

УДК 533.6.013.42

ДИФРАКЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН НА ПРОВОДЯЩЕМ ЖИДКОМ ЦИЛИНДРЕ

СЕЛЕЗОВ И. Т., ЯКОВЛЕВ В. В.

Исследованию дифракции магнитоакустических и магнитоупругих волн посвящены работы [1-4].

В публикуемой работе дано решение новой задачи излучения магнитоупругих волн и их дифракции на параллельной излучателю полости с электропроводящей жидкостью, которая решается в приближении слабой электропроводности. Определены связанные упругие, гидродинамические и электромагнитные поля и построены асимптотические длинноволновые приближения в случаях ближнего и дальнего полей. Получены оценки точности, выполнены численные расчеты и анализируется влияние магнитного поля и электропроводностей сред на дифрагированные упругие поля.

1. Постановка задачи. Цилиндрическая магнитоупругая волна вида $f(r_1) \exp(-i\omega t)$ излучается сосредоточенным линейным источником и дифрагирует на круговой цилиндрической полости, заполненной магнито-гидродинамической средой (фиг. 1). Предполагается, что в невозмущенном состоянии среды имеют слабую электропроводность и подвержены действию достаточно сильного осевого магнитного поля H_0 .

Уравнения магнитоупругости в безразмерной форме в приближении $R_m \ll 1$ и $P_H \ll 1$ во внешней области $r > 1$ имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{u} + (1 + \kappa) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \\ = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - R_m P_H \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0 \right) \times \mathbf{H}_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0, \quad \nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{e} = 0$$

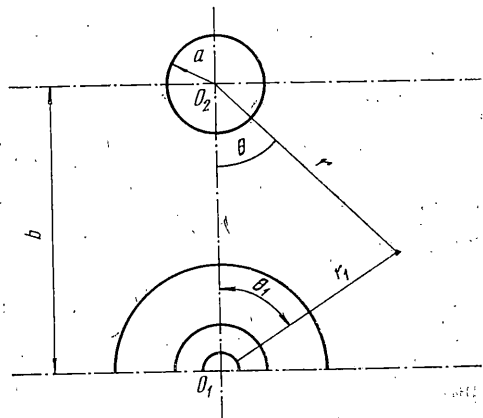
Линеаризованные уравнения движения магнито-гидродинамической среды в таком же приближении для внутренней области записываются в виде

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}^g}{\partial t} = -C_0^2 \nabla \rho^g + R_m^g P_H^g (\mathbf{v}^g \times \mathbf{H}_0) \times \mathbf{H}_0$$

$$\partial \rho^g / \partial t + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}^g = 0, \quad dp^g / d\rho^g = c_0^2$$

$$\nabla \times \mathbf{h}^g = \mathbf{v}^g \times \mathbf{H}_0, \quad \nabla \times \mathbf{e}^g = -\frac{\partial \mathbf{h}^g}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{h}^g = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{e}^g = 0 \quad (1.2)$$

Предполагается, что выполняются условия упругой изотропии, условия отсутствия электрических зарядов и, кроме того, $\mu = \mu^g$, $\varepsilon = \varepsilon^g$, $P_H = P_H^g$.



Фиг. 1

Индекс g характеризует величины во внутренней области. Безразмерные величины со звездочками, которые всюду в изложении не пишутся, вводятся по формулам: $(r^*, \mathbf{u}^*) = (r, \mathbf{u})/a$, $t^* = c_s t/a$, $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}/c_s$, $\rho^* = \rho/\rho_s$, $\mathbf{H}^* = \mathbf{H}/H_0$, $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}/(\mu H_0 c_s)$, $\varepsilon^* = \mu^2 H_0^2 \varepsilon/\rho_s$, $(\sigma_{ik}^*, t_{ik}^*) = (\sigma_{ik}, t_{ik})/(\rho_s c_s^2)$, $P_H = \mu H_0/(\rho_s c_s^2)$, $R_m = \mu \sigma c_s a$, $\kappa = \lambda/G$.

