

УДК 624.07 : 534.1

КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ ТИПА ТИМОШЕНКО, ЛЕЖАЩЕЙ
НА УПРУГОНАСЛЕДСТВЕННОМ ОСНОВАНИИ

МУРАВСКИЙ Г. Б.

Колебания балки Бернулли — Эйлера на упругонаследственном основании изучались в [1], где было построено решение, относящееся к случаю действия на балку равномерно движущейся силы, изменяющейся во времени по гармоническому закону, которое позволяет исследовать нагрузки произвольного вида. В данной работе задача, аналогичная решенной в [1], изучается для случая балки Тимошенко. Колебания такой балки на упругом или упруговязком основании рассматривались в [2—5].

Предыдущие исследования в области динамики балки Тимошенко, лежащей на деформируемом основании, продолжены здесь в направлении обобщения свойств основания и действующих на балку нагрузок.

1. Как и в [1], примем связь между приложенным к основанию давлением $p(x, t)$ и перемещениями $y(x, t)$ точек поверхности основания в виде

$$p(x, t) = k \left[y(x, t) + \mu \int_0^t G(t-t_1) \frac{\partial y(x, t_1)}{\partial t_1} dt_1 \right] \quad (1.1)$$

Считается, что время отсчитывается от момента начала деформирования системы (k и μ — положительные постоянные, причем k играет роль долговременного коэффициента жесткости основания). Будем считать, что ядро $G(z)$ — функция, положительная при $z \geq 0$, интегрируемая на положительной полуоси и монотонно убывающая с ростом аргумента z . Значения величин μ и G можно считать безразмерными. Соотношение типа (1.1) обсуждалось в [6]. При изменении перемещений y по гармоническому закону $y_0 \exp(i\omega t)$ давление p при $t \rightarrow \infty$ также будет изменяться по гармоническому закону $p_0 \exp(i\omega t)$. При этом

$$p_0 = k(a + ib)y_0 \quad (1.2)$$

$$a = 1 + \mu\omega \int_0^{\infty} G(s) \sin(\omega s) ds, \quad b = \mu\omega \int_0^{\infty} G(s) \cos(\omega s) ds$$

В случае ядра вида $G(z) = \exp(-z/\beta)$ зависимость (1.1) эквивалентна дифференциальной зависимости

$$\partial p / \partial t + p / \beta = ky / \beta + k(1 + \mu) \partial y / \partial t \quad (1.3)$$

соответствующей так называемой трехэлементной модели, которая при надлежащем подборе параметров переходит в модель Фойхта

$$p = k(y + \gamma \partial y / \partial t) \quad (\beta \rightarrow 0, \mu = \gamma) \quad (1.4)$$

и в модель Максвелла

$$\partial p / \partial t + p / \beta = \epsilon \partial y / \partial t \quad (k \rightarrow 0, k\mu = \epsilon) \quad (1.5)$$

Особый интерес представляет ядро в виде интегральной показательной функции — ядро Био [7, 8]:

$$G(z) = -\frac{2}{\pi} \text{Ei} \left(-\frac{z}{\alpha} \right) = \frac{2}{\pi} \int_{z/\alpha}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \quad (1.6)$$

где $\text{Ei}(-z/\alpha)$ — интегральная показательная функция, α — параметр, имеющий размерность времени. Величины a и b в этом случае имеют вид [9]:

$$a = 1 + (\mu/\pi) \ln(1 + \alpha^2 \omega^2), \quad b = \mu(2/\pi) \arctg(\alpha \omega) \quad (1.7)$$

При больших значениях α обеспечивается практическая независимость от частоты рассеиваемой при колебаниях энергии, а при малых значениях α зависимость (1.1) приближается к зависимости Фойхта [1].

2. Пусть y — поперечное смещение центра тяжести сечения однородной балки, ϑ — средний угол поворота сечения. Изгибающий момент M и поперечная сила Q в сечениях балки связаны с перемещениями зависимостями

$$M = EJ \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad Q = \frac{G^\circ F}{\alpha'} \left(\vartheta - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \quad (2.1)$$

где E — модуль Юнга, J — момент инерции, G° — модуль сдвига, F — площадь сечения, α' — коэффициент, зависящий от формы сечения (для прямоугольного сечения $\alpha' = 1,2$).

Рассматривая движение элемента dx балки, получаем систему уравнений, которую после введения безразмерных переменных $\tau = t(k/m)^{1/2}$, $\xi = x[k/(4EJ)]^{1/4}$, $u = y[k/(4EJ)]^{1/4}$ приводим к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + R \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\vartheta - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + u + \mu \int_0^\tau G \left(\frac{\tau - \tau_1}{n} \right) \frac{\partial u(\xi, \tau_1)}{\partial \tau_1} d\tau_1 = \\ = (4k^3 EJ)^{-1/4} f \left[\left(\frac{4EJ}{k} \right)^{1/4} \xi, \frac{\tau}{n} \right] \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} - S \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \tau^2} - 4R \left(\vartheta - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$R = G^\circ F / 2\alpha' (kJ)^{1/2}, \quad S = (2I/m) (kJ)^{1/2}, \quad n = (k/m)^{1/2}$$

где m — погонная масса, $f(x, t)$ — активная погонная нагрузка, I — погонный момент инерции балки относительно нейтральной плоскости. Если нет масс, не принимающих участия в работе балки, тогда $m = \rho F$, $I = \rho J$, где ρ — плотность материала балки. В общем случае величины m и I можно считать независимыми от F и J .

Для ориентировочного представления о величинах параметров R и S рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения, опирающуюся на грунтовое основание. Пусть b — ширина сечения, h — его высота. Примем $k = k_0 b$, где k_0 — коэффициент равномерного сжатия. При $k_0 = 10^8$ Н/м³, $E/G^\circ = 2,5$, $I = \rho J$, $m = \rho F$, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м² имеем $R = 25,8/h^{1/2}$, $S = h^{1/2}/77,4$, $SR = 1/3$ (h дано в м).

