МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1981

УДК 539.3

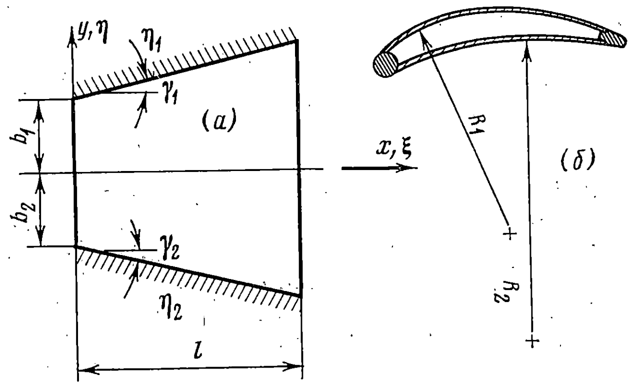
К РАСЧЕТУ ПРОФИЛИРОВАННЫХ ЛОПАТОК РАДИАЛЬНЫХ НАГНЕТАТЕЛЕЙ, ПОДКРЕПЛЕННЫХ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

ПУХЛИЙ В. А.

Расчету на прочность рабочих лопаток радиальных нагнетателей посвящен ряд работ [1—5]. Методика расчета на прочность листовых лопаток, приближающихся к круговым цилиндрическим оболочкам средней длины, изложена в [1], при этом использовались уравнения оболочек с большим показателем изменяемости. Оригинальный подход, при котором колесо радиального нагнетателя рассчитывалось как трехслойная осесимметричная оболочка и при этом сама лопатка схематизировалась в виде заполнителя, изложен в [2]. В [3] рассматривался расчет цилиндрической лопатки переменной толщины, для анализа использовался метод Ритца. Расчет изотропных и анизотропных лопаток радиальных турбомашин дан в [4, 5]. При решении задач использовался подход, основанный на комбинации вариационного метода и модифицированного метода последовательных приближений [6].

В публикуемой работе рассматривается расчет на прочность крыловидных пустотелых лопаток радиальных нагнетателей, подкрепленных ребрами жесткости. Решение краевой задачи для системы эллиптических уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние лопатки, строится на основе метода, изложенного в [7].

1. Постановка задачи. Пустотелая профилированная лопатка радиального нагнетателя, представляющая собою конструкцию, состоящую из двух пологих цилиндрических панелей, подкрепленных по входной и выходной кромкам брусом круглого либо более сложного сечения, приведена на фиг. 1.



Фиг. 1

Напряженно-деформированное состояние каждой панели описывается линейными уравнениями теории пологих оболочек Власова — Доннела, которые в системе безразмерных координат $\xi=x/l$ и $\eta=y/b_1$ имеют вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{1-\nu}{2}m^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1+\nu}{2}m\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{l}{R}\frac{\partial w}{\partial \xi}=-\frac{(1-\nu^2)l^2p}{Eh^2}$$

$$
\begin{gathered}
\frac{1+\nu}{2} m \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + m^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\nu m l}{R} \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \\
12 \frac{l^3}{R h^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} + 12 \frac{\nu m l^3}{R h^2} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \nabla_m{}^4 w + 12 \frac{l^4}{R^2 h^2} w = 12 \frac{(1-\nu^2) q l^4}{E h^4}
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

$$
q=\gamma\omega^2 h R_k \cos\beta_2/g, \quad p=\gamma\omega^2 h (R_k \sin\beta_2 - \xi l)/g
$$

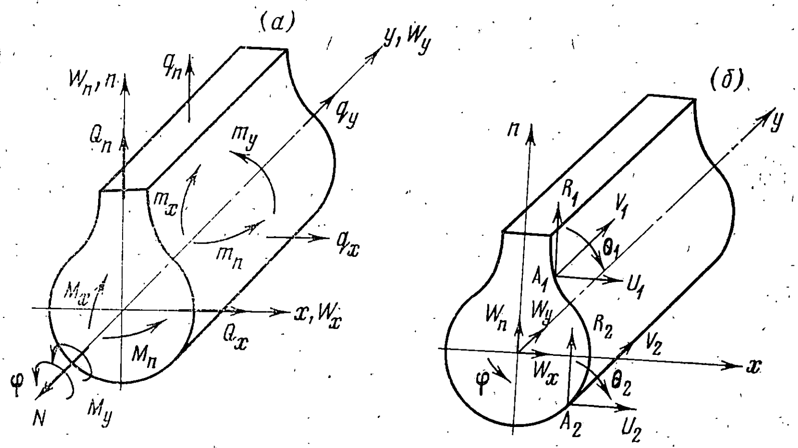
$$
\nabla_m{}^4 = \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2m^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + m^4 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}
$$