Соответствующие граничные условия на поверхности раздела двух сред при $r=1$ имеют вид (\mathbf{n} — вектор внешней нормали к поверхности раздела).

$$L(R_m^2 \mathbf{f}^g - R_m \mathbf{f}) = 0, \quad L = \begin{Bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{n} \times \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{e} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}^g - \partial \mathbf{u}/\partial t) = 0 \quad (1.3)$$

$$n_i [(-p^g \delta_{ik} - \sigma_{ik}) + (t_{ik}^g - t_{ik})] = 0$$

$$\sigma_{ik} = (u_{i,k} + u_{k,i}) + \kappa \delta_{ik} u_{n,n} \quad (i, k, n = 1, 2)$$

$$t_{ik} = R_m P_H (H_{0i} h_k + h_i H_{0k} - \delta_{ik} H_{0n} h_n)$$

Здесь δ_{ik} — символ Кронекера, σ_{ik} — компонента тензора напряжений упругой среды, t_{ik} — компонента максвеллова тензора натяжений, по повторяющимся индексам выполняется суммирование.

Кроме того, искомые функции по внешней области должны удовлетворять условиям излучения и ограниченности на бесконечности, а во внутренней — условиям регулярности в нуле.

Так как линейный источник излучает гармонические волны, то искомые функции представлены в виде

$$f(r, \theta, z, t) = \tilde{f}(r, \theta, z) e^{-i\omega t} \quad (1.4)$$

Множитель $e^{-i\omega t}$ и знак в верхнем индексе в дальнейшем не пишем.

2. Решение задачи излучения магнитоупругих волн. Если вектор \mathbf{u} представить в виде

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \mathbf{a}, \quad \nabla \cdot \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{a} = \psi \mathbf{k}_z$$

то первое уравнение системы (1.1) с учетом (1.4) распадается на два независимых уравнения

$$(2 + \kappa) \nabla^2 \varphi + (\omega^2 + i\omega R_m P_H) \varphi = 0$$

$$\nabla^2 \psi + (\omega^2 + i\omega R_m P_H) \psi = 0 \quad (2.1)$$

Остальные уравнения системы (1.1) в цилиндрических координатах принимают вид

$$\frac{\partial h_z}{\partial r} = -i\omega u_r, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial h_z}{\partial \theta} = -i\omega u_\theta$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (h_\theta r) - \frac{\partial h_r}{\partial \theta} \right] = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial e_z}{\partial \theta} = i\omega h_r$$

$$\frac{\partial e_z}{\partial r} = i\omega h_\theta, \quad \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (e_\theta r) - \frac{\partial e_r}{\partial \theta} \right] = i\omega h_z \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (h_r r) + \frac{\partial h_\theta}{\partial \theta} \right] = 0, \quad \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (e_r r) + \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} \right] = 0$$

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Решения уравнений (2.1), (2.2) с учетом условий излучения в системе координат (r_1, θ_1, z_1) , связанной с излучателем (фиг. 1), в случае осевой симметрии можно представить в форме

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 H_0^{(1)}(k_1 r_1), \quad \psi = \psi_0 H_0^{(1)}(k_2 r_1) \\ h_z &= -i\omega \varphi_0 H_0^{(1)}(k_1 r_1), \quad e_\theta = -\frac{i\omega}{k_1} \varphi_0 H_1^{(1)}(k_1 r_1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $H_0^{(1)}(x)$ и $H_1^{(1)}(x)$ — функции Ханкеля первого рода (верхний индекс в дальнейшем опускаем), а величины ω , k_1 и k_2 удовлетворяют условиям

$$\omega > 0, \quad \operatorname{Re} k_1 > 0, \quad \operatorname{Re} k_2 > 0, \quad \operatorname{Im} k_1 > 0, \quad \operatorname{Im} k_2 > 0 \quad (2.4)$$

Из системы уравнений (2.2) следует, что составляющие электромагнитного поля h_z и e_θ порождаются излучаемыми дилатационными волнами. Таким образом, линейный источник излучает два типа волн — дилатационные и эквиволуминальные. В случае, если φ_0 или ψ_0 равны нулю, будут излучаться только дилатационные или только эквиволуминальные волны. В дальнейшем рассматривается общий случай, когда $\varphi_0 \neq 0$ и $\psi_0 \neq 0$.

3. Решение задачи дифракции. Рассеянная полостью магнитоупругая волна во внешней области описывается системой уравнений (2.1), имеющей с учетом условий (2.4) решения

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m(k_1 r) \cos m\theta, \quad \psi = \sum_{m=0}^{\infty} B_m H_m(k_2 r) \sin m\theta. \quad (3.1)$$

Ряды вида (3.1) абсолютно и равномерно сходятся в каждой точке пространства вне полости и на ее поверхности (при этом k_1 , k_2 и θ — фиксированные) [5].

