

Поступила в редакцию
9.VII.1979