$$
u=u^\circ/h, \; v=v^\circ/h, \; w=w^\circ/h
$$

Здесь u°, v°, w° — компоненты перемещений, $m=l/b_1$ — геометрический параметр лопатки, q и p — нормальная и тангенциальная составляющие центробежной нагрузки, β_2 — угол выхода потока.

Граничные условия на краях, прилегающих к дискам, соответствуют условиям жесткого защемления.

Рассмотрим условия упругого сопряжения панелей между собой по входной и выходной кромкам. В целях общности рассматриваемой задачи



Фиг. 2

профиль сечения бруса будем считать произвольным. На фиг. 2, *а* показан элемент бруса. Здесь W_n, W_x, W_y — перемещения центра тяжести сечения бруса по осям n, x, y, φ — угол поворота сечения бруса от оси x к n, M_n, M_x, M_y — изгибающие и крутящий моменты, Q_n и Q_x — поперечные силы, q_n, q_x q_y — проекции на оси координат интенсивности внешней нагрузки, m_n, m_x, m_y — интенсивность внешних изгибающих и крутящего моментов, N — усилие, действующее на элемент бруса.

Из уравнений равновесия элемента бруса следует

$$
\begin{gathered}
d^2 M_n/dy^2 = q_n + dm_n/dy, \quad d^2 M_x/dy^2 = q_x + dm_x/dy \\
dM_y/dy = m_y, \quad dN/dy = -q_y
\end{gathered} \tag{1.2}
$$

Запишем деформационные соотношения

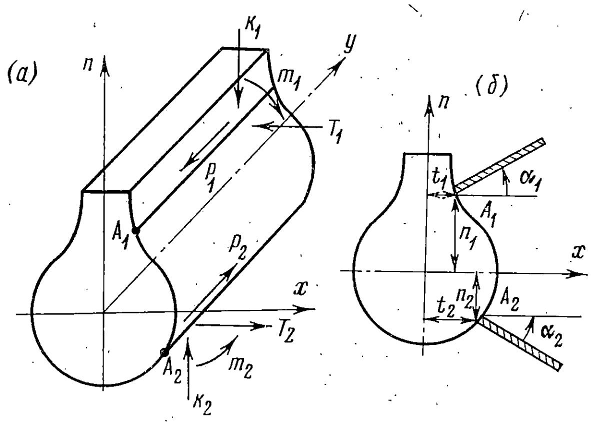
$$
M_n = EI_x \frac{d^2 W_n}{dy^2}, \quad M_x = EI_n \frac{d^2 W_x}{dy^2}, \quad M_y = -GI_k \frac{d\varphi}{dy}, \quad N = EF \frac{dW_y}{dy} \tag{1.3}
$$

где I_x, I_n — моменты инерции сечения относительно главного центра осей x и n, GI_k — жесткость на кручение.

Подставляя выражения (1.3) в (1.2), получим

$$EI_x\frac{d^4W_n}{dy^4}=q_n+\frac{dm_n}{dy},\quad EI_n\frac{d^4W_x}{dy^4}=q_x+\frac{dm_x}{dy}$$
$$GI_k(d^2\varphi/dy^2)=-m_y,\ EF(d^2W_y/dy^2)=-q_y \tag{1.4}$$

Перейдем к рассмотрению схемы нагружения бруса. К точке A_1 с координатами t_1 и n_1 подходит верхняя панель лопатки, а к точке A_2 с коор-



Фиг. 3

динатами t_2 и n_2 (фиг. 3) — нижняя. Рассмотрим геометрические соотношения для точек $A_1(n_1,\ t_1)$ и $A_2(n_2,\ t_2)$. Из фиг. 2, б имеем

$$R_1=W_n+\varphi t_1,\ U_1=W_x-\varphi n_1,\ \theta_1=-\varphi$$
$$R_2=W_n+\varphi t_2,\ U_2=W_x-\varphi n_2,\ \theta_2=-\varphi \tag{1.5}$$

