

УДК 539.376

ДИВЕРГЕНЦИЯ КРЫЛА С ОБРАТНОЙ СТРЕЛОВИДНОСТЬЮ

СЕЙРАНЯН А. П.

Известно, что в настоящее время большой практический интерес вызывают летательные аппараты с поворотным крылом и с крыльями обратной стреловидности [1-3]. Такие крылья имеют ряд преимуществ, особенно с точки зрения аэродинамики, однако они обладают сравнительно низкими критическими скоростями дивергенции. Поэтому современное применение крыльев с обратной стреловидностью связано с возросшими возможностями обеспечения надлежащих жесткостных характеристик.

Дивергенция крыла с обратной стреловидностью впервые была исследована в [4] (см. также [5]). В ней рассматривалась дивергенция крыла для случая линейного распределения по размаху хорды крыла $b(x)$ и плеча подъемной силы $e(x)$, а также жесткостей на изгиб и кручение, пропорциональных $b^4(x)$.

В данной работе изучены уравнения, описывающие явление дивергенции крыла с обратной стреловидностью, и в них выявлен малый параметр. С применением метода возмущений для произвольного крыла получена формула, связывающая критическую скорость дивергенции с основными характеристиками крыла. Полученная формула позволяет проанализировать влияние различных факторов на критическую скорость дивергенции. Численные результаты получены с применением изложенного вариационного метода.

1. Выпишем уравнения, описывающие явление дивергенции стреловидного крыла в потоке газа. В качестве упругой модели примем балочную схему крыла, для описания аэродинамических сил используем теорию несущей полосы [4, 5]

$$[D(x)w''(x)]'' - q \cos^2 \Lambda b(x) c_y = 0$$

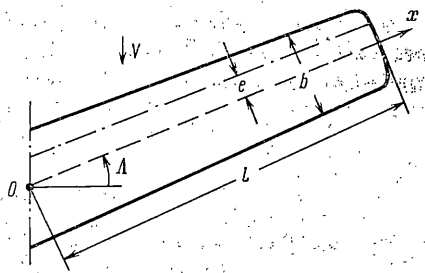
$$[C(x)\theta'(x)]' + q \cos^2 \Lambda b(x) e(x) c_y = 0$$

$$c_y = [\theta(x) + w'(x) \operatorname{tg} \Lambda] c_y^\alpha, \quad (1.1)$$

$$w(0) = w'(0) = 0$$

$$(Dw'')_{x=l} = (Dw'')'_{x=l} = 0,$$

$$\theta(0) = 0, \quad (C\theta')_{x=l} = 0$$



Фиг. 1

Здесь $D(x)$, $C(x)$ — жесткости крыла на изгиб и кручение соответственно, $b(x)$ — хорда крыла, $e(x)$ — расстояние между осью жесткости и линией аэродинамических фокусов, $w(x)$ — функция прогибов, $\theta(x)$ — угол закручивания крыла, c_y^α — коэффициент подъемной силы, Λ — угол стреловидности, q — скоростной напор. На фиг. 1 пунктирная линия указывает ось жесткости, а штрихпунктирная — линию аэродинамических фокусов.

При заданных $D(x)$, $C(x)$, $b(x)$, $e(x)$, l , Λ , c_y^α соотношения (1.1) представляют собой линейную задачу на собственные значения относительно $w(x)$ и $\theta(x)$. Собственным значением является скоростной напор q . Первое положительное собственное значение определяет критическую скорость

дивергенции $q_{div} = \frac{1}{2} \rho V_{div}^2$, где ρ — плотность газа, V — скорость полета. С целью упрощения исходных соотношений введем безразмерные величины $x^\circ = x/l$, $w^\circ = w/l$, $u = w' \operatorname{tg} \Lambda$, $b^\circ = b/b_m$, $e^\circ = e/e_m$, $D^\circ = D/D_m$, $C^\circ = C/C_m$, $\lambda = \frac{1}{2} c_y^\circ \sin 2\Lambda (q b_m^3 / D_m)$, $\kappa = D_m e_m / (C_m l \operatorname{tg} \Lambda)$. Нижний индекс m указывает на то, что берется средняя величина. Таким образом, безразмерные величины D° , C° , e° , b° имеют порядок единицы.

