МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1981

УДК 539.3

АСИМПТОТИКА РАВНОВЕСИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ БЕЗМОМЕНТНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ МАЛЫХ НАГРУЗКАХ

СРУБЩИК Л. С.

Нелинейные задачи об осесимметричных деформациях безмоментных оболочек вращения исследовались в работах, обзор которых представлен в [1—4]. При численном анализе этих задач широкое применение получили различные варианты метода пристрелки [4—6]. Однако при малых нагрузках (охватывающих вместе с тем широкий диапазон эксплуатационных нагрузок) определяющие соотношения приводятся к системе дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных, когда метод пристрелки становится неэффективным, поэтому следует применять асимптотические методы [7—11].

В публикуемой работе рассматривается система нелинейных уравнений безмоментной теории упругих сферических оболочек под действием равномерно распределенной следящей нагрузки при свободном опирании или при отсутствии перемещений края. Эти уравнения получаются из определяющих соотношений Рейсснера [8], если в последних пренебречь всеми моментами. Такое пренебрежение считается обоснованным либо когда весьма мала жесткость оболочки на изгиб, либо когда весьма малы изменения кривизн и кручения срединной поверхности [12]. В первом случае система уравнений описывает равновесие абсолютно гибкой оболочки (мембраны Рейсснера) и среди многих ее решений механический смысл имеют лишь положительные решения, которые отвечают равновесиям с только растягивающими меридиональными усилиями [13, 14].

Здесь методом пограничного слоя при малых значениях параметра давления Q для положительных решений построены асимптотические представления и найдены области параметров, где результаты асимптотических и численных расчетов перекрываются. При отсутствии перемещений края погранслойное слагаемое определяется из линейной краевой задачи [7—11], а при свободном опирании — из системы нелинейных дифференциальных уравнений, решение которой находится численно.

В окрестности положительных решений по малому параметру относительной тонкостенности ε строится асимптотика мембранных решений, отвечающих равновесиям лишь с растягивающими меридиональными усилиями тонких моментных упругих сферических оболочек [14, 15]. В результате при одновременном стремлении к нулю параметров Q и εQ^{-1} для мембранных решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Рейсснера [8] в случае сферических оболочек произвольного угла раствора при основных типах краевых условий выводятся простые расчетные формулы. Асимптотики других решений уравнений Рейсснера построены в [15, 16]. Отметим, что обзор работ по асимптотике нелинейных интегродифференциальных уравнений представлен в [17].

1. К постановке задачи. Уравнения упругой сферической мембраны под действием равномерно распределенной следящей нагрузки в случае малых деформаций можно представить на основе определяющих соотношений Рейсснера [8] в виде системы

$$r\frac{d}{d\xi}\frac{1}{r}\frac{d}{d\xi}rv_0=\cos\varphi_0-r_1+Q\frac{d}{d\xi}(r^2\sin\varphi_0) \tag{1.1}$$

$$v_0\sin\varphi_0+Q\cos\varphi_0\int\limits_0^\xi r\cos\varphi_0\,d\xi=0,\quad x=r(N_2-\nu N_1)$$

$$\frac{dy}{d\xi}=\sin\varphi_0-r+(N_1-\nu N_2)\sin\varphi_0,\quad r=\sin\xi,$$

$$r_1=\cos\xi\quad N_1=\frac{v_0}{r\cos\varphi_0},\quad N_2=\frac{dv_0}{d\xi}-Qr\sin\varphi_0,$$

$$\left|\frac{v_0}{\xi}\right|_{\xi=0}<\infty,\quad \left|\frac{\varphi_0}{\xi}\right|_{\xi=0}<\infty$$

с краевыми условиями при $\xi=b$:

$$y=v_0=0,\quad y=r\frac{dv_0}{d\xi}-\nu\frac{v_0}{\cos\varphi_0}-Qr^2\sin\varphi_0=0 \tag{1.2}$$

Все входящие в (1.1), (1.2) величины — безразмерные и связаны с размерными [8] по формулам

$$\{\Psi R^{-1}, pR, N_\xi, N_\theta\}=Eh\{v_0, Q, N_1, N_2\},\qquad \{w, u\}=R\{y, x\}$$

Здесь ξ — переменный угол, $\varphi_0(\xi)$ — угол наклона к оси абсцисс элемента мембраны в точке ξ после деформации, p — давление, N_ξ, N_θ, $\Psi(Rr)^{-1}$ — меридиональное, окружное и горизонтальное усилия, w и u — вертикальное и горизонтальное перемещения, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина; R — радиус сферы; $2b$ — угол полного раствора мембраны. Ограничений на угол раствора не налагается, т. е. $0<b<\pi$.