На основе гипотезы плоских сечений получим

$$V_1=W_y-\frac{dW_n}{dy}n_1-\frac{dW_x}{dy}t_1$$
$$V_2=W_y-\frac{dW_n}{dy}n_2-\frac{dW_x}{dy}t_2 \tag{1.6}$$

Запишем соотношения, связывающие R_1, U_1, V_1, θ_1 и R_2, U_2, V_2, θ_2 с перемещениями краев панелей

$$U_1=u^{(1)}\cos\alpha_1-w^{(1)}\sin\alpha_1,\ \theta_1=-\partial w^{(1)}/\partial x$$
$$U_2=u^{(2)}\cos\alpha_2+w^{(2)}\sin\alpha_2,\ \theta_2=-\partial w^{(2)}/\partial x$$
$$R_1=w^{(1)}\cos\alpha_1+u^{(1)}\sin\alpha_1,\ V_1=v^{(1)}$$
$$R_2=w^{(2)}\cos\alpha_2-u^{(2)}\sin\alpha_2,\ V_2=v^{(2)} \tag{1.7}$$

Из выражений (1.5), (1.6) после некоторых преобразований получим первую группу условий сопряжения панелей с брусом

$$R_1-\varphi t_1=R_2-\varphi t_2,\ U_1+\varphi n_1=U_2+\varphi n_2,\ \theta_1=\theta_2 \tag{1.8}$$

$$V_1+\frac{1}{2}n_1\left[\frac{dR_1}{dy}+\frac{dR_2}{dy}+\frac{(t_1+t_2)}{2}\left(\frac{d\theta_1}{dy}+\frac{d\theta_2}{dy}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}t_1\left[\frac{dU_1}{dy}+\frac{dU_2}{dy}-\frac{(n_1+n_2)}{2}\left(\frac{d\theta_1}{dy}+\frac{d\theta_2}{dy}\right)\right]=$$

$$=V_2+\frac{1}{2}n_2\left[\frac{dR_1}{dy}+\frac{dR_2}{dy}+\frac{(t_1+t_2)}{2}\left(\frac{d\theta_1}{dy}+\frac{d\theta_2}{dy}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}t_2\left[\frac{dU_1}{dy}+\frac{dU_2}{dy}-\frac{(n_1+n_2)}{2}\left(\frac{d\theta_1}{dy}+\frac{d\theta_2}{dy}\right)\right]$$

Рассмотрим вторую группу условий сопряжения. Из фиг. 2, 3 имеем

$$\begin{gathered}q_n=-K_1+K_2,\ q_x=-T_1+T_2,\ q_y=-P_1+P_2\\ m_y=-m_1+m_2-K_1t_1+K_2t_2+T_1n_1-T_2n_2\\ m_n=-P_1t_1+P_2t_2,\ m_x=-P_1n_1+P_2n_2\end{gathered}\tag{1.9}$$

Подставляя выражения (1.9) в уравнения (1.4), получим

$$\begin{gathered}EI_x\frac{d^4W_n}{dy^4}=-K_1+K_2-\frac{dP_1}{dy}t_1+\frac{dP_2}{dy}t_2\\ EI_n\frac{d^4W_x}{dy^4}=-T_1+T_2-\frac{dP_1}{dy}n_1+\frac{dP_2}{dy}n_2\\ GI_k\frac{d^2\varphi}{dy^2}=m_1-m_2+K_1t_1-K_2t_2-T_1n_1+T_2n_2\\ EF(d^2W_y/dy^2)=P_1-P_2\end{gathered}\tag{1.10}$$

Запишем соотношения, связывающие K_1, T_1, m_1, P_1 и K_2, T_2, m_2, P_2 с усилиями в панелях

$$\begin{gathered}T_1=-(N_1^{(1)}\cos\alpha_1+Q_1^{(1)}\sin\alpha_1),\quad m_1=-M_1^{(1)}\\ K_1=-(N_1^{(1)}\sin\alpha_1-Q_1^{(1)}\cos\alpha_1),\quad P_1=-N_{12}^{(1)}\\ T_2=N_1^{(2)}\cos\alpha_2-Q_1^{(2)}\sin\alpha_2,\quad m_2=M_1^{(2)}\\ K_2=-(N_1^{(2)}\sin\alpha_2+Q_1^{(2)}\cos\alpha_2),\quad P_2=N_{12}^{(2)}\end{gathered}\tag{1.11}$$