Исходя из (2.3) и (3.1) и применяя теорему сложения [6], построим дифрагированное поле в системе координат, связанной с рассеивателем. Тогда при $r < b$ для φ и ψ имеем

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} [\varepsilon_m \varphi_0 J_m(k_1 r) H_m(k_1 b) + A_m H_m(k_1 r)] \cos m\theta \quad (3.2)$$

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} [\varepsilon_m \psi_0 J_m(k_2 r) H_m(k_2 b) + B_m H_m(k_2 r)] \sin m\theta$$

Величины u_r и u_θ будут определяться соотношениями

$$\begin{aligned} u_r &= \sum_{m=0}^{\infty} [k_1 (\varepsilon_m \varphi_0 J_m'(k_1 r) H_m(k_1 b) + A_m H_m'(k_1 r)) + \\ &+ \frac{m}{r} (\varepsilon_m \psi_0 J_m(k_2 r) H_m(k_2 b) + B_m H_m(k_2 r))] \cos m\theta \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} u_\theta &= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{r} [(\varepsilon_m \varphi_0 J_m(k_1 r) H_m(k_1 b) + A_m H_m(k_1 r)) + \\ &+ k_2 (\varepsilon_m \psi_0 J_m'(k_2 r) H_m(k_2 b) + B_m H_m'(k_2 r))] \sin m\theta \end{aligned}$$

В цилиндрических координатах первые два уравнения системы (1.2) примут вид

$$\begin{aligned} i\omega\rho_0 v_r^g &= c_0^2 \frac{\partial \rho^g}{\partial r} + R_m^g P_H v_r^g \\ i\omega\rho_0 v_\theta^g &= c_0^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \rho^g}{\partial \theta} + R_m^g P_H v_\theta^g \\ -i\omega\rho^g + \rho_0 \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(v_r^g r) + \frac{\partial v_\theta^g}{\partial \theta} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Остальные уравнения системы (1.2) запишутся аналогично выражениям (2.2).

Систему уравнений (3.4) после некоторых преобразований можно свести к одному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho^g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho^g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \rho^g}{\partial \theta^2} + p^2 \rho^g &= 0 \\ p^2 &= \frac{1}{c_0^2} \left(\omega^2 + \frac{i\omega R_m^g P_H}{\rho_0} \right) \end{aligned}$$

решение которого с учетом условий (2.4) имеет вид

$$\rho^g = \sum_{m=0}^{\infty} C_m J_m(pr) \cos m\theta \quad (3.5)$$

Из уравнений (3.4) определим величины v_r^g и v_θ^g :

$$v_r^g = -\frac{i\omega}{\rho_0 p} \sum_{m=0}^{\infty} C_m J_m(pr) \cos m\theta \quad (3.6)$$

$$v_\theta^g = \frac{i\omega}{\rho_0 p^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{r} C_m J_m(pr) \sin m\theta$$

Условия сопряжения (1.3) при $r=1$ записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} v_r^g &= -i\omega u_r, \quad \sigma_{rr} = -p^g, \quad \sigma_{r\theta} = 0 \\ R_m^g h_r^g - R_m h_r &= 0, \quad R_m^g h_\theta^g - R_m h_\theta = 0 \\ R_m^g h_z^g - R_m h_z &= 0, \quad R_m^g e_r^g - R_m e_r = 0 \\ R_m^g e_\theta^g - R_m e_\theta &= 0, \quad R_m^g e_z^g - R_m e_z = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из уравнений (2.1), (2.2), (3.4) и (3.7) следует, что механическая и электромагнитная задачи частично распались и, кроме того, h_r , h_θ и e_z во внешней и внутренней областях тождественно равны нулю. Подставляя выражения (2.2) в (3.7), получаем условия сопряжения при $r=1$

$$\begin{aligned} v_r^g &= -i\omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\ -\kappa k_1^2 \varphi + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right) &= -p^g \\ \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - k_2^2 \psi - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