В случае движения по балке силы $P \exp(i\omega t)$ со скоростью v правую часть первого уравнения (2.2) можно записать с использованием дельта-

Функции в виде

$$h_1 P \delta(\xi - v_1 \tau) \exp(i\omega_1 \tau) \quad (2.3)$$

$$h_1 = (4kEJ)^{-1/2}, \quad v_1 = v[m^2/(4kEJ)]^{1/2}, \quad \omega_1 = \omega/n$$

Будем искать решение, соответствующее стационарному режиму, который наступит через достаточно большой промежуток времени после начала процесса и характеризуется гармоническими колебаниями точек с постоянной координатой $l = x - vt$ в подвижной системе координат, движущейся вместе с силой. Примем для больших значений τ и τ_1 :

$$u(\xi, \tau) = U(\eta) e^{i\omega_1 \tau}, \quad u(\xi, \tau_1) = U[\eta + v_1(\tau - \tau_1)] e^{i\omega_1 \tau_1} \quad (2.4)$$

$$\theta(\xi, \tau) = \Theta(\eta) e^{i\omega_1 \tau}, \quad \eta = \xi - v_1 \tau = l[k/(4EJ)]^{1/2}$$

Поскольку в случае ядер G , убывающих до нуля с ростом аргумента $\tau - \tau_1$, начальное состояние не влияет на вид стационарного процесса, можно считать при $\tau \rightarrow \infty$, что решение имеет вид (2.4) с самого начала процесса деформирования системы. Подставим функции (2.4) в уравнения (2.2) при правой части (2.3) и после замены в интеграле $s = \tau - \tau_1$ устремим верхний предел интеграла к бесконечности. После сокращения на $\exp(i\omega_1 \tau)$ получим

$$(v_1^2 - R) \frac{d^2 U}{d\eta^2} + (1 - \omega_1^2) U - 2\omega_1 v_1 i \frac{dU}{d\eta} + \mu \int_0^{\infty} \left[i\omega_1 U(\eta + v_1 s) - \right. \quad (2.5)$$

$$\left. - v_1 \frac{dU(\eta + v_1 s)}{d\eta} \right] G\left(\frac{s}{n}\right) e^{-i\omega_1 s} ds + R \frac{d\Theta}{d\eta} = h_1 P \delta(\eta)$$

$$(1 - S v_1^2) \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} + 2\omega_1 v_1 S i \frac{d\Theta}{d\eta} + (S \omega_1^2 - 4R) \Theta + 4R \frac{dU}{d\eta} = 0$$

Эту систему можно решить применив преобразование Фурье

$$U_F[\lambda^2(R - v_1^2) + 1 - \omega_1^2 + 2\omega_1 v_1 \lambda + \mu(G_s + iG_c)] + iR\lambda \Theta_F = h_1 P \quad (2.6)$$

$$4i\lambda R U_F + \Theta_F[(S v_1^2 - 1)\lambda^2 - 2\omega_1 v_1 S \lambda + S \omega_1^2 - 4R] = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_F(\lambda) \\ \Theta_F(\lambda) \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} U(\eta) \\ \Theta(\eta) \end{array} \right\} e^{-i\lambda \eta} d\eta, \quad \left\{ \begin{array}{l} U(\eta) \\ \Theta(\eta) \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} U_F(\lambda) \\ \Theta_F(\lambda) \end{array} \right\} e^{i\lambda \eta} d\lambda$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_s \\ G_c \end{array} \right\} = q \int_0^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \sin qs \\ \cos qs \end{array} \right\} G\left(\frac{s}{n}\right) ds, \quad q = \omega_1 - \lambda v_1$$

Из (2.6) определяем трансформанты Фурье искомых функций

$$U_F = \frac{h_1 P \psi(\lambda)}{\Phi(\lambda) + i\mu \psi(\lambda) G_c}, \quad \Theta_F = \frac{4i\lambda h_1 P}{\Phi(\lambda) + i\mu \psi(\lambda) G_c} \quad (2.7)$$

$$\psi(\lambda) = 4 - (S q^2 - \lambda^2)/R, \quad \Phi(\lambda) = \lambda^4 + (1 - q^2 + \mu G_s) \psi(\lambda) - S q^2 \lambda^2$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получаем выражения для величин $U(\eta)$ и $\Theta(\eta)$. Перемещения и изгибающие моменты запишем в виде

$$y = 1/2 (4k^3 EJ)^{-1/2} P \chi_y e^{i\omega_1 \tau}, \quad M = - (1/4 EJ/k)^{1/2} P \chi_M e^{i\omega_1 \tau} \quad (2.8)$$

$$\kappa_y(\eta, \omega_1, \nu_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\lambda) e^{i\lambda\eta} d\lambda}{\Phi(\lambda) + i\mu\psi(\lambda) G_c}$$

$$\kappa_M(\eta, \omega_1, \nu_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 e^{i\lambda\eta} d\lambda}{\Phi(\lambda) + i\mu\psi(\lambda) G_c}$$

При $S=0$ и $R \rightarrow \infty$ имеем случай балки Бернулли — Эйлера; при $S \neq 0$ и $R \rightarrow \infty$ учитывается инерция вращения при пренебрежении сдвигами; при $S=0$ и конечном значении R учитываются сдвиги при пренебрежении инерцией вращения. Если сила $Pe^{i\omega t}$ распределена равномерно на интервале $(vt-b_1, vt+b_1)$ или по переменной η : $(-\beta_1, \beta_1)$, где $\beta_1 = b_1 [k/(4EJ)]^{1/4}$, то под интегралами в (2.8) следует ввести дополнительный множитель $\sin \lambda\beta_1/(\lambda\beta_1)$.

Приведем $G_s(q)$ и $G_c(q)$ для некоторых видов ядер. При использовании в (1.4) ядра (1.6) в соответствии с (1.7) получаем

$$G_s(q) = -\pi^{-1} \ln(1 + \alpha_1^2 q^2), \quad G_c(q) = 2\pi^{-1} \operatorname{arctg}(\alpha_1 q), \quad \alpha_1 = \alpha n \quad (2.9)$$

Для трехэлементной модели, соответствующей ядру $G(z) = \exp(-z/\beta)$, имеем

$$G_s(q) = (q\beta_2)^2 / [1 + (q\beta_2)^2], \quad G_c(q) = q\beta_2 / [1 + (q\beta_2)^2], \quad \beta_2 = \beta n \quad (2.10)$$