Подставляя выражения для W_n, W_x, φ и W_y из (1.5), (1.6) в соотношения (1.10), получим вторую группу условий сопряжения панелей с брусом

$$\frac{1}{2}EI_x\left[\frac{d^4R_1}{dy^4}+\frac{d^4R_2}{dy^4}+\frac{1}{2}(t_1+t_2)\left(\frac{d^4\theta_1}{dy^4}+\frac{d^4\theta_2}{dy^4}\right)\right]=$$

$$=-K_1+K_2-\frac{dP_1}{dy}t_1+\frac{dP_2}{dy}t_2$$

$$\frac{1}{2}GI_k\left(\frac{d^2\theta_1}{dy^2}+\frac{d^2\theta_2}{dy^2}\right)=m_1-m_2-K_1t_1-K_2t_2-T_1n_1+T_2n_2$$

$$\frac{1}{2}EI_n\left[\frac{d^4U_1}{dy^4}+\frac{d^4U_2}{dy^4}-\frac{1}{2}(n_1+n_2)\left(\frac{d^4\theta_1}{dy^4}+\frac{d^4\theta_2}{dy^4}\right)\right]=$$

$$=-T_1+T_2-\frac{dP_1}{dy}n_1+\frac{dP_2}{dy}n_2 \tag{1.12}$$

$$\frac{1}{2}EF\left\{\frac{d^2V_1}{dy^2}+\frac{d^2V_2}{dy^2}+\frac{(n_1+n_2)}{2}\left[\frac{d^3R_1}{dy^3}+\frac{d^3R_2}{dy^3}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(t_1+t_2)}{2}\left(\frac{d^3\theta_1}{dy^3}+\frac{d^3\theta_2}{dy^3}\right)\right]+\frac{(t_1+t_2)}{2}\left[\frac{d^3U_1}{dy^3}+\frac{d^3U_2}{dy^3}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(n_1+n_2)}{2}\left(\frac{d^3\theta_1}{dy^3}+\frac{d^3\theta_2}{dy^3}\right)\right]\right\}=P_1-P_2$$

Подставляя в условия сопряжения (1.8), (1.12) выражения (1.7) и соотношения для тангенциальных усилий, моментов и обобщенных сил в панелях, получим условия сопряжения панелей лопатки с брусом в функциях перемещений. Следует заметить, что условия упругого сопряжения оболочек между собой должны быть поставлены на обоих краях лопатки, т. е. при $\xi=0$ и 1. В дальнейшем для каждой панели лопатки решается система уравнений (1.1) при заданных граничных условиях и условиях сопряжения панелей с брусом (1.8), (1.12).

2. Решение краевой задачи. К решению краевой задачи для системы уравнений (1.1) применим аналитический подход, основанный на сочетании метода интегральных соотношений и модифицированного метода последовательных приближений [7]. В соответствии с методом интегральных соотношений представим исходную систему (1.1) в дивергентной форме

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi}+\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \eta}+\mathbf{L}=0, \qquad \mathbf{L}=B\mathbf{X}+\mathbf{b} \tag{2.1}$$

$$\mathbf{X}=\{X_i\}=\{u,\ v,\ w,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ Z_4,\ Z_5\}$$

$$\mathbf{Y}=B_0X+B_1\frac{\partial X}{\partial \eta}+B_2\frac{\partial^2 X}{\partial \eta^2}+B_3\frac{\partial^3 X}{\partial \eta^3}$$

$$Z_1=\frac{\partial u}{\partial \xi},\quad Z_2=\frac{\partial v}{\partial \xi},\quad Z_3=\frac{\partial w}{\partial \xi},\quad Z_4=\frac{\partial Z_3}{\partial \xi},\quad Z_5=\frac{\partial Z_4}{\partial \xi}$$