С учетом введенных обозначений краевую задачу (1.1) можно представить в виде (градуус в индексах в дальнейшем опускаем):

$$(Du')'' - \lambda b(u + \theta) = 0, \quad (C\theta')' + \lambda \kappa e b(u + \theta) = 0 \quad (1.2)$$

$$u(0) = \theta(0) = 0, \quad (Du')_{x=1} = (Du')'_{x=1} = (C\theta')_{x=1} = 0$$

Данная задача на собственные значения является несамосопряженной, поскольку аэродинамические силы, действующие на крыло, неконсервативны [6]. Параметр λ является собственным значением задачи.

Оценим значение параметра κ . Для реальных крыльев e_m/l составляет величину $\sim 0,01$, D_m/C_m и $\operatorname{tg} \Lambda$ имеют порядок единицы, так как угол Λ составляет $25-60^\circ$. Поэтому величину κ можно считать малым параметром. Физически это означает, что при дивергенции крыла с обратной стреловидностью роль кручения невелика.

Будем искать решение задачи (1.2) методом возмущений, представляя величины u , θ , λ в виде разложений по малому параметру κ :

$$u(x) = u_0(x) + \kappa u_1(x) + \dots, \quad \theta(x) = \theta_0(x) + \kappa \theta_1(x) + \dots \\ \lambda = \lambda_0 + \kappa \lambda_1 + \dots$$

Подставляя эти разложения в (1.2), для нулевого приближения получим следующие уравнения:

$$(Du_0')'' - \lambda_0 b(u_0 + \theta_0) = 0, \quad (C\theta_0')' = 0$$

$$u_0(0) = \theta_0(0) = 0, \quad (Du_0')_{x=1} = (Du_0')'_{x=1} = (C\theta_0')_{x=1} = 0 \quad (1.3)$$

Из второго уравнения (1.3) с учетом однородных граничных условий получим $\theta_0(x) \equiv 0$. Таким образом, уравнения, описывающие явление дивергенции, в нулевом приближении не содержат крутильного члена

$$Lu_0 = (Du_0')'' - \lambda_0 b u_0 = 0 \quad (1.4)$$

$$u_0(0) = 0, \quad (Du_0')_{x=1} = (Du_0')'_{x=1} = 0$$

Рассмотрим сопряженную к (1.4) задачу на собственные значения [7]:

$$L^* v_0 = (Dv_0'')' + \lambda_0 b v_0 = 0 \quad (1.5)$$

$$v_0(0) = v_0'(0) = 0, \quad (Dv_0'')_{x=1} = 0$$

Известно, что собственные значения в сопряженных задачах (1.4), (1.5) и их кратности совпадают [7]. При фиксированных $D(x)$, $b(x)$ можно решить задачи (1.4), (1.5) и определить λ_0 , $u_0(x)$, $v_0(x)$. С использованием сопряженной функции v_0 собственное значение λ_0 можно представить в виде

$$\lambda_0 = \int_0^1 Du_0' v_0'' dx / \int_0^1 b u_0 v_0 dx \quad (1.6)$$

Для функций первого приближения получим соотношения

$$\begin{aligned}(Du_1')'' - \lambda_0 b u_1 &= \lambda_1 b u_0 + \lambda_0 b \theta_1 \\ (C\theta_1')' + \lambda_0 e b u_0 &= 0, \quad u_1(0) = \theta_1(0) = 0 \\ (Du_1')_{x=1} = (Du_1')'_{x=1} &= (C\theta_1')_{x=1} = 0\end{aligned}\quad (1.7)$$

Умножая первое уравнение (1.7) на сопряженную функцию v_0 и интегрируя от нуля до единицы, для поправки собственного значения λ_1 получим

$$\lambda_1 = -\lambda_0 \int_0^1 b \theta_1 v_0 dx / \int_0^1 b u_0 v_0 dx \quad (1.8)$$

Из второго уравнения (1.7) с использованием граничных условий найдем

$$\theta_1(x) = \lambda_0 \int_0^x \frac{d\xi}{C} \int_\xi^1 e b u_0 d\xi$$

Подставим $\theta_1(x)$ в (1.8) и выполним интегрирование по частям. В результате λ_1 будет иметь вид

$$\lambda_1 = -\lambda_0^2 \int_0^1 \frac{dx}{C} \int_x^1 e b u_0 d\xi \int_x^1 b v_0 d\xi / \int_0^1 b u_0 v_0 dx$$

Таким образом, λ_{div} с точностью до величин κ^2 равна

$$\lambda_{div} = \lambda_0 + \kappa \lambda_1 = \frac{\lambda_0}{1 - \kappa \lambda_1 / \lambda_0} \quad (1.9)$$