Чтобы получить результат для модели Фойхта (1.4), нужно устремить β к нулю, а величину $\beta\mu$ принять равной γ . В формулах для κ_y и κ_M следует в соответствии с (2.10) положить $\mu G_s = 0$, $\mu G_c = \gamma_1 q$, где $\gamma_1 = \gamma n$. Для случая модели Максвелла, прежде чем совершить предельный переход $k \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow \infty$, $k\mu = \varepsilon$, в интегралах для κ_y , κ_M заменяется переменная $\lambda_1 = \lambda/\mu^{1/4}$ и вводятся новые параметры $S, R, \nu_1, \eta, \tau, n$, которые определяются по прежним формулам, но с заменой в них k на ε . Тогда, используя выражения (2.10), для случая модели Максвелла получаем вместо (2.8):

$$y = 1/2 (4\varepsilon^3 EJ)^{-1/4} P \kappa_y e^{i\omega_1 \tau}, \quad M = -(1/4 EJ/\varepsilon)^{1/4} P \kappa_M e^{i\omega_1 \tau} \quad (2.11)$$

$$\kappa_y(\eta, \omega_1, \nu_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\lambda) e^{i\lambda\eta} d\lambda}{\lambda^4 + (G_s - q^2)\psi(\lambda) - Sq^2\lambda^2 + i\psi(\lambda) G_c}$$

$$\kappa_M(\eta, \omega_1, \nu_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2 e^{i\lambda\eta} d\lambda}{\lambda^4 + (G_s - q^2)\psi(\lambda) - Sq^2\lambda^2 + i\psi(\lambda) G_c}$$

Для реальных задач величина $G_c(q)$ при $q > 0$ должна быть положительной, поскольку эта величина с точностью до положительного множителя выражает поглощенную основанием энергию за период $2\pi/(qn)$. Достаточным условием для этого является монотонное убывание не только $G(z)$, но и $|G'(z)|$ с ростом z . Величина $G_c(q)$ положительна при монотонно убывающем положительном ядре $G(z)$. Заметим, что $G_s(-q) = G_s(q)$, $G_c(-q) = -G_c(q)$.

3. Рассмотрим колебания балки при действии неподвижной силы, изменяющейся во времени по гармоническому закону. В этом случае $\nu_1 = 0$, $q = \omega_1$ и величины G_s и G_c не зависят от λ , что позволяет весьма просто вычислять интегралы в (2.8) при помощи теоремы о вычетах. Запишем знаменатель в интегралах для κ_y и κ_M в виде

$$\lambda^4 - 2(p_1 + ip_2)\lambda^2 + q_1 + iq_2 \quad (3.1)$$

$$p_1 = \frac{1}{2} \left(S\omega_1^2 - \frac{1 - \omega_1^2 + \mu G_s}{R} \right), \quad p_2 = -\frac{\mu G_c}{2R}$$

$$q_1 = \left(4 - \frac{S\omega_1^2}{R} \right) (1 - \omega_1^2 + \mu G_s), \quad q_2 = \mu G_c \left(4 - \frac{S\omega_1^2}{R} \right)$$

Пусть $\mu > 0$, тогда $p_2 < 0$ при $\omega_1 > 0$. За исключением случая $\omega_1 = \omega_1^\circ = (4R/S)^{1/2}$, когда имеется двойной корень, равный нулю, все корни полинома (3.1) комплексны. При любой частоте по соответствующим формулам определяются единственные конечные значения величин κ_y и κ_M . Корни полинома (3.1) выражаются формулой

$$\lambda = \pm [p_1 + ip_2 \pm (x_0 + iy_0)^{1/2}]^{1/2} \quad (3.2)$$

$$x_0 = p_1^2 - p_2^2 - q_1, \quad y_0 = 2p_1 p_2 - q_2$$

Запишем выражения для корней λ_1 и λ_2 , лежащих в верхней полуплоскости комплексной плоскости ($\omega_1 \neq \omega_1^\circ$). Введем обозначения

$$\alpha_i = 1 \text{ при } y_i \geq 0, \quad \alpha_i = -1 \text{ при } y_i < 0 \quad (i=0, 2)$$

$$\rho_i = (x_i^2 + y_i^2)^{1/2} \quad (i=0, 1, 2), \quad \Phi_i = \alpha_i \arccos(x_i/\rho_i) \quad (i=0, 2), \quad \Phi_1 = \arccos(x_1/\rho_1)$$

$$x_1 = p_1 - \alpha_0 \rho_0^{1/2} \cos(\Phi_0/2), \quad y_1 = p_2 - \alpha_0 \rho_0^{1/2} \sin(\Phi_0/2)$$

$$x_2 = p_1 + \alpha_0 \rho_0^{1/2} \cos(\Phi_0/2), \quad y_2 = p_2 + \alpha_0 \rho_0^{1/2} \sin(\Phi_0/2)$$

Рассмотрение величины y_2 показывает, что $y_2 > 0$ при $\omega_1 < \omega_1^\circ$ и $y_2 < 0$ при $\omega_1 > \omega_1^\circ$. Корни λ_1 и λ_2 можно представить в виде

$$\lambda_1 = -\rho_1^{1/2} e^{-i\Phi_1/2}, \quad \lambda_2 = \alpha_2 \rho_2^{1/2} e^{i\Phi_2/2} \quad (3.3)$$

Остальные корни $\lambda_3 = -\lambda_1$, $\lambda_4 = -\lambda_2$ лежат в нижней полуплоскости. На основании теоремы о вычетах запишем ($\eta \geq 0$, $v_i = 0$):

$$\kappa_y = \frac{i}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left[\frac{\psi(\lambda_1)}{\lambda_1} e^{i\lambda_1 \eta} - \frac{\psi(\lambda_2)}{\lambda_2} e^{i\lambda_2 \eta} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\alpha_0 \rho_0^{1/2}} \left\{ \left(\frac{4 - S\omega_1^2/R}{\rho_1^{1/2}} e^{i\Phi_1/2} + \frac{\rho_1^{1/2}}{R} e^{-i\Phi_1/2} \right) \exp\left(-\eta \rho_1^{1/2} \sin \frac{\Phi_1}{2}\right) \times \right.$$

$$\times \exp\left[-i\left(\eta \rho_1^{1/2} \cos \frac{\Phi_1}{2} + \frac{\Phi_0 - \pi}{2}\right)\right] + \left(\frac{4 - S\omega_1^2/R}{\rho_2^{1/2}} e^{-i\Phi_2/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho_2^{1/2}}{R} e^{i\Phi_2/2} \right) \alpha_2 \exp\left(-\eta \rho_2^{1/2} \sin \left| \frac{\Phi_2}{2} \right|\right) \exp\left[i\left(\eta \alpha_2 \rho_2^{1/2} \cos \frac{\Phi_2}{2} - \frac{\Phi_0 - \pi}{2}\right)\right] \left. \right\} \quad (3.4)$$

$$\kappa_M = \frac{i}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (\lambda_1 e^{i\lambda_1 \eta} - \lambda_2 e^{i\lambda_2 \eta}) =$$

$$= \frac{1}{2\alpha_0 \rho_0^{1/2}} \left\{ \rho_1^{1/2} \exp\left(-\eta \rho_1^{1/2} \sin \frac{\Phi_1}{2}\right) \exp\left[-i\left(\eta \rho_1^{1/2} \cos \frac{\Phi_1}{2} + \frac{\Phi_0 + \Phi_0 - \pi}{2}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \rho_2^{1/2} \alpha_2 \exp\left(-\eta \rho_2^{1/2} \sin \left| \frac{\Phi_2}{2} \right|\right) \exp\left[i\left(\eta \alpha_2 \rho_2^{1/2} \cos \frac{\Phi_2}{2} + \frac{\Phi_2 - \Phi_0 + \pi}{2}\right)\right] \right\}$$

При $\eta < 0$ можно использовать четность κ_y и κ_M по аргументу η . Выражения (3.4) получены для случая $\omega_1 \neq \omega_1^\circ$. Однако ими можно пользоваться и при $\omega_1 = \omega_1^\circ$, когда $\lambda_2 = 0$ и часть выражений для κ_y и κ_M , содержащая λ_2 , обращается в нуль.