Для краевых задач (1.1), (1.2) имеет место неединственность решений. Например, при $Q=0$ можно указать три непрерывно дифференцируемых решения

$$\varphi_0=\xi,\quad v_0=0,\quad \varphi_0=-\xi,\quad v_0=0,\quad \varphi_0=0$$
$$v_0=2\operatorname{ctg}\frac{\xi}{2}\ln\cos\frac{\xi}{2}+C\operatorname{tg}\frac{\xi}{2} \tag{1.3}$$

где постоянная C в двух случаях (1.2) соответственно равна

$$C=-2\operatorname{ctg}^2\frac{b}{2}\ln\cos\frac{b}{2}$$

$$C=2(1-\nu)^{-1}\operatorname{ctg}^2\frac{b}{2}\left[(1+\nu)\ln\cos\frac{b}{2}+\sin^2\frac{b}{2}\right]$$

По определению [13] мембрана выдерживает только растягивающие усилия ($N_1\geqslant0$, $N_2\geqslant0$). По аналогии с [14] назовем положительным такое решение задачи (1.1), (1.2), для которого $N_1(\xi)\geqslant0$ для $\xi\in(0, b]$. Положительное решение отвечает двухосному напряженному состоянию [2], если для него выполняется условие $N_2(\xi)\geqslant0$ при $\xi\in(0, b]$. Третье решение в (1.3), для которого $N_1(\xi)<0$, $N_2(\xi)<0$ при $\xi\in(0, b]$, по-видимому, не соответствует какому-либо реальному равновесию.

Рассмотрим пример полусферической мембраны при свободном опирании края. В этом случае [15] имеется два тривиальных непрерывно дифференцируемых решения

$$\varphi_0=\xi,\quad v_0=-{}^1/_4Q\sin2\xi,\quad \varphi_0=-\xi,\quad v_0={}^1/_4Q\sin2\xi \tag{1.4}$$

При $Q>0$ второе решение будет положительным и, чтобы занять соответствующее равновесие, мембрана сначала выворачивается. Первое решение не имеет механического смысла. При $Q<0$ мембрана находится под внутренним давлением и реализуется первое решение.

2. Решение краевых задач. Перепишем краевые задачи (1.1), (1.2) в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в форме, удобной для применения метода пристрелки [18]. Дифференцируя второе уравнение по ξ и полагая $v_0=y_1$, $\varphi_0=y_3$, из (1.1), (1.2) имеем систему

$$\begin{gathered} dy_1/d\xi=y_2, \quad dy_2/d\xi=r^{-1}(-r_1y_2+r^{-1}y_1)+ \\ +r^{-1}(\cos y_3-r_1)+2Qr_1\sin y_3-QKry_3 \\ dy_3/d\xi=-K, \quad K=z(y_2\sin y_3+Qr\cos^2 y_3) \\ r=\sin\xi, \quad z=y_1^{-1}\cos y_3, \quad r_1=\cos\xi \end{gathered} \tag{2.1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered} y_1(0)=y_3(0)=0, \quad F\equiv y_1(b)=0, \quad y_1(0)=y_3(0)=0, \\ F\equiv[ry_2-\nu z^{-1}-Qr^2\sin y_3]_{\xi=b}=0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Остальные функции, характеризующие напряженно-деформированное состояние мембраны, легко вычисляются, если y_1, y_2, y_3 известны. Согласно методу пристрелки [18], обозначим $y_2(0)=2s$ и будем разыскивать неизвестное s при помощи метода Ньютона и процедуры продолжения по параметру Q из уравнения $F(s,Q)\equiv F(s,Q,y_1,y_2,y_3,b)=0$, где неизвестные функции $y_i(b)$ определяются как решение задачи Коши для системы (2.1) с начальными данными $y_1(0)=y_3(0)=0$, $y_2(0)=2s$. Если в процессе вычисления итераций s_j оказывается, что $F(s_j,Q)F(s_{j+1},Q)<0$, то дальнейшее отыскание корня сводится к последовательному делению интервала $[s_j,s_{j+1}]$ пополам. Как правило, последнее имеет место при вычислении положительных решений $(2s=N_1(0)=N_2(0)>0)$, для которых при фиксированном Q метод Ньютона плохо сходится и следует применять метод С. А. Чаплыгина для одностороннего приближения к решению [14, 19].

В точках ξ, удовлетворяющих условию $y_1(\xi)=0$ или $\cos y_3(\xi)=0$, задачи (2.1), (2.2) имеют особенности. Поэтому здесь непосредственное применение метода пристрелки (см. [20]) дает возможность проводить расчеты лишь в очень узком диапазоне нагрузок, причем для оболочек, строго меньших полусферы.