Итак, вычислив λ_0 , u_0 , v_0 из (1.4), (1.5), можно получить λ_{div} . Возвращаясь к размерным величинам D , C , b , e , из (1.9) выведем окончательную формулу

$$q_{div} = q_0 / (1/2 \sin 2\Lambda + P \cos^2 \Lambda) \quad (1.10)$$

$$q_0 = \frac{1}{c_y \alpha l^3} \int_0^1 Du_0' v_0'' dx / \int_0^1 b u_0 v_0 dx$$

$$P = \frac{1}{l} \int_0^1 Du_0' v_0'' dx \int_0^1 \frac{dx}{C} \int_x^1 b v_0 d\xi \int_x^1 e b u_0 d\xi / \left(\int_0^1 b u_0 v_0 dx \right)^2$$

Отметим, что собственные функции u_0 , v_0 определяются только величинами $D(x)$, $b(x)$ и не изменяются при умножении $D(x)$ или $b(x)$ на произвольные константы. Заметим также, что безразмерная величина P имеет порядок $D_{me}/(C_m l)$. Величины q_0 и P по физическому смыслу положительны. Соотношения (1.10) позволяют проанализировать зависимость q_{div} от различных параметров. Например, если D увеличить в m раз, C в n раз, l в k раз, b в p раз, e в d раз, то согласно (1.10) q_0 увеличится в $m/(pk^3)$ раз, а P в $md/(nk)$ раз. Увеличение q_0 или уменьшение P , либо и то и другое соответствуют увеличению критической скорости дивергенции, при этом величина P влияет в меньшей мере ввиду своей малости.

Формула (1.10) позволяет наглядно представить зависимость q_{div} от угла стреловидности Λ . Нетрудно видеть, что функция $q_{div}(\Lambda)$ имеет минимум при $\Lambda_* = \frac{1}{2} \arcsctg(P)$, что составляет, ввиду малости P , величину, близкую к 45° . Таким образом, угол стреловидности $\approx 45^\circ$ является наилучшим с точки зрения дивергентных свойств.

На фиг. 2 представлена зависимость $q^\circ = q_{div}/q_0$ от угла стреловидности Λ для различных P ; кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $P=0$; 0,05; 0,10. Точки минимума q_{div} соответствуют значениям угла стреловидности $\Lambda_*=45$; 43,6; 42,1°.

Полученная зависимость качественно хорошо согласуется с результатами, приведенными в [3–5], хотя в [3] для расчета аэродинамических и упругих сил использовались более сложные модели. В заключение заметим, что формулы (1.9), (1.10) справедливы для малых значений параметра κ , что эквивалентно неравенству

$$Dm\epsilon_m/(C_{ml}) \ll \tg \Lambda \quad (1.11)$$

2. Для определения величин q_0 , P необходимо решить задачи (1.4), (1.5) и вычислить λ_0 , u_0 , v_0 . Для этого можно воспользоваться следующим приближенным вариационным методом. Рассмотрим функционал I , определенный на гладких функциях u и v (λ — константа):

$$I(u, v) = \int_0^1 (Du'v'' - \lambda buv) dx \quad (2.1)$$

Этот функционал получен из скалярного произведения (Lu, v) интегрированием первого члена дважды по частям. Найдём первую вариацию функционала I , придавая функциям u и v приращения δu , δv . Интегрируя по частям, получим

$$\delta I = \int_0^1 Lu \delta v dx - \int_0^1 L^* v \delta u dx + Dv'' \delta u|_0^1 + Du' \delta v'|_0^1 - (Du')' \delta v|_0^1 \quad (2.2)$$

Потребуем, чтобы функции u и v удовлетворяли кинематическим граничным условиям из (1.4), (1.5):

$$u(0)=0, v(0)=v'(0)=0 \quad (2.3)$$

Условие стационарности $\delta I(u, v)=0$ при произвольных вариациях δu , δv , удовлетворяющих (2.3), эквивалентно задачам на собственные значения (1.4), (1.5). Справедливость этого утверждения вытекает непосредственно из выражений (1.4), (1.5), (2.2), (2.3).