Далее на основании формул (3.4) рассмотрим колебания балки при отсутствии диссипации энергии. Решение для этого случая получим устремляя в (3.4) коэффициент μ к нулю. Данная задача другим способом изучалась в [2]. В отличие от [2] ниже решение исследуется более подробно и с указанием области изменения параметров, соответствующей получаемым результатам. Будем считать, что $\omega_1^0 > 1$. Анализ показывает, что имеется три характерных значения величины ω_1 , при переходе через которые изменяется вид решения задачи: ω_1^0 , 1 и ω_1^{\sim} , причем ω_1^{\sim} — положительное значение, обращающее в нуль величину x_0 (при $\mu=0$). При $R > 1/4$ такое значение ω_1 единственно, при $R < 1/4$ существует два положительных корня уравнения $x_0=0$; но лишь больший из них соответствует резонансу (кратности действительного корня λ). Запишем выражение для резонансной частоты ω_1^{\sim} :

$$\omega_1^{\sim 2} = 8 \left(1 - \frac{1}{16R^2} \right) \left\{ \left[A^2 + 4 \left(S - \frac{1}{R} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{16R^2} \right) \right]^{1/2} + A \right\}^{-1}$$

$$A = 4 + S/2R - 1/2R^2 \quad (3.5)$$

Величина ω_1^{\sim} удовлетворяет условию $0 < \omega_1^{\sim} \leq 1$, причем равенство достигается лишь при $S=0$. Величина ω_1^{\sim} очень мало отличается от единицы. Рассмотрим величину α_0 . При $\omega_1^0 > 1$ эта величина при достаточно малом μ оказывается отрицательной на интервале $\omega_1^{\sim} \leq \omega_1 \leq \omega_1^0$, при $\omega_1 > \omega_1^0$ вид решения оказывается независимым от знака α_0 ; это справедливо и в случае $0 \leq \omega_1 < \omega_1^{\sim}$ при $R > 1/4$. Осуществляя предельный переход $\mu \rightarrow 0$, считаем при $\omega_1^0 > 1$, $R > 1/4$, что $\alpha_0 = -1$.

Далее запишем решение для четырех интервалов изменения величины ω_1 .

1. В случае $0 \leq \omega_1 < \omega_1^{\sim}$ из формул (3.4) при $\mu \rightarrow 0$ получаем ($\eta \geq 0$):

$$\kappa_y = \frac{\exp[-\eta q_1^{1/4} \sin(\varphi_1/2)]}{|x_0|^{1/2}} \left\{ \frac{4 - S\omega_1^2/R}{q_1^{1/4}} \cos\left(\eta q_1^{1/4} \cos\frac{\varphi_1}{2} - \frac{\varphi_1}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{q_1^{1/4}}{R} \cos\left(\eta q_1^{1/4} \cos\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_1}{2}\right) \right\} \quad (3.6)$$

$$\kappa_M = \frac{\exp[-\eta q_1^{1/4} \sin(\varphi_1/2)]}{|x_0|^{1/2}} q_1^{1/4} \cos\left(\eta q_1^{1/4} \cos\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_1}{2}\right), \quad \varphi_1 = \arccos \frac{p_1}{q_1^{1/2}}$$

При $\omega_1 \rightarrow \omega_1^{\sim}$ величины κ_y и κ_M неограниченно возрастают, как $(\omega_1^{\sim} - \omega_1)^{-1/2}$; если $\omega_1^{\sim} = 1$, то при $\omega_1 \rightarrow \omega_1^{\sim}$ неограниченный рост коэффициента κ_y будет более сильный — как $(\omega_1^{\sim} - \omega_1)^{-3/4}$; а коэффициента κ_M более слабый — как $(\omega_1^{\sim} - \omega_1)^{-1/4}$.

2. Для промежутка $\omega_1^{\sim} < \omega_1 < 1$ при $\eta \geq 0$:

$$\kappa_y = \frac{1}{2x_0^{1/2}} \left(\frac{4R - S\omega_1^2 + x_1}{R x_1^{1/2}} E_1 + \frac{4R - S\omega_1^2 + x_2}{R x_2^{1/2}} E_2 \right)$$

$$\kappa_M = \frac{1}{2x_0^{1/2}} (x_1^{1/2} E_1 + x_2^{1/2} E_2) \quad (3.7)$$

$$E_1 = \exp \left[-i \left(x_1^{1/2} \eta + \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad E_2 = \exp \left[i \left(x_2^{1/2} \eta - \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$x_1 = p_1 + x_0^{1/2}, \quad x_2 = p_1 - x_0^{1/2} = q_1/x_1$$

Если $\omega_1 \rightarrow 1$, то x_2 стремится к нулю; величина $|x_y|$ стремится к бесконечности, как $(1-\omega_1)^{-1/2}$, а x_M остается конечной. При $\omega_1 \rightarrow \omega_1^0$ величины $|x_y|$ и $|x_M|$ неограниченно возрастают, как $(\omega_1 - \omega_1^0)^{-1/2}$.

3. В случае $1 < \omega_1 < \omega_1^0$ выражения для x_y и x_M имеют вид ($\eta \geq 0$):

$$x_y = \frac{1}{2x_0^{1/2}} \left(\frac{4R - S\omega_1^2 + x_1}{Rx_1^{1/2}} E_1 - \frac{4R - S\omega_1^2 + x_2}{R|x_2|} \exp(-|x_2|^{1/2}\eta) \right) \quad (3.8)$$

$$x_M = \frac{1}{2x_0^{1/2}} [x_1^{1/2} E_1 + |x_2|^{1/2} \exp(-|x_2|^{1/2}\eta)]$$

где x_1 и x_2 выражаются теми же формулами, что и в предыдущем случае. При стремлении ω_1 к единице и к ω_1^0 величина x_2 стремится к нулю. В первом случае коэффициент x_y неограниченно растет, а x_M ограничен; во втором случае обе величины ограничены.