Покажем, как устранить указанные особенности, и предложим алгоритм, позволяющий интегрировать задачи (2.1), (2.2) без этих ограничений. Пусть $\cos y_3(\xi_0)=0$, где $0<\xi_0\leqslant b$. Тогда из второго уравнения в (2.1) непосредственно следует, что $y_1(\xi_0)=0$. При этом, если $y_3(\xi_0)={}^1/_2\pi(1+4k)$, то

$$z^{-1}(\xi_0)\equiv\left[\frac{y_1}{\cos y_3}\right]_{\xi=\xi_0}=-Q\int_0^{\xi_0} r\cos y_3 d\xi$$

а если $y_3(\xi_0)={}^1/_2\pi(4k-1)$, то

$$z^{-1}(\xi_0)=Q\int_0^{\xi_0} r\cos y_3\, d\xi \quad (\pm k=0,1,2,\ldots)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию y_4, которая определяется уравнением

$$dy_4/d\xi=-Qr\cos y_3, \quad y_4(0)=0 \tag{2.3}$$

где y_3 находится из решения задачи (2.1), (2.2). В силу приведенного выше легко видеть, что в точках ξ_0 справедливы равенства $z=y_4^{-1}$, если $y_3(\xi_0)={}^1/_2\pi(1+4k)$ и $z=-y_4^{-1}$, если $y_3(\xi_0)={}^1/_2\pi(4k-1)$.

Теперь будем интегрировать систему (2.1), (2.2) вместе с (2.3), но при этом функцию z в (2.1), (2.2) определим формулой

$$
\begin{aligned}
z&=y_1^{-1}\cos y_3 \quad &\text{при} \quad &|y_3-{}^1/_2\pi(1+2k)|>\delta \\
z&=y_4^{-1} \quad &\text{при} \quad &|y_3-{}^1/_2\pi(1+4k)|\leqslant\delta \\
z&=-y_4^{-1} \quad &\text{при} \quad &|y_3+{}^1/_2\pi(1-4k)|\leqslant\delta
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Здесь δ — достаточно малое число. В приведенных ниже результатах вычислений полагалось $\delta=10^{-15}$. Особенности в правых частях (2.1) при $\xi\to 0$ раскрываются в виде $dy_1/d\xi=2s$, $dy_2/d\xi=dy_4/d\xi=0$, $dy_3/d\xi=-{}^1/_4Qs^{-1}$.

Вычисления следует начинать при $|Q_0|=0{,}16$ и $s=0{,}04$, что вытекает из формул (3.3), (3.4) (см. ниже). При заданном шаге приращения параметра нагрузки ΔQ решения строятся для убывающей последовательности значений $|Q_{m+1}|$, где $Q_{m+1}=Q_m-\operatorname{sign}(Q_m)|\Delta Q|$, и для возрастающей последовательности значений $|Q_{i+1}|$, где $Q_{i+1}=Q_i+\operatorname{sign}(Q_m)|\Delta Q|$. Отметим, что уравнения (1.1), (1.2) обладают симметрией при замене Q на $-Q$. При этом функции v_0, N_1, N_2, x сохраняются, а функции φ_0, y меняют только знак. Таким способом вычисляются и неположительные решения для малых значений Q.

Численные результаты для положительных решений при некоторых значениях Q представлены в конце п. 3. При больших деформациях мембраны, возникающих с увеличением параметра Q, необходимо пользоваться уравнениями, выведенными в [21], численное решение которых для сферической оболочки методом пристрелки дано в [6].

3. Асимптотика положительных решений мембраны. Для относительно малых значений параметра Q изложенный в п. 2 метод пристрелки может сходиться только для неположительных решений. При его помощи находится третье решение (1.3). Положительное решение задачи (1.1) со вторым типом краевых условий в (1.2) не удается найти методом пристрелки уже при $Q=0{,}03$ для полусферической мембраны. Оказывается, что отсутствие сходимости связано с наличием у положительных решений пограничного слоя при $Q\to 0$ [7—11].

Действительно, при помощи замены переменных $v_0=f|Q|$, $\varphi_0=\omega$, $|Q|=\sigma^2$ из (1.1), (1.2) получаем сингулярно-возмущенную систему уравнений

$$
\begin{gathered}
\sigma^2 r\frac{d}{d\xi}\frac{1}{r}\frac{d}{d\xi}(rf)=\cos\omega-r_1\pm\sigma^2\frac{d}{d\xi}(r^2\sin\omega), \quad r=\sin\xi, \quad r_1=\cos\xi \\
f\sin\omega\pm\cos\int_0^\xi r\sin\omega\, d\xi=0, \quad |f\xi^{-1}, \omega\xi^{-1}|_{\xi=0}<\infty
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

с краевыми условиями при $\xi=b$:

$$
f=0, \quad rdf/d\xi-\nu f/\cos\omega\mp r^2\sin\omega=0 \tag{3.2}
$$

Здесь, и всюду в дальнейшем, верхний знак берется в случае $Q>0$, а нижний знак — в случае $Q<0$.

