УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

ЛЕВШИН А. А.

При рассмотрении некоторых вопросов в технике и геомеханике возникает следующая смешанная задача теории упругости для полуплоскости. Вдоль границы области известно распределение касательных напряжений, на конечной части границы действуют нормальные напряжения, на другой ее части известны нормальные смещения. Задача состоит в определении напряженно-деформированного состояния полуплоскости. Построено общее решение указанного класса задач теории упругости для ортотропной полуплоскости. Используется тот факт, что при определенном выборе системы координат комплексная переменная z и усложненные комплексные переменные С. Г. Лехницкого z_j $(j=1, 2)$ принадлежат одной и той же области и имеют одинаковые контурные значения. Это позволило применить методы Н. И. Мусхелишвили, развитые в задачах теории упругости изотропного тела, и сформулировать для искомого комплексного потенциала граничную задачу, решение которой дается формулами М. В. Келдыша и Л. И. Седова [1].

1. Рассматривается ортотропная упругая среда, занимающая верхнюю полуплоскость $y>0$. Начало прямоугольной системы координат xoy выбирается в некоторой точке o, ось x направляется вдоль границы полуплоскости и предполагается, что главные направления упругости совпадают с осями этой системы координат. Область расположения упругого тела обозначается через G^+, ее граница — через L. Предполагается, что на оси x лежат непересекающиеся конечные отрезки (a_k, b_k) $(k=1, 2, \ldots, n)$, координаты концов которых удовлетворяют условию $a_1<b_1<a_2<<b_2<\ldots<a_n<b_n$. Совокупность отрезков (a_k, b_k) и (b_k, a_{k+1}) обозначается соответственно через L_1 и L_2, где полагается $a_{n+1}=a_1$. В рамках уравнений плоской деформации ортотропного тела рассматривается следующая постановка задачи теории упругости для верхней полуплоскости.

Пусть на части границы области L_1 заданы нормальные напряжения

$$\sigma_y^+=P(t), \quad t\in L_1 \tag{1.1}$$

На другой части границы полуплоскости L_2 известны нормальные смещения

$$v^+=w(t), \quad t\in L_2 \tag{1.2}$$

Вдоль границы области действуют касательные напряжения

$$\tau_{xy}^+=\varphi(t), \quad t\in L \tag{1.3}$$

Предполагается, что функции $P(t)$, $w'(t)$, $\varphi(t)$ удовлетворяют условию Гельдера [1] на L_1, L_2 и L соответственно, включая бесконечно удаленную точку, причем $w'(\infty)=\varphi(\infty)=0$.

В [2] показано, что компоненты тензора напряжения и вектора перемещения в анизотропном теле при плоской деформации выражаются через две голоморфные в областях G_1^+ и G_2^+ функции $\Phi(z_1)$ и $\Psi(z_2)$ усложненных комплексных переменных. Если физическая область расположения упругого тела является полуплоскостью, то при указанном выборе системы координат области G_1^+ и G_2^+ совпадают с G.

Представление напряжений и перемещений через комплексные потенциалы имеет вид

$$\sigma_x=2\operatorname{Re}[\mu_1^2\Phi(z_1)+\mu_2^2\Psi(z_2)], \quad \sigma_y=2\operatorname{Re}[\Phi(z_1)+\Psi(z_2)] \tag{1.4}$$
$$\tau_{xy}=-2\operatorname{Re}[\mu_1\Phi(z_1)+\mu_2\Psi(z_2)], \quad \partial u/\partial x=2\operatorname{Re}[p_1\Phi(z_1)+p_2\Psi(z_2)]$$
$$\partial v/\partial x=2\operatorname{Re}[q_1\Phi(z_1)+q_2\Psi(z_2)], \quad z_j=x+\mu_j y \quad (j=1, 2)$$

Здесь σ_x, σ_y и τ_{xy} — компоненты тензора напряжения, u и v — перемещения в направлении осей x и y, $\mu_j=i\beta_j$ — чисто мнимые величины для ортотропной среды, p_j и q_j — известные постоянные [2].