4. Для промежутка $\omega_1^0 < \omega_1$ при $\eta \geq 0$ имеем

$$x_y = \frac{1}{2x_0^{1/2}} \left\{ \frac{4R - S\omega_1^2 + x_1}{Rx_1^{1/2}} E_1 - \frac{4R - S\omega_1^2 + x_2}{Rx_2^{1/2}} \exp \left[-i \left(x_2^{1/2} \eta + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} \quad (3.9)$$

$$x_M = \frac{1}{2x_0^{1/2}} \left\{ x_1^{1/2} E_1 - x_2^{1/2} \exp \left[-i \left(x_2^{1/2} \eta + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}$$

При увеличении ω_1 величина $x_0^{1/2}$ растет, как $1/2 |S - 1/R| \omega_1^2$ (если только $S \neq 1/R$; в случае $S = 1/R$ имеем $x_0^{1/2} \approx 2\omega_1$):

$$x_1 = p_1 + x_0^{1/2} \approx \frac{1}{2} \omega_1^2 \left(S + \frac{1}{R} + \left| S - \frac{1}{R} \right| \right)$$

$$x_2 = p_1 - x_0^{1/2} \approx \frac{1}{2} \omega_1^2 \left(S + \frac{1}{R} - \left| S - \frac{1}{R} \right| \right)$$

Отсюда ясно, что при $S \neq 1/R$ величины $|x_y|$ и $|x_M|$ убывают с ростом ω_1 , как ω_1^{-1} ; при $S = 1/R$ величина $|x_y|$ убывает, как ω_1^{-1} , а величина x_M уже не будет бесконечно малой. При $\omega_1 \rightarrow \omega_1^0$ вторые слагаемые в квадратных скобках исчезают.

Приведем некоторые результаты вычислений, относящиеся к случаю действия неподвижной гармонической силы при опирании балки на основание, соответствующее ядру Био (1.6) (использовались формулы (2.9), (3.4)). Параметр α_1 взят достаточно большим ($\alpha_1 = 4550$) для обеспечения практической независимости от частоты энергии, поглощаемой основанием.

Для ряда значений μ на фиг. 1, 2 представлены величины $|x_y|$ и $|x_M|$ при $\eta = 0$, $R = 2,25$, $S = 1/16$. Резкое изменение величин $|x_y|$ и $|x_M|$ вблизи нулевой частоты объясняется большим значением α_1 , что приводит к быстрому увеличению динамической жесткости основания при росте ω_1 вблизи нулевого значения. Смещение максимумов амплитуд вправо характерно для рассматриваемой упругонаследственной частотно-независимой модели основания.

4. Рассмотрим случай постоянной движущейся силы, т. е. $\omega_1 = 0$, $v_1 \geq 0$. Запишем выражения для величин, входящих в формулы (2.8):

$$G_c = -\lambda v_1 \int_0^{\infty} G \left(\frac{s}{n} \right) \cos(\lambda v_1 s) ds, \quad G_s = \lambda v_1 \int_0^{\infty} G \left(\frac{s}{n} \right) \sin(\lambda v_1 s) ds \quad (4.1)$$

$$\psi(\lambda) = 4 - \lambda^2 (Sv_1^2 - 1) / R$$

$$\Phi(\lambda) = c\lambda^4 - \left[d - \frac{\mu G_c}{R} (1 - Sv_1^2) \right] \lambda^2 + 4 + 4\mu G_c$$

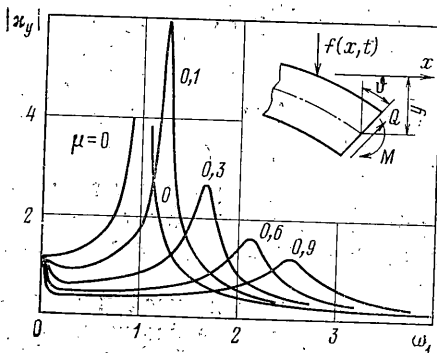
$$c = (1 - Sv_1^2) \left(1 - \frac{v_1^2}{R} \right), \quad d = v_1^2 \left(4 + \frac{S}{R} \right) - \frac{1}{R}$$

Так как в рассматриваемом случае величины $\psi(\lambda)$ и $\Phi(\lambda)$ четны, а $C_c(\lambda)$ — нечетна, коэффициенты κ_y и κ_M можно представить в виде

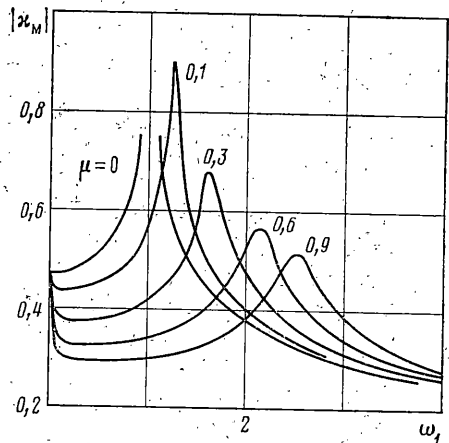
$$\kappa_y(\eta, 0, v_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\psi(\lambda) [\Phi(\lambda) \cos \lambda \eta + \mu \psi(\lambda) G_c(\lambda) \sin \lambda \eta] d\lambda}{\Phi^2(\lambda) + \mu^2 \psi^2(\lambda) G_c^2(\lambda)} \quad (4.2)$$

$$\kappa_M(\eta, 0, v_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 [\Phi(\lambda) \cos \lambda \eta + \mu \psi(\lambda) G_c(\lambda) \sin \lambda \eta] d\lambda}{\Phi^2(\lambda) + \mu^2 \psi^2(\lambda) G_c^2(\lambda)}$$

При $\mu \neq 0$ этими формулами удобно пользоваться в числовых расчетах; сходимость интегралов при $c \neq 0$ весьма быстрая. При $c = 0$ она становится



Фиг. 1



Фиг. 2

очень медленной или вообще не имеет места (это зависит от вида ядра $G(z)$). При $c = 0$ целесообразно считать силу распределенной на некотором интервале, что приводит к появлению под интегралом уже упоминавшегося множителя $\sin(\lambda\beta_1)/(\lambda\beta_1)$.