После подстановки (3.2), (3.3), (3.5) и (3.6) в (3.8) приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов

$$\begin{aligned} A_m F_1(k_1) + B_m F_2(k_2) + C_m c_0^2 J_m(p) &= \varepsilon_m F_3 \\ A_m F_4(k_1) + B_m F_5(k_2) &= \varepsilon_m F_6 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$A_m k_1 H_m'(k_1) + B_m m H_m(k_2) - C_m \frac{1}{\rho_0 p} J_m'(p) = \varepsilon_m F_7$$

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1^2 [-\chi H_m(k_1) + 2H_m''(k_1)], & F_2 &= 2m [k_2 H_m'(k_2) - H_m(k_2)] \\ F_3 &= -k_1^2 \varphi_0 H_m(k_1 b) [-\chi J_m(k_1) + 2J_m''(k_1)] - 2m \psi_0 H_m(k_2 b) [k_2 J_m'(k_2) - J_m(k_2)] \\ F_4 &= 2m [k_1 H_m'(k_1) - H_m(k_1)], & F_5 &= k_2^2 [H_m(k_2) + 2H_m''(k_2)] \\ F_6 &= -2m \varphi_0 H_m(k_1 b) [k_1 J_m'(k_1) - J_m(k_1)] - k_2^2 \psi_0 H_m(k_2 b) [J_m(k_2) + 2J_m''(k_2)] \\ F_7 &= -k_1 \varphi_0 J_m'(k_1) H_m(k_1 b) - m \psi_0 J_m(k_2) H_m(k_2 b) \end{aligned}$$

Из системы уравнений (3.9) находим

$$A_m = \varepsilon_m \frac{\Delta A_m}{\Delta}, \quad B_m = \varepsilon_m \frac{\Delta B_m}{\Delta}, \quad C_m = \varepsilon_m \frac{\Delta C_m}{\Delta}$$

$$\begin{aligned} \Delta A_m &= J_m'(p) [F_2 F_6 - F_3 F_5] + \rho_0 c_0^2 p J_m(p) [F_6 m H_m(k_2) - F_5 F_7] \\ \Delta B_m &= J_m'(p) [F_3 F_4 - F_1 F_6] + \rho_0 c_0^2 p J_m(p) [F_4 F_7 - F_6 k_1 H_m'(k_1)] \\ \Delta C_m &= \rho_0 p F_1 [F_5 F_7 - m H_m(k_2) F_6] - F_2 [F_4 F_7 - k_1 H_m'(k_1) F_6] + \\ &\quad + F_3 [F_4 m H_m(k_2) - F_5 k_1 H_m'(k_1)] \\ \Delta &= J_m'(p) [F_2 F_4 - F_1 F_5] + \rho_0 c_0^2 p J_m(p) [F_4 m H_m(k_2) - F_5 k_1 H_m'(k_1)] \end{aligned} \quad (3.10)$$

При $P_H = 0$ формулы (3.10) дают выражения для коэффициентов задачи дифракции цилиндрической упругой волны на полости, заполненной акустической средой [7].

Таким образом найдено решение механической задачи во внешней и внутренней областях. На основании полученных решений можно построить из уравнений (2.2) и (2.4) и условий сопряжений (3.7) решения для составляющих электромагнитного поля h_z , e_r и e_θ [7].

4. Асимптотические приближения и численные результаты. Исследуем рассеянное поле упругих волн в длинноволновом приближении, когда $|k_1| \sim |k_2| \sim |p| = o(1)$ [9]. Используя асимптотические представления функций Бесселя и Ханкеля при малых аргументах, получим:

при $m=0$

$$A_0 = \frac{k_1^2}{2} i\pi \varphi_0 H_0(k_1 b) \frac{\chi - \rho_0 c_0^2}{\chi k_1^2 \ln^2 k_1 + 4\rho_0 c_0^2} \quad (4.1)$$

при $m > 0$

$$\begin{aligned} A_m &= -\frac{4i\pi}{(m-1)!^2} \left(\frac{k_1}{2}\right)^m F_8 \frac{2m(m^2-1) - \rho_0 c_0^2 p^2}{4m(m+1)(k_2^2 - \chi k_1^2) - \rho_0 c_0^2 p^2 k_2^2} \\ B_m &= -A_m \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^m, \quad F_8 = \varphi_0 \left(\frac{k_1}{2}\right)^m H_m(k_1 b) + \psi_0 \left(\frac{k_2}{2}\right)^m H_m(k_2 b) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из (4.1) можно сделать вывод, что в длинноволновом приближении при $\chi = \rho_0 c_0^2 = K$ происходит интенсивное поглощение нулевой моды продольных волн.