Предполагается, что главный вектор внешних усилий, действующих на границе полуплоскости, конечен. Комплексные потенциалы $\Phi(z_1)$ и $\Psi(z_2)$ исчезают на бесконечности.

Из граничного условия для касательных напряжений (1.3) и представления (1.4) следует

$$\operatorname{Re}[\mu_1\Phi^+(t)+\mu_2\Psi^+(t)]=-{}^1/_2\varphi(t) \tag{1.5}$$

Условие (1.5) позволяет восстановить функцию в области G^+ по ее действительной части на границе L и условию на бесконечности в виде

$$\mu_1\Phi(z)+\mu_2\Psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \tag{1.6}$$

Отдельно отметим, что формула (1.6) остается справедливой при формальной замене z на z_j. Это связано с тем, что полуплоскости G и G_j имеют одну и ту же границу L, а представление (1.5) можно считать граничным условием для искомой функции, определенной в любой из указанных областей.

Из формулы (1.5) следует очевидное, но полезное в дальнейшем соотношение

$$\operatorname{Im}\Psi^+(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)-\frac{\beta_1}{\beta_2}\operatorname{Im}\Phi^+(t) \tag{1.7}$$

Граничное условие для смещений (1.2) при помощи (1.4) можно записать через контурные значения искомых комплексных потенциалов в виде

$$\operatorname{Re}[q_1\Phi^+(t)+q_2\Psi^+(t)]={}^1/_2w'(t),\quad t\in L_2 \tag{1.8}$$

Условие (1.8) при помощи (1.7) после преобразований выглядит следующим образом:

$$\operatorname{Im}\Phi^+(t)=\frac{\beta_2}{2}\frac{q_2{}^\circ\varphi(t)+w'(t)}{q_2{}^\circ\beta_1-q_1{}^\circ\beta_2},\quad t\in L_2,\quad q_j{}^\circ=\operatorname{Im}q_j \tag{1.9}$$

Граничное условие для нормальных компонент напряжения (1.1) через контурные значения функций $\Phi(z_1)$ и $\Psi(z_2)$ представимо в форме

$$\operatorname{Re}[\Phi^+(t)+\Psi^+(t)]={}^1/_2P(t),\quad t\in L_1 \tag{1.10}$$

Условие (1.10) при помощи (1.6) и формулы Сохоцкого — Племеля преобразуется к виду

$$\operatorname{Re}\Phi^+(t)=\frac{\beta_2[{}^1/_2P(t)+P_*(t)]}{\beta_2-\beta_1},\quad t\in L_1 \tag{1.11}$$

$$P_*(t)=\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i\mu_2}\int\limits_L\frac{\varphi(t_0)\,dt_0}{t_0-t}\right] \tag{1.12}$$

На основании теоремы Племеля — Привалова [1] и предположения относительно свойств $\varphi(t)$ функция $P_*(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на L_1.

Таким образом, смешанная задача (1.1) — (1.3) сведена к определению кусочно-голоморфной функции в верхней полуплоскости, исчезающей на бесконечности, по граничным условиям (1.9) и (1.11).

Общее решение граничной задачи (1.9) и (1.11), исчезающее на бесконечности, дается формулой М. В. Келдыша и Л. И. Седова [1]:

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi iX(z)}\int\limits_L\frac{X^+(t)h_0(t)\,dt}{t-z}+\Phi_0(z),\qquad \Phi_0(z)=\frac{(c_1z^{n-1}+c_2z^{n-2}+\ldots+c_n)}{X(z)}$$

$$X(z)=\prod_{k=1}^{n}[(z-a_k)(z-b_k)]^{1/2}$$

$$h_0(t)=\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}\left[\frac{1}{2}P(t)+P_*(t)\right],\quad t\in L_1;\qquad h_0(t)=i\frac{\beta_2}{2}\frac{q_2{}^\circ\varphi(t)+w'(t)}{q_2{}^\circ\beta_1-q_1{}^\circ\beta_2},\quad t\in L_2$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — произвольные вещественные постоянные.