Остановимся подробнее на случае $\mu = 0$. Вывод и исследование решения для случая $\mu = 0$ дается ниже более подробно, чем в [2, 3], где также исследовался этот случай, но без указания пределов изменения параметров, соответствующих построенному решению. Будем пользоваться формулами для κ_y и κ_M из (2.8) с учетом выражений (4.1). Положим $\mu = 0$. Найдем корни знаменателя в выражениях для κ_y и κ_M :

$$\lambda = \pm (d \pm D^{1/2})^{1/2} (2c)^{-1/2} \quad (4.3)$$

$$D = d^2 - 16c = \left(4 - \frac{S}{R} \right)^2 v_1^4 + 2 \left(8S + \frac{4}{R} - \frac{S}{R^2} \right) v_1^2 + \frac{1}{R^2} - 16$$

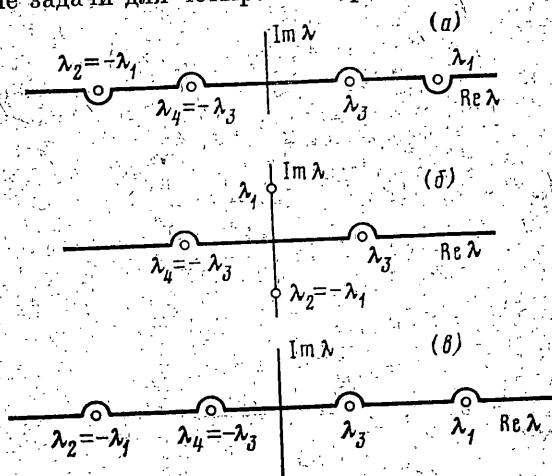
По-прежнему считаем, что $\omega_1^{\circ} > 1$; тогда величина D растет монотонно с ростом v_1 при $v_1 \geq 0$ и обращение D в нуль, с чем связано появление кратного корня, возможно лишь при $R \geq 1/4$. Запишем выражение для величины $v_1 = \tilde{v}_1 > 0$, обращающей в нуль $D(R \geq 1/4)$

$$v_1 \tilde{v} = \left\{ \frac{S}{R^2} - \frac{4}{R} - 8S + \left[\left(\frac{S}{R^2} - \frac{4}{R} - 8S \right)^2 + \left(16 - \frac{4}{R^2} \right) \left(4 - \frac{S}{R} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3} / \left| 4 - \frac{S}{R} \right| \quad (4.4)$$

Убеждаемся, что $v_1 \tilde{v} < R^{1/2}$, $v_1 \tilde{v} < S^{-1/2}$, $v_1 \tilde{v} \leq 1$. Чтобы величина $v_1 \tilde{v}$ приводила к действительному кратному корню, а следовательно, к резонансу, необходимо и достаточно иметь: $d'(R^{1/2}) > 0$ или

$$R > 2/[S + (S^2 + 16)^{1/2}] \quad (4.5)$$

Заметим, что это условие вместе с использованным условием $\omega_1^{\circ} > 1$ обеспечивает выполнение неравенства $R > 1/4$. Считая, что $v_1 \tilde{v} < R^{1/2} < S^{-1/2}$, запишем решение задачи для четырех интервалов изменения величины v_1



Фиг. 3

(при $v_1 \tilde{v} < S^{-1/2} < R^{1/2}$ формулы, приводимые ниже, остаются справедливыми для соответствующих интервалов изменения величины v_1).

1. В случае $0 \leq v_1 \leq v_1 \tilde{v}$ корни λ_i запишем в виде

$$\lambda_1 = \rho e^{i\varphi/2}, \quad \lambda_2 = -\bar{\lambda}_1, \quad \lambda_3 = -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\lambda_2$$

$$\rho = (d^2 + |D|)^{1/4} / (2c)^{1/2} = (4/c)^{1/4}, \quad \varphi = \arccos(d/4c^{1/2})$$

Для значений $\eta \geq 0$ интегралы для κ_v и κ_M выражаются через вычеты относительно точек λ_1 и λ_2 . Получаем

$$\kappa_v = \frac{2 \exp[-\eta \rho \sin(\varphi/2)]}{|D|^{1/2}} \left[\frac{4}{\rho} \cos \left(\eta \rho \cos \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) - \rho \frac{v_1^2 S - 4}{R} \times \right. \\ \left. \times \cos \left(\eta \rho \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \quad (4.6)$$

$$\kappa_M = \frac{2}{|D|^{1/2}} \rho \exp \left(-\eta \rho \sin \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(\eta \rho \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Результаты для $\eta < 0$ получаются из (4.6) заменой η на $|\eta|$. При $v_1 \rightarrow v_1^*$ величины κ_y и κ_M неограниченно возрастают, так как $D \rightarrow 0$.

2. В случае $v_1^* < v_1 < R^{1/2}$ имеем четыре действительных корня

$$\lambda_1 = \left(\frac{d + D^{1/2}}{2c} \right)^{1/2}, \quad \lambda_2 = -\lambda_1, \quad \lambda_3 = \left(\frac{d - D^{1/2}}{2c} \right)^{1/2} = \left(\frac{8}{d + D^{1/2}} \right)^{1/2}, \quad \lambda_4 = -\lambda_3$$

Для определения величин κ_y и κ_M интегрирование следует провести по контуру, показанному на фиг. 3, а. Вид контура установлен из рассмотрения корней как функций коэффициента μ с последующим переходом к пределу при $\mu \rightarrow 0$. Получаем

$$\begin{aligned} \kappa_y &= -\frac{2\psi(\lambda_1)}{\lambda_1 D^{1/2}} \sin \lambda_1 \eta, & \kappa_M &= -\frac{2\lambda_1}{D^{1/2}} \sin \lambda_1 \eta \quad \text{при } \eta \geq 0 \\ \kappa_y &= -\frac{2\psi(\lambda_3)}{\lambda_3 D^{1/2}} \sin \lambda_3 \eta, & \kappa_M &= -\frac{2\lambda_3}{D^{1/2}} \sin \lambda_3 \eta \quad \text{при } \eta \leq 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Величины $|\kappa_y|$ и $|\kappa_M|$ неограниченно растут при $v_1 \rightarrow v_1^*$, а также при $v_1 \rightarrow R^{1/2}$ ($c \rightarrow 0$, $\lambda_1 \rightarrow \infty$), причем во втором случае рост $|\kappa_y|$ и $|\kappa_M|$ имеет место лишь при $\eta > 0$ (вперед движущейся силы). Величина $R^{1/2}$ равна безразмерной скорости распространения сдвиговых деформаций в балке. Отметим, что при приближении v_1 к $R^{1/2}$ неограниченно уменьшается период движущейся вперед силы пространственной формы колебаний.