При $m > 1$

$$2m(m^2-1) \gg \rho_0 c_0^2 p^2, \quad 4m(m+1)(k_2^2 - \chi k_1^2) \gg \rho_0 c_0^2 p^2 k_2^2$$

Поэтому выражение (4.2) можно упростить

$$A_m = -2i\pi \left(\frac{k_1}{2}\right)^m \frac{F_8}{(m-1)!(m-2)! \kappa k_1^2 - k_2^2} \quad (4.3)$$

$$B_m = -A_m (k_2/k_1)^m$$

Из (4.1), (4.2) и (4.3) можно сделать вывод, что в длинноволновом приближении внутреннее магнитное поле существенно влияет на первую моду колебаний и не влияет на нулевую и последующие моды. Кроме того, при увеличении напряженности магнитного поля H_0 или проводимости σ амплитуды дилатационных и эквиволюминальных волн уменьшаются по экспоненциальному закону.

В дальнейшем будем исследовать рассеянное поле напряжений

$$\sigma_{rr} = \sum_{m=v}^{\infty} \left[A_m (-\kappa k_1^2 H_m(k_1 r) + 2k_1^2 H_m''(k_1 r)) - B_m \frac{2m}{r} (H_m(k_2 r) - k_2 H_m'(k_2 r)) \right] \cos m\theta \quad (4.4)$$

Рассмотрим сначала поле напряжений на поверхности полости и оценим погрешность, которая вносится при отбрасывании в ряде (4.4) членов с номерами $m > v$. Используя асимптотические разложения функций Ханкеля и предполагая, что $|k_1 b| \sim |k_2 b|$ достаточно велико, с учетом (4.3) и (4.4) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{\circ} &= -\frac{8}{\kappa k_1^2 - k_2^2} \sum_{m=v+1}^{\infty} \frac{m^2(m^2-1)}{m!} F_8 \cos m\theta = \frac{8}{\kappa k_1^2 - k_2^2} \times \\ &\times \left\{ -\varphi_0 \sum_{m=v+1}^{\infty} \frac{m^4}{m!} \left(\frac{k_1}{2}\right)^m H_m(k_1 b) \cos m\theta - \psi_0 \sum_{m=v+1}^{\infty} \frac{m^4}{m!} \left(\frac{k_2}{2}\right)^m H_m(k_2 b) \cos m\theta + \right. \\ &\left. + \varphi_0 \sum_{m=v+1}^{\infty} \frac{m^2}{m!} \left(\frac{k_1}{2}\right)^m H_m(k_1 b) \cos m\theta + \psi_0 \sum_{m=v+1}^{\infty} \frac{m^2}{m!} \left(\frac{k_2}{2}\right)^m H_m(k_2 b) \cos m\theta \right\} = \\ &= \frac{8}{\kappa k_1^2 - K_2^2} (-S_1 - S_2 + S_3 + S_4) \end{aligned}$$

откуда следует

$$|\sigma_{rr}^{\circ}| \leq \frac{8}{|\kappa k_1^2 - k_2^2|} (|S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4|)$$

$$|S_1| \leq \varphi_0 \sqrt{\frac{2}{\pi |k_1| b}} \frac{e^{-\text{Im } k_1 b}}{(v+1)!} \left(\frac{|k_1|}{2}\right)^{v+1} \{ [(\beta x)^4 + 6(\beta x)^3 + 7(\beta x)^2 + \beta x] e^{\beta x} \}_x^{(v+1)}$$

$$|S_2| \leq \psi_0 \sqrt{\frac{2}{\pi |k_2| b}} \frac{e^{-\text{Im } k_2 b}}{(v+1)!} \left(\frac{|k_2|}{2}\right)^{v+1} \{ [(\beta y)^4 + 6(\beta y)^3 + 7(\beta y)^2 + \beta y] e^{\beta y} \}_y^{(v+1)}$$

$$|S_3| \leq \varphi_0 \sqrt{\frac{2}{\pi |k_1| b}} \frac{e^{-\text{Im } k_1 b}}{(v+1)!} \left(\frac{|k_1|}{2}\right)^{v+1} \{[(\beta x)^2 + \beta x] e^{\beta x}\}_x^{(v+1)}$$