При этом элементы матриц $B_r=\{b_{mn,s}\}$ и $B=\{b_{mn}\}$ ($s=0, 1, 2, 3$; $m, n=1, 2, \ldots, 8$) принимают следующие значения (остальные элементы равны нулю):

$$b_{28,0}=12\frac{\nu m l^3}{Rh^2},\quad b_{35,0}=\frac{2\nu m l}{(1-\nu)R},\quad b_{45,0}=\frac{1+\nu}{1-\nu}m$$

$$b_{54,0}=\frac{1+\nu}{2}m,\quad b_{14,1}=\frac{1-\nu}{2}m,\quad b_{25,1}=\frac{2m^2}{1-\nu}$$

$$b_{78,1}=2m^2,\quad b_{38,3}=m^4,\quad b_{38}=12\frac{l^4}{R^2h^2},\quad b_{48}=12\frac{l^3}{Rh^2},\quad b_{64}=\frac{l}{R}$$

$$b_{41}=b_{52}=b_{63}=b_{76}=b_{87}=-1$$

Компоненты вектора $\mathbf{b}$ равны

$$b_4=(1-\nu^2)l^2p/(Eh^2),\quad b_8=-12(1-\nu^2)ql^4/(Eh^4)$$
$$b_1=b_2=b_3=b_5=b_6=b_7=0 \tag{2.2}$$

Решение системы (2.1) ищем в виде

$$X_i=\sum_{j=1}^{n} X_{ij}(\xi)P_j(\xi,\eta) \qquad (i=1,2,\ldots,8) \tag{2.3}$$

где в качестве системы аппроксимирующих функций $P_j(\xi,\eta)$ выбираются полиномы Якоби, определяемые следующим образом:

$$P_j(\xi,\eta)=P_1(\xi,\eta)\sum_{j=1}^{n}\left[\eta-\frac{(1+\alpha)r}{2}\right]^{j-1}$$

$$P_1(\xi,\eta)=\eta^4-2(1+\alpha)r\eta^3+(1-4\alpha+\alpha^2)r^2\eta^2-$$
$$-2\alpha(1+\alpha)r^3\eta+\alpha^2r^4,\ r=1+k_1m\xi$$

Здесь r — уравнение наклонной стороны лопатки, $\alpha=-b_2/b_1$ — геометрический параметр лопатки. Полиномы $P_j(\xi,\eta)$ ортогональны на отрезке $[r,\alpha r]$ и, образуя систему линейно-независимых функций, удовлетворяют граничным условиям жесткого защемления на косых краях лопатки. Выбирая в качестве весовых функций также полиномы $P_j(\xi,\eta)$, после применения процедуры метода интегральных соотношений к исходной системе уравнений (2.1) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $8n$ с переменными коэффициентами

$$\frac{dX_m}{d\xi}=\sum_{\nu=1}^{m^*}A_{m,\nu}X_\nu+f_m \qquad (m=1,2,\ldots,m^*) \tag{2.4}$$

где ν — номер неизвестной функции, m — номер уравнения ($m^*=16$).

Аналитическое решение системы (2.3) строится модифицированным методом последовательных приближений [6, 7]. В соответствии с методом переменные коэффициенты $A_{\nu,m}$ и свободные члены f_m представим полиномами, непрерывными на интервале изменения независимой переменной

$$A_{\nu,m}=\sum_{k=0}^{q}a_{\nu,m,k}\xi^k,\qquad f_m=\sum_{k=0}^{q}f_{m,k}\frac{\xi^k}{k!}$$

Общее решение системы уравнений (2.3), полученное модифицированным методом последовательных приближений, имеет вид

$$X_m=\sum_{\mu=1}^{m^*}C_\mu\left[\frac{\xi^{\mu-m}}{(\mu-m)!}\delta+\sum_{n=1}^{\infty}X_{m,\mu,n}\right]+\sum_{j=0}^{q}b_{m,j,0}\frac{\xi^{j+1}}{(j+1)!}+\sum_{n=2}^{\infty}X_{m,n}$$

$$X_{m,\mu,n}=\sum_{j=1}^{\beta}b_{m,\mu,n,j}\frac{\xi^{n+j-1}}{(n+j-1)!},\qquad X_{m,n}=\sum_{j=1}^{\beta}b_{m,n,j}\frac{\xi^{n+j-1}}{(n+j-1)!} \tag{2.5}$$

$$\beta=n(q+3)-2$$

где $b_{m,j,0}=f_{m,k}$ при $j=k$, μ — номер фундаментальной функции, C_μ — постоянные интегрирования, $\delta=1$, если $m=\mu$ и $\delta=0$ для остальных μ.