Асимптотические разложения при $\sigma\to 0$ строятся в виде

$$
\begin{gathered}
f\sim\sum_{i=0}\sigma^i\left[f_i(\xi)+\alpha_i\left(\frac{b-\xi}{\sigma}\right)\right] \\
\omega\sim\sum_{i=0}\sigma^i\left[\omega_i(\xi)+\beta_i\left(\frac{b-\xi}{\sigma}\right)\right]
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

При $\sigma=0$ из (3.1) получаем

$$f_0={}^1/_4\sin 2\xi,\qquad \omega_0=\mp\xi \tag{3.4}$$

Функции f_i, ω_i ($i\geqslant 1$) находятся в результате первого итерационного процесса [17], откуда $f_1=\omega_1=0$. Функции пограничного слоя α_i, β_i получаем в результате второго итерационного процесса [17]. Для определения α_0, β_0 аналогично [15, 16] выводим уравнения

$$\begin{gathered}\sin b\alpha_0''-\cos(\beta_0\mp b)+\cos b=0\\ {}^1/_2\sin b\sin\beta_0+\alpha_0\sin(\beta_0\mp b)=0\\ (\ )'=d(\ )/dt,\qquad t=(b-\xi)/\sigma,\qquad (\alpha_0,\beta_0)_{t\to\infty}\to 0\end{gathered} \tag{3.5}$$

Во втором случае в (3.2) для уравнений (3.5) получаем краевое условие $\alpha_0'(0)=0$. Тогда $\alpha_0=\beta_0=0$ и главный член асимптотики α_1, β_1 определяется из линейной краевой задачи [7—11]:

$$\alpha_1''\mp\beta_1=0,\qquad \beta_1''\mp 2\alpha_1=0,\qquad \alpha_1'(0)={}^1/_2(1-\nu),\qquad \alpha_1(\infty)=0 \tag{3.6}$$

Отсюда следует

$$\begin{gathered}\alpha_1(t)=2^{-3/2}(\nu-1)\exp(-\sqrt{2}t)\\ \beta_1(t)=\pm 2^{-1/2}(1-\nu)\exp(-\sqrt{2}t)\end{gathered} \tag{3.7}$$

Таким образом, для положительного решения краевой задачи (1.1) при втором условии в (1.2) в силу (3.4), (3.6) имеем при $\sigma^2=|Q|\to 0$ асимптотические представления

$$\begin{gathered}v_0\sim|Q|\left[\frac{1}{4}\sin 2\xi+\frac{\sigma}{2\sqrt{2}}(\nu-1)\exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(b-\xi)\right)\right]\\ \omega\sim\mp\left[\xi+\frac{\sigma}{\sqrt{2}}(\nu-1)\exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}(b-\xi)\right)\right]\end{gathered} \tag{3.8}$$

Следующие члены асимптотики в пограничном слое определяются из уравнений вида (3.6), но неоднородных. При помощи (3.8) из (1.1) находим, что $N_1\geqslant 0$ и $N_2\geqslant 0$. Следовательно, для сферической мембраны при отсутствии перемещений края формулы (3.8) отвечают двухосному напряженному состоянию.

В случае свободного опирания для уравнений (3.5) имеем краевое условие

$$\alpha_0(0)=-{}^1/_4\sin 2b\qquad (0<b<\pi) \tag{3.9}$$

Учитывая, что при достаточно больших t система (3.5) эквивалентна первым двум уравнениям (3.6) и, следовательно, $\alpha_0(t)=O(\exp[-\sqrt{2}t])$, $\beta_0(t)=O(\exp[-\sqrt{2}t])$, будем разыскивать решение задачи (3.5), (3.9) в виде

$$\begin{gathered}\alpha_0\approx\sum_{i=1}a_ix^i,\quad \sin\beta_0\approx\sum_{i=1}d_ix^i,\quad \cos\beta_0\approx\sum_{i=0}c_ix^i\\ x=\exp(-\sqrt{2}\,t)\end{gathered} \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.6) и приравнивая нулю после приведения подобных членов коэффициенты при x^n ($n\geqslant 1$), для определения c_0, c_1, d_1,

a_k, d_k, c_k $(k\geqslant 2)$ получаем рекуррентные формулы

$$c_0=1,\quad c_1=0,\quad d_1=2a_1 \tag{3.11}$$

$$c_n=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(d_id_{n-i}+c_ic_{n-i})$$

$$a_n=\frac{1}{(n^2-1)\sin b}\left[G+\frac{1}{2}c_n\cos b\right],\quad d_n=2\left(a_n+\frac{G}{\sin b}\right)$$

$$G=\sum_{i=1}^{n-1}a_i(\sin b\, c_{n-i}-\cos b\, d_{n-i})$$

Отсюда видно, что все коэффициенты рядов (3.10) могут быть найдены, если a_1 известно. При помощи (3.10) из (3.9) для определения a_1 получаем уравнение

$$F(a_1,b)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\frac{1}{4}\sin 2b=0 \tag{3.12}$$