$$|S_4| \leq \psi_0 \sqrt{\frac{2}{\pi |k_2| b}} \frac{e^{-\text{Im } k_2 b}}{(v+1)!} \left(\frac{|k_2|}{2}\right)^{v+1} \{[(\beta y)^2 + \beta y] e^{\beta y}\}_y^{(v+1)}$$

$$x = 1/2 |k_1| \quad y = 1/2 |k_2| \quad (0 < \beta < 1)$$

Окончательно получаем

$$|\sigma_{rr}^{\circ}| \leq \frac{8}{4\chi k_1^2 - k_2^2} \left[\varphi \frac{e^{-\text{Im } k_1 b}}{(v+1)!} \left(\frac{|k_1|}{2}\right)^{v+1} \sqrt{\frac{2}{\pi |k_1| b}} \right. \quad (4.5)$$

$$\left. \{[(\beta x)^4 + 6(\beta x)^3 + 8(\beta x)^2 + 2(\beta x)] e^{\beta x}\}_x^{(v+1)} + \psi_0 \frac{e^{-\text{Im } k_2 b}}{(v+1)!} \left(\frac{|k_2|}{2}\right)^{v+1} \sqrt{\frac{2}{\pi |k_2| b}} \times \right.$$

$$\left. \times \{[(\beta y)^4 + 6(\beta y)^3 + 8(\beta y)^2 + 2(\beta y)] e^{\beta y}\}_y^{(v+1)} \right] = \Phi(k_1, k_2, v, b)$$

Пусть ε — заданная точность вычислений, тогда при фиксированных k_1 , k_2 и v из (4.5) получаем критерий удаленности линейного источника

$$\Phi(k_1, k_2, v, b) < \varepsilon \quad (4.6)$$

Далее, аналогично случаю ближнего поля оценим остаток ряда (4.4) для дальнего поля рассеянных волн при фиксированном b и $1 \ll |k_1 r| \sim |k_2 r| \leq b$. Из выражения (4.4) с учетом (4.3) и асимптотических представлений функций Ханкеля имеем $\sigma_{rr}^{\circ} \approx S_1 + S_2 - S_3 - S_4$.

$$S_1 \approx i\pi k_1^2 \frac{2\chi + 1}{\chi k_1^2 - k_2^2} \frac{2\varphi_0}{\pi k_1 \sqrt{br}} \sum_{m=v+1}^{\infty} \left(\frac{k_1}{2}\right)^{2m} \frac{\exp\{i[k_1(b+r) - m\pi - \pi/2]\}}{(m-1)!(m-2)!}$$

$$S_2 \approx i\pi k_1^2 \frac{2\chi + 1}{\chi k_1^2 - k_2^2} \frac{2\psi_0}{\pi \sqrt{k_1 k_2 br}} \sum_{m=v+1}^{\infty} \left(\frac{k_1 k_2}{4}\right)^m \frac{\exp\{i[k_1 r + k_2 b - m\pi - \pi/2]\}}{(m-1)!(m-2)!}$$

$$S_3 \approx \frac{4i\pi(1 + ik_2)}{r[\chi k_1^2 - k_2^2]} \frac{2\varphi_0}{\pi \sqrt{k_1 k_2 br}} \sum_{m=v+1}^{\infty} m \left(\frac{k_1 k_2}{4}\right)^m \frac{\exp\{i[k_2 r + k_1 b - m\pi - \pi/2]\}}{(m-1)!(m-2)!}$$

$$S_4 \approx \frac{4i\pi(1 + ik_2)}{r[\chi k_1^2 - k_2^2]} \frac{2\psi_0}{\pi k_2 \sqrt{br}} \sum_{m=v+1}^{\infty} m \left(\frac{k_2}{2}\right)^m \frac{\exp\{i[k_2(b+r) - m\pi - \pi/2]\}}{(m-1)!(m-2)!}$$

Отсюда следует, что

$$|\sigma_{rr}^{\circ}| \leq |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| = \Phi_1(k_1, k_2, v, b, r) \quad (4.7)$$

$$|S_1| \leq \varphi_0 |k_1^2| \frac{2\chi + 1}{|\chi k_1^2 - k_2^2|} \frac{2}{|k_1| \sqrt{br}} \exp[-\text{Im } k_1(b+r)] \left(\frac{|k_1|}{2}\right)^{2(v+1)} \beta^v \frac{I_1^{(v)}(\beta x)}{(v+1)! v!}$$

$$|S_2| \leq \psi_0 |k_1^2| \frac{2\chi + 1}{|\chi k_1^2 - k_2^2|} \frac{2}{\sqrt{|k_1| |k_2| br}} \times$$