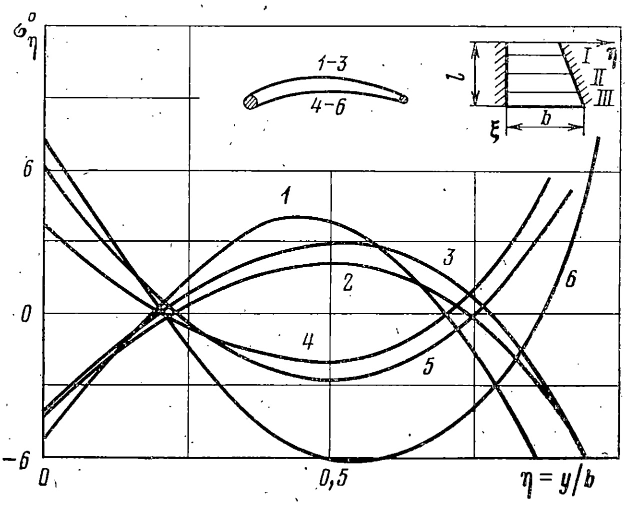
Коэффициенты $b_{m,\mu,n,j}$ и $b_{m,n,j}$ определяются при помощи коэффициентов предыдущего приближения по рекуррентным формулам

$$b_{m,\mu,n,j}=\sum_{\nu=1}^{m^*}\sum_{k=0}^{q} a_{\nu,m,k} b_{\nu,\mu,(n+1),(j-k)} \frac{1}{n+j-1} \prod_{\gamma=0}^{k}(n+j-1-\gamma)$$

$$b_{m,n,j}=\sum_{\nu=1}^{m^*}\sum_{k=0}^{q} a_{\nu,m,k} b_{\nu,(n-1),(j-k)} \frac{1}{n+j} \prod_{\gamma=0}^{k}(n+j-\gamma)$$

Постоянные C_μ, входящие в общее решение системы (2.5), находятся из условий сопряжения панелей с брусом по входной и выходной кромкам лопатки.

3. Пример. В соответствии с изложенным алгоритмом была составлена ФОРТРАН-программа реализации разработанного аналитического решения применительно к ЭВМ М-4030. Проводился расчет лопатки нагнетателя типа 0,7—160, подкрепленной по входной и выходной кромкам стержнями круглого сечения. Исходные данные для колеса: $R_k=0{,}4$ м, $\beta_2=0{,}388$ рад, $n=16{,}6$ об/с, $z=6$ — количество лопаток;



Фиг. 4

для лопатки: $l=b_1=0{,}2$ м, $h=0{,}002$ м, $\alpha=0$. Лопатка подкреплена по входной кромке стержнем круглого сечения диаметром $d_1=0{,}016$ м и по входной кромке $d_2=0{,}008$ м.

На фиг. 4 приведены эпюры распределения безразмерных напряжений $\sigma_\eta^\circ=\sigma_\eta l^2(1-\nu^2)/(Eh^2)$ в основных сечениях лопатки. Проведенное тензометрирование показало, что расхождение результатов расчета с данными тензометрирования не превосходит 20%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бородавко В. А.* Расчет лопаток центробежных вентиляторов на прочность.— Прикл. механика, 1958, т. 4, вып. 3, с. 17.
2. *Демьянушко И. В.* Расчет на прочность рабочих колес центробежных нагнетателей.— Прочность и динамика авиационных двигателей: Сб. статей. М.: Машиностроение, 1969, вып. 5, с. 73.
3. *Марийчук И. Ф., Горлышкин В. Т.* Изгиб пологой незамкнутой цилиндрической оболочки переменной толщины.— Гидроаэромеханика и теория упругости: Сб. статей. Днепропетровский гос. ун-т, 1975, вып. 19, с. 102.
4. *Пухлий В. А.* Расчет напряжений в лопатках радиальных турбомашин.— Прикл. механика, 1976, т. 12, № 6, с. 93.

5. *Пухлий В. А.* Приложение теории пологих анизотропных оболочек к расчету на прочность рабочих лопаток радиальных турбомашин.— Проблемы прочности, 1976, № 12, с. 55.
6. *Григолюк Э. И., Попович В. Е., Пухлий В. А.* Изгиб сложнонагруженных параллелограмных пластин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3, с. 117.
7. *Пухлий В. А.* Метод аналитического решения двумерных краевых задач для систем эллиптических уравнений.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1978, т. 18, № 5, с. 1275.

Москва

Поступила в редакцию
3.VII.1979