3. На промежутке $R^{1/2} < v_1 < S^{-1/2}$ корни λ_i имеют вид

$$\lambda_1 = i \left(\frac{d + D^{1/2}}{2|c|} \right)^{1/2}, \quad \lambda_2 = -\lambda_1, \quad \lambda_3 = \left(\frac{D^{1/2} - d}{2|c|} \right)^{1/2} = \left(\frac{8}{d + D^{1/2}} \right)^{1/2}, \quad \lambda_4 = -\lambda_3$$

Интегрирование проводится по контуру, показанному на фиг. 3, б. В результате получаем

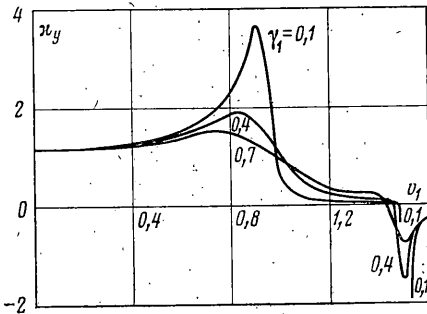
$$\begin{aligned} \kappa_y &= \frac{\psi(\lambda_1)}{|\lambda_1| D^{1/2}} e^{-|\lambda_1| \eta}, & \kappa_M &= -\frac{|\lambda_1|}{D^{1/2}} e^{-|\lambda_1| \eta} \quad \text{при } \eta \geq 0 \\ \kappa_y &= \frac{\psi(\lambda_1)}{|\lambda_1| D^{1/2}} e^{-|\lambda_1| \eta} - \frac{2\psi(\lambda_3)}{\lambda_3 D^{1/2}} \sin \lambda_3 \eta \\ \kappa_M &= -\frac{|\lambda_1|}{D^{1/2}} e^{-|\lambda_1| \eta} - \frac{2\lambda_3}{D^{1/2}} \sin \lambda_3 \eta \quad \text{при } \eta \leq 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

При приближении v_1 к $R^{1/2}$ или $S^{-1/2}$ величина c стремится к нулю, а корень λ_1 — к бесконечности. Однако при $\eta \neq 0$ неограниченного роста величин $|\kappa_y|$ и $|\kappa_M|$ не происходит; при $\eta = 0$ величина κ_M неограниченно растет при $v_1 \rightarrow R^{1/2}$ и $v_1 \rightarrow S^{-1/2}$, а величина κ_y — лишь в первом случае, что следует из вида функции $\psi(\lambda)$.

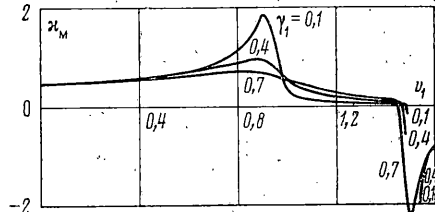
4. При $S^{-1/2} < v_1$ корни λ_i выражаются теми же формулами, что и во втором случае; контур интегрирования показан на фиг. 3, в. При $\eta \geq 0$ величины κ_y и κ_M обращаются в нуль. При $\eta \leq 0$:

$$\begin{aligned} \kappa_y &= \frac{2\psi(\lambda_1)}{\lambda_1 D^{1/2}} \sin \lambda_1 \eta - \frac{2\psi(\lambda_3)}{\lambda_3 D^{1/2}} \sin \lambda_3 \eta \\ \kappa_M &= \frac{2}{D^{1/2}} (\lambda_1 \sin \lambda_1 \eta - \lambda_3 \sin \lambda_3 \eta) \end{aligned}$$

При $v_1 \rightarrow S^{-1/2}$ величина $|\kappa_M|$ неограниченно растет, величина же κ_y остается конечной, так как $\psi(\lambda_1)$ стремится к конечному пределу при $v_1 \rightarrow S^{-1/2}$. Согласно же утверждению [3], происходит резонансное увеличение прогибов при $v_1 \rightarrow S^{-1/2} + 0$ и $\eta < 0$ (в [3] использовались другие параметры, соответствующие v_1 и S). Этот вывод в [3], по-видимому, следствие недосмотра, поскольку из формул этой работы также вытекает ограниченность прогибов в рассматриваемом случае. Заметим, что значение $v_1 = S^{-1/2}$ соответствует при $m = \rho F$ и $I = \rho J$ скорости распространения продольных волн в балке. При увеличении скорости v_1 в рассматриваемом



Фиг. 4



Фиг. 5

интервале величины κ_y и κ_M стремятся к нулю. Следует отметить, что при приближении безразмерной скорости v_1 к значениям $R^{1/2}$ и $S^{-1/2}$ форма изгиба балки такова, что становится неприемлемой сама теория изгиба, основанная на представлении о движении всего сечения балки как единого целого.

На фиг. 4, 5 представлены величины κ_y и κ_M при $R=2,25$, $S=1/16$ для точки приложения ($\eta=0$) постоянной движущейся силы в случае опорной балки на основание Фойхта (1.4). Использовались формулы (4.2) при $\mu G_s=0$, $\mu G_c=-\gamma_1 \lambda v_1$. Критическое значение скорости v_1^* в случае отсутствия диссипации энергии равно 0,932, два других характерных значения $R^{1/2}=1,5$, $S^{-1/2}=4$. При $\gamma_1=0$ на интервале (v_1^* ; $R^{1/2}$) величины κ_y и κ_M при $\eta=0$ в соответствии с (4.7) обращаются в нуль; к таким же значениям, как видно из графиков, стремятся величины κ_y и κ_M при $\gamma_1 \rightarrow 0$.

На фиг. 4 не показано значение величины κ_y при $v_1=R^{1/2}$ и $\gamma_1=0,1$ (это значение равно $-5,7$), а на фиг. 5 не указаны значения величины κ_M при $v_1=R^{1/2}$, $\gamma_1=0,1$ и $\gamma_1=0,4$ (эти значения равны соответственно $-15,3$ и $-4,12$). На интервале ($R^{1/2}$, $S^{-1/2}$) величина κ_y монотонно растет стремясь к нулевому значению, а величина κ_M сначала растет до значения $-0,13$, а затем убывает стремясь к $-\infty$. При $v_1 > S^{-1/2}$ величины κ_y и κ_M равны нулю ($\eta=0$). Следует обратить внимание, что учет диссипации энергии в основании не исключает неограниченности изгибающих моментов при $v_1 \rightarrow S^{-1/2}$; для исключения резонанса в этом случае требуется, видимо, учет внутреннего трения в материале балки.