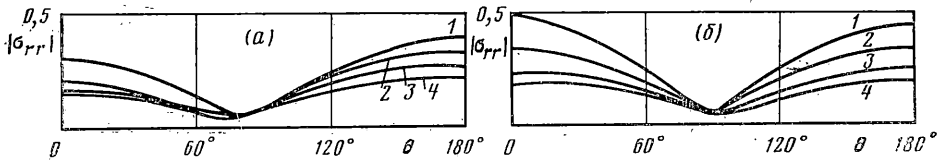
$$\begin{aligned} & \times \exp[-\operatorname{Im} k_1 r - \operatorname{Im} k_2 b] \left(\frac{|k_1 k_2|}{4} \right)^{\nu+1} \beta^\nu \frac{I_1^{(\nu)}(\beta y)}{(\nu+1)! \nu!} \\ |S_3| \leq \varphi_0 & \frac{8(1+|k_2|) \exp[\operatorname{Im} k_2 r - \operatorname{Im} k_1 b]}{|k_1 k_2^2 - k_2^2| \sqrt{|k_1| |k_2| b r}} \left(\frac{|k_1 k_2|}{4} \right)^{\nu+1} \times \\ & \times \frac{1}{\nu! (\nu+1)!} \left[2I_1(\beta y) + \frac{\beta^2 y}{2} I_1'(\beta y) \right]_\nu^{(\nu)} \\ |S_4| \leq \varphi_0 & \frac{8(1+|k_2|) \exp[-\operatorname{Im} k_2 (b+r)]}{|k_1 k_2^2 - k_2^2| |k_2| \sqrt{b r}} \left(\frac{k_2}{2} \right)^{2(\nu+1)} \times \\ & \times \frac{1}{\nu! (\nu+1)!} \left[2I_1(\beta z) + \frac{\beta^2 z}{2} I_1'(\beta z) \right]_\nu^{\nu} \end{aligned}$$

Аналогично рассуждениям в случае ближнего поля при фиксированных k_1 , k_2 , ν и b из (4.7) можно получить критерий удаленности рассеянного поля

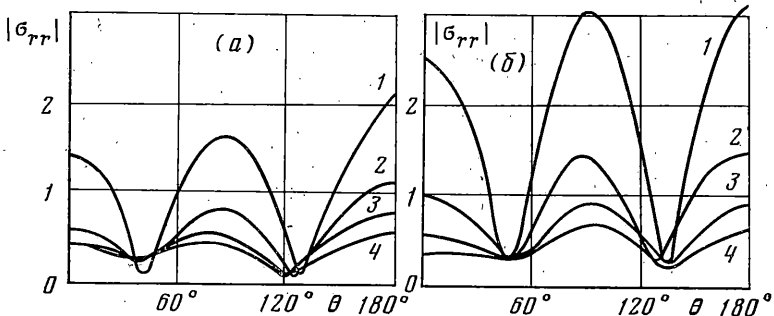
$$\Phi_1(k_1, k_2, \nu, b, r) < \varepsilon \quad (4.8)$$

Выражения (4.6) и (4.8) могут служить оценками точности при усечении ряда (4.4) в длинноволновом приближении.

По аналогии с (4.7) можно получить оценку для внешнего поля при $r > b$ в дальней зоне.