Основываясь на свойстве стационарности функционала (2.1), укажем следующую процедуру решения задач (1.4), (1.5). Зададим гладкие функции u_i , v_i , удовлетворяющие граничным условиям (2.3). Будем искать u и v в виде конечных рядов с коэффициентами α_i и β_i :

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i(x), \quad v(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i(x) \quad (2.4)$$

Подставим эти выражения в (2.1). Тогда функционал $I(u, v)$ примет

вид

$$I(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \psi_{ij}, \quad \psi_{ij} = \int_0^1 (Du_i' v_j'' - \lambda b u_i v_j) dx \quad (2.5)$$

Из условия стационарности функционала $I(u, v)$ имеем: $\partial I / \partial \alpha_i = 0$, $\partial I / \partial \beta_i = 0$ ($i=1, 2, \dots, n$). Отсюда получим

$$\sum_{j=1}^n \psi_{ij} \beta_j = 0, \quad \sum_{i=1}^n \psi_{ij} \alpha_i = 0, \quad \det \|\psi_{ij}\| = 0 \quad (2.6)$$

Первые два соотношения служат для определения коэффициентов α_i , β_i , а собственные значения λ определяются из последнего условия (2.6).

Описанный метод является модификацией вариационного метода решения неконсервативных задач, предложенного в [8, 9], и совпадает с ним, если на функции u_i , v_i наложить более жесткое требование удовлетворения всем граничным условиям из (1.4), (1.5). Отметим также, что соотношения (2.6) совпадают с уравнениями метода Бубнова — Галеркина [10] с базисными функциями v_i , примененного к задаче (1.5), если в (2.4) — (2.6) положить $u_i = v_i$. То же верно и для задачи (1.4), если в (2.4) — (2.6) положить $v_i = u_i$, однако при этом на базисные функции следует наложить дополнительное ограничение $u_i'(0) = 0$. Напомним, что в методе Бубнова — Галеркина базисные функции удовлетворяют всем граничным условиям краевой задачи.

3. Рассмотрим случай, когда функции $D(x)$, $C(x)$, $b(x)$, $e(x)$ постоянны по размаху крыла. Использование в (2.4) — (2.6) базисных функций $u_1(x) = x$, $u_2(x) = x^2$, $v_1(x) = x^2$, $v_2(x) = x^3$, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям (2.3), приводит к простым вычислениям. В результате будем иметь: $q_0 = 6,19D/(c_y^\alpha b l^3)$, $P = 2,23De/(Cl)$. Отметим, что вычисленная величина $\gamma = q_0 c_y^\alpha b l^3 / D = 6,19$ на 2,2% отличается от более точного значения $\gamma = 6,33$, приведенного в [4, 5]. С применением полиномов $u_1(x) = x - x^2 + 1/3 x^3$, $u_2(x) = x^2 - 1/3 x^3 + 1/2 x^4$, $v_1(x) = x^2 - 1/3 x^3$, $v_2(x) = x^3 - 1/2 x^4$, удовлетворяющих всем граничным условиям задач (1.4), (1.5), получим более точные значения искомых величин $q_0 = 6,33D/(c_y^\alpha b l^3)$, $P = 2,5De/(Cl)$. Таким образом, формулу (1.10) для рассмотренного случая постоянных D , C , b , e можно представить в виде

$$q_{div} = 12,66 \frac{D}{c_y^\alpha b l^3} \left(\sin 2\Lambda + 5 \frac{De}{Cl} \cos^2 \Lambda \right)^{-1}$$

Подобные формулы можно получать для произвольных распределений величин D , C , b , e , удовлетворяющих неравенству (1.11).

Автор благодарит Ф. Л. Черноусько за полезные обсуждения и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jones R. T. Aeroelastic stability and control of an oblique wing: wind tunnel experiments. — J. Aircraft, 1976, v. 13, No. 10, p. 832.
2. Jones R. T., Nisbet J. W. Aeroelastic stability and control of an oblique wing. — Aeronaut. J., 1976, v. 80, No. 788, p. 365–369.
3. Weisshaar T. A., Crittenden J. B. Flutter of asymmetrically swept wings. — AIAA Journal, 1976, v. 14, No. 8, p. 993–994.
4. Diederich F. W., Budiansky B. Divergence of swept wings. — NACA, 1948, Techn. Note. 1680.
5. Висплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфмэн Р. Л. Аэроупругость. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 799 с.

6. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1964. 339 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
8. Prasad S. N., Herrmann G. The usefulness of adjoint systems in solving nonconservative stability problems of elastic continua.—Internat. J. Solids Structures, 1969, v. 5, No. 7, p. 727–735.
9. Prasad S. N., Herrman G. Adjoint variational methods in nonconservative stability problems.—Internat. J. Solids Structures, 1972, v. 8, No. 1, p. 29–40.
10. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.I.1980