Это уравнение в силу (3.11) рассматривается как неявное относительно a_1. Искомый корень определяется численно с применением процедуры продолжения по параметру b и ньютоновских итераций. Процесс следует начинать с точки $b={}^1/_2\pi$, когда известно тривиальное решение $a_1=0$. Если в процессе вычисления итераций оказывается, что $F(a_1^{(j)})F(a_1^{(j+1)})<0$, то дальнейшее отыскание корня находится последовательным делением интервала пополам. При вычислении функции N_1 в точках ξ_0, для которых $|\omega(\xi_0)\pm{}^1/_2\pi|<\delta$, как и в п. 2, раскрываем неопределенность. В результате при $Q>0$ имеем

$$N_1(\xi_0)=\pm[V_1(V_2\sin\xi)^{-1}]_{\xi=\xi_0}$$

$$V_1(\xi_0)=\left[\frac{\sqrt{Q}}{2}\cos 2\xi_0+\sum_{i=1} ia_ix_0{}^i\right]\sqrt{Q}$$

$$x_0=\exp(-\sqrt{2}t_0),\quad t_0=(b-\xi_0)/\sigma$$

$$V_2(\xi_0)=1+Q^{-1/2}\beta_0',\quad (\ )'=d(\ )/dt,\quad Q=\sigma^2$$

Здесь в формуле для N_1 берется верхний знак, если $|\beta_0-\xi_0+{}^1/_2\pi|<\delta$, и нижний знак, если $|\beta_0-\xi_0-{}^1/_2\pi|<\delta$. Функция $\beta_0'(t)$ вычисляется из соотношения $(\cos\beta_0)'=-\beta_0'\sin\beta_0$ с учетом (3.10). При $|\beta_0(t)|<0{,}01$ применяется формула $(\sin\beta_0)'=\beta_0'\cos\beta_0$. Случай $Q<0$ рассматривается аналогично.

По программе, составленной по формулам (3.10)–(3.12) для b, удовлетворяющих равенствам $|b-{}^1/_2\pi|=0{,}1$; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; ${}^1/_4\pi$, соответственно были получены значения $(-a_1)=0{,}0493$; 0,0948; 0,1328; 0,1607; 0,1768; 0,1790; 0,1506. При этом в (3.11) полагалось $n=12$ или $n=50$. Время счета на БЭСМ-6 сразу всех указанных значений меньше 1 мин при условии, что $|a_1^{(j)}-a_1^{(j+1)}|<10^{-8}$, $j=1, 2,\ldots,l$, где l — заданное число итераций. При $|b-{}^1/_2\pi|\leqslant{}^1/_4\pi$ было найдено, что решение всегда положительно $(N_1>0)$, а при значениях b, близких к ${}^1/_2\pi$, отвечает двухосному напряженному состоянию. Например, для $Q=0{,}05$ при $c=|b-{}^1/_2\pi|\leqslant 0{,}15$

функции N_1 и N_2 положительны, а при $b=1{,}3708$ функция N_2 положительна при $0\leqslant\xi\leqslant0{,}9b$ и меняет знак вблизи края. С увеличением значения c растет окрестность точки $\xi=b$, где $N_2<0$. При $b=0{,}9708$ ширина этой окрестности равна $0{,}15b$.

Области применимости асимптотического и численного методов перекрываются. Контрольные расчеты по формулам (3.8) для $b/\pi={}^1/_6$, ${}^1/_4$, ${}^1/_3$, ${}^1/_2$, ${}^2/_3$, ${}^3/_4$, ${}^5/_6$ (см. второй случай в (1.2)) при $Q=0{,}12$ дали расхождение с результатами прямых численных расчетов на две или три единицы во второй значащей цифре, а при $Q=0{,}06$ и $b={}^1/_2\pi$ расхождение для функции v_0 лишь в пятой цифре после запятой. В первом случае в (1.2) сравнение производилось при $b=1{,}2708$ при $Q=0{,}08$. В точке $\xi=b$ асимптотическим методом было получено $v_0=4\cdot10^{-12}$; $N_1=0{,}02888$; $\varphi_0=-1{,}5708$; $N_2=-0{,}01398$, а прямыми численными расчетами (см. п. 2) соответственно $2\cdot10^{-7}$; $0{,}03912$; $-1{,}5708$; $-0{,}01372$. В точке $\xi=1{,}0807$ асимптотическим методом было получено $v_0=0{,}01239$; $N_1=0{,}03772$; $\varphi_0=-1{,}1891$; $N_2=0{,}02149$, а численными расчетами при $\xi=1{,}093$ соответственно $0{,}01188$; $0{,}03683$; $-1{,}1983$; $0{,}02033$. При $\xi=0{,}890$ расхождения для этих же величин не превышают единицы во второй значащей цифре. Отметим, что при $|b-{}^1/_2\pi|>{}^1/_4\pi$ формулы (3.10)–(3.12) мало эффективны.