Фиг. 2



Фиг. 3

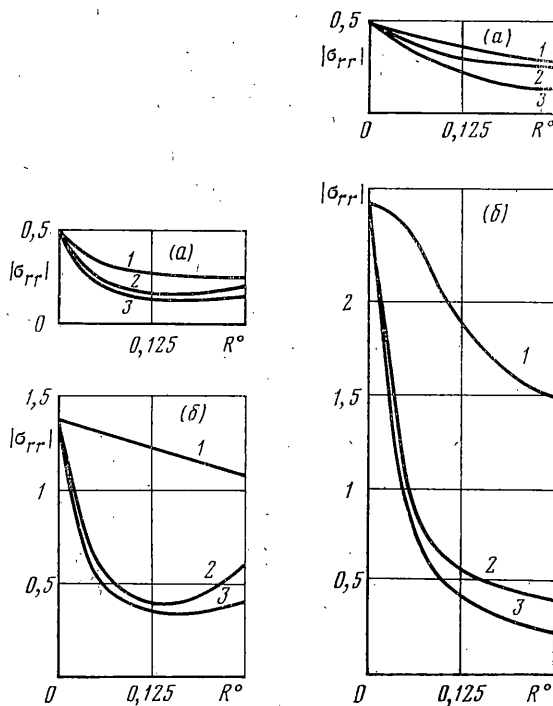
5. Численные результаты. Для оценки влияния магнитного поля и электропроводностей сред на дифрагированные упругие поля проведены расчеты нормальных напряжений σ_{rr} на поверхности полости в широком диапазоне изменения параметров. В качестве примера рассмотрена упругая среда типа висмут, содержащая слабопроводящую гидродинамическую среду со свойствами воды (например, вода с электропроводящими примесями). Приняты расчетные параметры: $\rho_0=0,102$, $c_0=1,36$, $\nu=0,33$, $\omega=2,4$, $b=5$; $R_m P_H, R_m^s P_H^s=0, 0,05, 0,1, 0,15, 0,2, 0,25$.

На фиг. 2, 3 построено распределение $|\sigma_{rr}|$ по контуру полости при падении продольной (а) и поперечной (б) волн при $R_m^s P_H^s=R_m P_H=0, 0,05, 0,1, 0,15$ (кривые

1-4) $\omega=2$ (фиг. 2) и $\omega=4$ (фиг. 3). Из приведенных на фиг. 2, а, б графиков видно, что падающая продольная волна вызывает несколько меньше нормальные напряжения по контуру цилиндрической полости, чем поперечная.

На фиг. 3, а, б показано распределение $|\sigma_{rr}|$ при $\omega=4$. Из построенных графиков видно, что в окрестности точек $\theta=45^\circ$ и $\theta=135^\circ$ для всех типов волн наблюдаются резко выраженные минимумы, абсолютная величина которых мало зависит от величины магнитного поля.

На фиг. 4, 5 построены графики изменения $|\sigma_{rr}|$ на поверхности полости при $\theta=0$ в зависимости от величин $R_m P_H$ для продольных (фиг. 4) и поперечных (фиг. 5) волн и следующих значениях параметров: $R_m^s P_H^s / (R_m P_H) = 0$ (кривая 1),



Фиг. 4

Фиг. 5

$R_m^s P_H^s / (R_m P_H) = 0$ (кривая 2), $R_m^s P_H^s / (R_m P_H) = 1$ (кривая 3) при $\omega=2$ (фиг. 4, а, 5, а) и $\omega=4$ (фиг. 4, б, 5, б). Кривая 1 соответствует случаю, когда внешняя среда является слабопроводящей, а внутренняя — непроводящей. Кривая 2 соответствует внешней непроводящей и внутренней слабопроводящей. Кривая 3 относится к случаю, когда обе среды одинаково слабопроводящие.

Из приведенных графиков следует, что в рассматриваемом диапазоне изменения параметров внутреннее магнитное поле (проводимость внутренней среды) значительно больше влияет на нормальные напряжения на контуре полости, чем внешнее магнитное поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г. Стационарная задача рассеяния цилиндрической магнитоакустической волны на идеальнопроводящем цилиндре. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1971, № 2, с. 169.
2. Селезов И. Т. Распространение и дифракция волн в магнитогидродинамической среде с упругим включением. — В кн.: Избр. проблемы прикл. механики. М.: ВИНТИ, 1974, с. 641.
3. Селезов И. Т., Яковлев В. В. Дифракция цилиндрической МГД-волны на магнитоупругом цилиндре. — Магнит. гидродинамика, 1976, № 1, с. 61.
4. Селезов И. Т. Некоторые приближенные формы уравнений движения магнитоупругих сред. — Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 5, с. 86.

5. *Иванов Е. А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 583 с.
6. *Градиштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
7. *Lewis T. S., Kraft D. W., Hom N.* Scattering of elastic waves by a cylindrical cavity in a solid.— J. Appl. Phys., 1976, v. 47, No. 5, p. 1795.
8. *Селезов И. Т., Яковлев В. В.* Дифракция волн на симметричных неоднородностях. Киев: Наукова думка, 1978. 145 с.

Киев

Поступила в редакцию
5.III.1980