Решение (1.12) позволяет найти функцию $\Psi(z)$ с помощью связи (1.6) в следующем виде:

$$\Psi(z)=-\frac{\mu_1}{\pi i\mu_2X(z)}\int\limits_L\frac{X^+(t)h_0(t)\,dt}{t-z}-\frac{\mu_1}{\mu_2}\Phi_0(z)-\frac{1}{2\pi i\mu_2}\int\limits_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \tag{1.13}$$

Для определения n вещественных постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ имеется n условий

$$w(b_k)-w(a_k)=2\int_{a_k}^{b_k}\operatorname{Re}[q_1\Phi^+(t)+q_2\Psi^+(t)]\,dt \tag{1.14}$$

образующих систему n линейных алгебраических уравнений относительно этих констант. Если решение системы (1.14) известно, то комплексные потенциалы (1.12) и (1.13) удовлетворяют всем граничным условиям и решают смешанную задачу для полуплоскости (1.1)—(1.3) при связях напряжений и перемещений с функциями $\Phi(z_1)$ и $\Psi(z_2)$ в виде формул (1.4).

Решение (1.12) и (1.13) не ограничено вблизи точек a_k, b_k. Построение решения, ограниченного вблизи заранее заданных концов, легко осуществить методами, изложенными в [1].

2. В качестве примера сформулируем и решим следующую задачу для верхней полуплоскости с границей вдоль действительной оси x. Считаем, что на части границы от $-\infty$ до 0 отсутствуют вертикальные смещения $v^+=0$. В области $0<x<x_0$ действует равномерно распределенная нормальная нагрузка $\sigma_y^+=q_0$. При $x_0<x<\infty$ смещения равны $v^+=h$. Вдоль всей границы полуплоскости отсутствуют касательные напряжения $\tau_{xy}^+=0$.

Ограниченное в точке $x=0$ и неограниченное в точке $x=x_0$ общее решение смешанной задачи для верхней ортотропной полуплоскости, исчезающее на бесконечности, находим в виде (1.12) и (1.13):

$$\Phi(z)=-\frac{\mu_2}{\mu_1}\Psi(z)=\frac{q_0}{2}\frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\left[1-\sqrt{\frac{z}{z-x_0}}\right] \tag{2.1}$$

Используя представления (1.4), граничные условия для смещений v, функцию (2.1), находим формулу

$$x_0=2hE_1/[(1-\nu_1^2)\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)\pi q_0] \tag{2.2}$$

определяющую длину загруженной части границы полуплоскости в зависимости от упругих свойств среды, величины h и нагрузки q_0. Смещения границы полуплоскости при $0\leqslant x\leqslant x_0$ на основании (1.4) и (2.1) равны

$$v(x)=q_0\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)\beta_{11}{}^\circ\left[x_0\arcsin\sqrt{\frac{x}{x_0}}-\sqrt{x(x_0-x)}\right],\qquad \beta_{11}{}^\circ=\frac{1-\nu_1^2}{E_1}$$

где E_1, ν_1 – модуль упругости и коэффициент Пауссона в направлении оси x, величина x_0 определяется формулой (2.2). Заметим, что для изотропного материала ($\beta_1=\beta_2=1$) формула (2.2) совпадает с известным результатом [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
2. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
3. *Баренблатт Г. И., Христианович С. А.* Об обрушении кровли при горных выработках.– Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 11, с. 75–86.

Донецк

Поступила в редакцию
16.VII.1979

УДК 539.374

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

АННИН Б. Д., САДОВСКИЙ В. М.

Дано приближенное решение задачи упругопластического кручения стержня прямоугольного сечения, когда пластические зоны развиваются лишь вблизи одной пары сторон.

1. Пусть цилиндрический стержень прямоугольного поперечного сечения D со сторонами $a<b$ (фиг. 1) скручивается моментом M. Обозначим: α – угол закручивания на единицу длины G – модуль сдвига, k_s – предел текучести при чистом сдвиге, $\lambda=G\alpha k_s^{-1}$.