4. Мембранные решения непологих сферических оболочек. Существует связь между положительными решениями задачи о равновесии мембраны и мембранными решениями задачи о равновесии весьма тонких упругих оболочек. Соответствующие уравнения сферических оболочек согласно теории Рейсснера примем в виде [15]:

$$r\frac{d}{d\xi}\frac{1}{r}\frac{d}{d\xi}(r\Psi)=\cos\Phi-r_1+Q\frac{d}{d\xi}(r^2\sin\Phi)-\varepsilon^2\left[\frac{d}{d\xi}(r\Phi)-r_1+\right.$$
$$\left.+\nu(\cos\Phi-r_1)-\frac{1}{r}\cos\Phi(\sin\Phi-r)\right]\left[\frac{1}{r}\sin\Phi+\nu\frac{d\Phi}{d\xi}\right] \tag{4.1}$$
$$\varepsilon^2\left[\frac{d}{d\xi}\left(r\frac{d\Phi}{d\xi}\right)-r_1-\frac{1}{r}\cos\Phi(\sin\Phi-r)+\right.$$
$$\left.+\nu(\cos\Phi-r_1)\right]=\Psi\sin\Phi+Q\cos\Phi\int_0^\xi r\cos\Phi\,d\xi$$
$$\varepsilon=h(R\gamma)^{-1},\quad \gamma^2=12(1-\nu^2),\quad r=\sin\xi$$
$$r_1=\cos\xi,\quad |\Psi/\xi,\ \Phi/\xi|_{\xi=0}<\infty$$

с краевыми условиями при $\xi=b$:

$$M(b)\equiv\left[\frac{d\Phi}{d\xi}+\frac{\nu}{r}\sin\Phi-1-\nu\right]_{\xi=b}=\Psi(b)=0 \tag{4.2}$$
$$\Phi(b)=b,\quad \Psi(b)=0;\quad \Phi(b)=b,\quad u(b)=0$$
$$M(b)=0,\quad u(b)\equiv\left[r\frac{d\Psi}{d\xi}-Q\sin^2 b\sin\Phi-\nu\Psi\cos\Phi+\right.$$
$$\left.+\nu Q\int_0^\xi r\cos\Phi\,d\xi\sin\Phi\right]_{\xi=b}=0$$

соответствующими: подвижной шарнирной опоре, защемлению края в горизонтально подвижной опоре, глухой заделке края, неподвижной шарнирной опоре. Связь безразмерных величин в (4.1), (4.2) с размерными в [8] указана в [15].

При $\varepsilon\to 0$ задачи (4.1) с первыми двумя типами краевых условий в (4.2) переходят в вырожденную задачу (1.1) с условием $y(b)=v_0(b)=0$, а задачи (4.1) с двумя другими типами краевых условий в (4.2) — в задачу со вторым условием в (1.2). Во втором и третьем случаях асимптотические представления при $\varepsilon\to 0$ строятся в виде

$$\Phi\sim\varphi_0(\xi)+g_0(t),\quad \Psi\sim v_0(\xi)+\varepsilon h_1(t) \qquad (4.3)$$
$$t=(b-\xi)/\varepsilon$$

где g_0 и h_1 определяются из краевых задач [15]:

$$g_0''-k_1\sin g_0=0,\quad h_1''=\nu g_0' g_0''-Qg_0'\sin b\cos[\varphi_0(b)+g_0]$$
$$k_1=N_1(b)=v_0(b)[\sin b\cos\varphi_0(b)]^{-1}>0$$
$$g_0(0)=b-\varphi_0(b),\quad \{g_0,h_1\}_{t\to\infty}\to 0\quad (\ )'=d(\ )/dt$$