5. Известно, что в случае линейной системы можно при помощи интеграла Фурье записать реакцию системы на любое воздействие, располагая решением для случая гармонической силы. Пусть на балку в начале координат действует мгновенный единичный импульс $\delta(t)$. Используя интеграл Фурье, а также тот факт, что рассматриваемая система удовлетворяет принципу причинности, запишем выражения для прогибов и изгибаю-

щих моментов в следующем виде ($\tau > 0$):

$$y(\eta, \tau) = -\frac{1}{\pi(4kJm^2)^{1/4}} \int_0^{\infty} \text{Im } \kappa_y \sin(\omega_1 \tau) d\omega_1 \quad (5.1)$$

$$M(\eta, \tau) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{4kJ}{m^2} \right)^{1/4} \int_0^{\infty} \text{Im } \kappa_M \sin(\omega_1 \tau) d\omega_1$$

Если желательно получить решение сразу в подвижной системе координат, движущейся с некоторой скоростью v_1 , то при определении $y(\eta, \tau)$ и $M(\eta, \tau)$ по (5.1) следует взять κ_y и κ_M при соответствующей скорости; однако более просто определяется решение для неподвижной системы координат ($v_1 = 0$), поскольку величины κ_y и κ_M выражаются в этом случае конечными формулами. Так, из формул (5.1) при $\mu = 0$ с использованием выражений (3.6) – (3.9) получаем

$$y(\xi, \tau) = \frac{1}{\pi(4kJm^2)^{1/4}} \left[\int_{\omega_1}^{\infty} \frac{4R - S\omega_1^2 + x_1}{2Rx_1^{1/2}x_0^{1/2}} \cos(\xi x_1^{1/2}) \sin(\omega_1 \tau) d\omega_1 + \right. \\ \left. + \int_{\omega_1}^1 \frac{4R - S\omega_1^2 + x_2}{2Rx_2^{1/2}x_0^{1/2}} \cos(\xi x_2^{1/2}) \sin(\omega_1 \tau) d\omega_1 - \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{4R - S\omega_1^2 + x_2}{2Rx_2^{1/2}x_0^{1/2}} \times \right. \\ \left. \times \cos(\xi x_2^{1/2}) \sin(\omega_1 \tau) d\omega_1 \right] \quad (5.2)$$

$$M(\xi, \tau) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{4kJ}{m^2} \right)^{1/4} \left[\int_{\omega_1}^{\infty} \frac{x_1^{1/2}}{2x_0^{1/2}} \cos(\xi x_1^{1/2}) \sin(\omega_1 \tau) d\omega_1 + \right. \\ \left. + \int_{\omega_1}^1 \frac{x_2^{1/2}}{2x_0^{1/2}} \cos(\xi x_2^{1/2}) \sin(\omega_1 \tau) d\omega_1 - \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{x_2^{1/2}}{2x_0^{1/2}} \cos(\xi x_2^{1/2}) \sin(\omega_1 \tau) d\omega_1 \right] \\ x_0 = p_1^2 - q_1, \quad x_1 = p_1 + x_0^{1/2}, \quad x_2 = p_1 - x_0^{1/2} = q_1 / x_1$$

Преобразуем выражения (5.2) к другому виду. Выполним в первых интегралах замену $x_1^{1/2}(\omega_1) = \lambda$, а во вторых и третьих $x_2^{1/2}(\omega_1) = \lambda$. При разрешении этих соотношений относительно ω_1 для первого и второго интегралов получаем

$$\omega_1 = \alpha(\lambda) = (r - D_1^{1/2})^{1/2}, \quad r = \frac{1}{2} \left[4 \frac{R}{S} + 1 + \lambda^2 \left(R + \frac{1}{S} \right) \right]$$

$$D_1 = r^2 - \frac{1}{S} (\lambda^4 R + \lambda^2 + 4R) = 4 \frac{\lambda^2 R^2}{S} + \left[2 \frac{R}{S} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{1}{S} - R \right) \right]^2$$

Для третьего интеграла $\omega_1 = \beta(\lambda) = (r + D_1^{1/2})^{1/2}$. Рассмотрение выражений $d\omega_1$ и $x_0^{1/2}$ при выполнении замен переменных показывает, что $d\omega_1 = \pm (\lambda R x_0^{1/2} / S \omega_1 D_1^{1/2}) d\lambda$, причем знак плюс относится к первым и третьим интегралам, а минус — ко вторым. В результате выражения (5.2) приводятся к следующему виду (первый и второй интегралы объединяются

в один интеграл):

$$y(\xi, \tau) = \frac{1}{\pi(4kJm^2)^{1/4}} \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi \lambda}{2SD_1^{1/2}} \left[(4R - S\alpha^2 + \lambda^2) \frac{\sin \tau \alpha}{\alpha} - \right. \\ \left. - (4R - S\beta^2 + \lambda^2) \frac{\sin \tau \beta}{\beta} \right] d\lambda$$

$$M(\xi, \tau) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{4KEJ}{m^2} \right)^{1/4} \int_0^{\infty} \frac{R\lambda^2 \cos \xi \lambda}{2SD_1^{1/2}} \left(\frac{\sin \tau \alpha}{\alpha} - \frac{\sin \tau \beta}{\beta} \right) d\lambda$$

Отметим, что полученные результаты могут служить основой для решения разнообразных задач динамики балки Тимошенко, опирающейся на упругонаследственное основание весьма общего вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муравский Г. Б. Колебания балки, лежащей на упругонаследственном основании. — Строительная механика и расчет сооружений, 1976, № 3, с. 38.
2. Crandall S. H. The Timoshenko beam on an elastic foundation. — Proc. 3rd Midwestern Conference Solid Mechanics, Ann Arbor, Mich., 1957, p. 146.
3. Achenbach J. D., Sun C. T. Moving load on a flexibly supported Timoshenko beam. — Internat. J. Solids Structures, 1965, v. 1, No. 4, p. 353.
4. Steele C. R. The Timoshenko beam with a moving load. — Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, v. 35, No. 3, p. 481.
5. Цейтлин А. И. О влиянии сдвига и инерции вращения при колебаниях балки, лежащей на упругом основании. — ПММ, 1961, т. 25, вып. 2, с. 362.
6. Сорокин Е. С., Муравский Г. Б. Об учете упругих несовершенств материалов методами теории наследственной упругости. — Строительная механика и расчет сооружений, 1975, № 4, с. 52.
7. Caughey T. K. Vibration of dynamic system with linear hysteretic damping (linear theory). — Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Berkeley, California, 1962. New York: ASME, 1962, p. 87.
8. Biot M. A. Linear thermodynamics and the mechanics of solids. — Proc. 3rd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Providence, 1958. New York: ASME, 1958, p. 1.
9. Вейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1, М.: Наука, 1969. 344 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.VIII.1979