При выводе этих уравнений методом пограничного слоя при $\varepsilon\to 0$ используются оценки вида

$$\int_0^\xi r\sin\varphi_0(s)\sin g_0(t)\,ds=O(\varepsilon)$$

Умножая первое уравнение на g_0' и интегрируя от t до ∞, получим $g_0'=-2\sqrt{k_1}\sin(g_0/2)$, где знак минус взят потому, что при $t\to\infty$ уравнение для $g_0(t)$ эквивалентно линейному уравнению $g_0''-k_1g_0=0$ и, следовательно, $g_0(t)\sim m\exp(-\sqrt{k_1}t)$, причем m — некоторая положительная постоянная. Теперь, интегрируя с учетом краевых условий, согласно [15, 22] имеем

$$g_0(t)=4\,\mathrm{arctg}\left[\mathrm{tg}\frac{b-\varphi_0(b)}{4}\exp(-\sqrt{k_1}t)\right] \qquad (4.4)$$

$$h_1(t)=\frac{2}{\sqrt{k_1}}\left[A\left(\cos\frac{g_0}{2}-1\right)+B\sin\frac{g_0}{2}\right]$$

$$k_1=N_1(b)=\frac{v_0(b)}{\sin b\cos\varphi_0(b)},\quad |b-\varphi_0(b)|<2\pi$$

При этом для второго и третьего типа краевых условий в (4.2) соответственно получаем

$$A=\nu k_1-|Q|\sin b,\quad B=0,\quad k_1=k_2$$
$$A=\nu k_1+Q\sin b\sin\varphi_0(b),\quad B=Q\sin b\cos\varphi_0(b)$$

Асимптотика (4.3) и формула (4.4) для g_0, однако, без ссылки приводятся в [20] (см. там же формулы (2.4), (2.5)).

В случаях подвижного и неподвижного шарнирного опирания края $g_0=h_1=0$. Тогда асимптотические представления при $\varepsilon\to 0$ строятся в виде

$$\Phi\sim\varphi_0(\xi)+\varepsilon g_1(t),\quad \Psi\sim v_0(\xi)+\varepsilon^2h_2(t) \qquad (4.5)$$

где g_1 и h_2 определяются из краевых задач

$$g_1''-k_1g_1=0,\quad h_2''=-Qg_1'\sin b\cos\varphi_0(b) \qquad (4.6)$$

$$g_1'(0)=A_1=\frac{d\varphi_0(b)}{d\xi}+\nu\frac{\sin\varphi_0(b)}{\sin b}-1-\nu,\quad \{g_1,h_2\}_{t\to\infty}\to 0$$

В случае неподвижного шарнирного опирания функции φ_0, v_0 определяются из задачи (1.1) с условиями второго типа в (1.2). Здесь

$$g_1(t)=\frac{-A_1}{\sqrt{k_1}}\exp(-\sqrt{k_1}t)$$
$$h_2(t)=\frac{-A_1Q}{k_1}\sin b\cos\varphi_0(b)\exp(-\sqrt{k_1}t) \tag{4.7}$$

В случае подвижного шарнирного опирания края функции φ_0, v_0 определяются из задачи (1.1) с условиями первого типа в (1.2). Раскрывая неопределенность в k_1, с учетом (2.3), (2.4) получаем

$$g_1(t)=\frac{-A_2}{\sqrt{k_2}}\exp(-\sqrt{k_2}t),\quad h_2(t)\equiv 0$$
$$k_2=\mp pa^{-1},\quad A_2=a-1\mp\left(\frac{1}{\sin b}\pm 1\right)\nu \tag{4.8}$$
$$\left.\frac{d\varphi_0}{d\xi}\right|_{\xi=b}=a,\quad \left.\frac{dv_0}{d\xi}\right|_{\xi=b}=-p\sin b,\quad t=(b-\xi)/\varepsilon$$

Отметим, что в аналогичной формуле для головного члена асимптотики в пограничном слое, приведенной в [20, с. 466], не вскрыт характер асимптотики, так как не определен показатель экспоненты.

Теперь дадим вывод краевых условий (1.2) для вырожденных уравнений (1.1) при помощи асимптотического метода. В случае первых двух типов краевых условий в (4.2) это непосредственно вытекает после подстановки асимптотических представлений для функции Ψ в краевое условие $\Psi(b)=0$ и приравнивания нулю коэффициента при ε^0. Для двух других типов краевых условий в (4.2) второе выражение в (1.2) получается после подстановки (4.3) или (4.5) в краевое условие $u(b)=0$ в (4.2), приравнивания нулю коэффициента при ε^0, а также учета соотношения, получаемого из второго уравнения (1.1) при $\xi=b$.

Асимптотические представления (4.5) вместе с (1.4), (4.8) дают простые формулы для расчета равновесий тонкой полусферической оболочки при подвижно шарнирном опирании края.

При одновременном стремлении к нулю параметров Q и εQ^{-1} имеет место явление вторичного краевого эффекта для оболочки, который развивается внутри зоны краевого эффекта нелинейной мембраны [8, 9]. В этом случае при неподвижном закреплении края оболочек с любым начальным углом раствора для расчета равновесий также имеем простые асимптотические представления. При глухой заделке края эти представления даются формулами (4.3), (3.8) и (4.4), а при неподвижно шарнирном опирании — формулами (4.5), (3.8) и (4.7). Отсюда следует, что утверждение [20, с. 463] о том, что асимптотический метод для уравнений Рейсснера применим только к оболочкам, строго меньшим полусферы, является неправильным.

Выписанные выше формулы дают только главные члены асимптотики при $\varepsilon\to 0$ для решений уравнений Рейсснера. Построение следующих членов асимптотики проводится по схеме, изложенной в [15, 17]. Используя эту схему, автор работы [20] получает уравнения для определения следующих членов асимптотических разложений при $\varepsilon\to 0$ (см. формулы (1.4), (1.5), (1.7) в [20]). Однако эти уравнения неверны, так как при их выводе неправильно разложены в ряд по ε функции вида $\cos(y_0+\varepsilon y_1+$

$+\varepsilon^2 y_2+\ldots)$, $\sin(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\ldots)$, что нетрудно заметить, если воспользоваться формулами (3.7) в [23, с. 58].

Автор благодарит С. А. Алексеева, А. С. Григорьева, В. И. Усюкина за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорьев А. С.* О теории и задачах равновесия оболочек при больших деформациях.– Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 1, с. 163.
2. *Алексеев С. А.* Основы теории мягких осесимметричных оболочек.– Расчет пространственных конструкций. Сб. статей. М.: Стройиздат, вып. 10, 1965, с. 5.
3. *Yang W. H., Feng W. W.* On axisymmetrical deformations of nonlinear membrances — Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1970, v. 37, No. 4, p. 1002.
4. *Bauer L., Callegari A. J., Reiss E. L.* On the collapse of shallow elastic membranes.— In: Nonlinear elasticity. New York: Acad. Press, 1973, p. 1.
5. *Callegari A. J., Reiss E. L.* Nonlinear boundary value problems for the circular membranes.— Arch. Rat. Mech. Analysis, 1968, v. 31, No. 5, p. 390.
6. *Солодилов Ю. И.* Несущая способность и выбор оптимальной кривизны пневматических сферических оболочек.– Строит. механ. и расчет сооруж., 1969, № 2, с. 33.
7. *Bromberg E., Stoker J. J.* Nonlinear theory of curved elastic sheets.— Quart. Appl. Math., 1945, v. 3, No. 3, p. 246.
8. *Reissner E.* On axisymmetrical deformations of thin shells of revolution.— Proc. Sympos. Appl. Math., 1950, v. 3, p. 27.
9. *Reissner E.* The edge effect in symmetric bending of shallow shells of revolution.— Commun. Pure Appl. Math., 1959, No. 2, p. 385.
10. *Усюкин В. И.* Деформация мембранных оболочек вращения.– Изв. АН СССР. Механ. и машиностр., 1964, № 2, с. 134.
11. *Балабух Л. И., Усюкин В. И.* Приближенная теория мягких оболочек вращения.– Тр. VIII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1973, с. 230.
12. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 430 с.
13. *Алексеев С. А.* Расчет круглой упругой мембраны под равномерной поперечной нагрузкой.– Инж. сб., 1959, т. 25, с. 64.
14. *Срубщик Л. С., Юдович В. И.* Асимптотическое интегрирование системы уравнений большого прогиба симметрично загруженных оболочек вращения.– ПММ, 1962, т. 26, вып. 5, с. 913.
15. *Срубщик Л. С.* Асимптотика уравнений Рейсснера в нелинейной теории симметрично загруженных оболочек вращения.– Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 3, с. 530.
16. *Жуков М. Ю., Срубщик Л. С.* Об асимптотическом значении верхнего критического давления непологих сферических оболочек.– ПММ, 1974, т. 38, вып. 4, с. 778.
17. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
18. *Валишвили Н. В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
19. *Мельник В. В., Срубщик Л. С.* К вопросу о расчете плоской мембраны.– Математический анализ и его приложения. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1971, т. 3, с. 20.
20. *Нарченко В. В.* Применение асимптотического метода при численном интегрировании сингулярно-возмущенных уравнений.– Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 2, с. 460.
21. *Григорьев А. С.* Равновесие безмоментной оболочки вращения при больших деформациях.– ПММ, 1961, т. 25, № 6, с. 1083.
22. *Deruntz J. A.* End effect bending stresses in cables.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1969, v. 36, No. 4, p. 750.– Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж. механ. Сер. E, 1969, № 4, с. 99.
23. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 247 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
25.VIII.1980