МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1981

УДК 539.376

ОПТИМАЛЬНАЯ ФОРМА НАРАЩИВАЕМОЙ КОЛОННЫ

АРУТЮНЯН Н. Х., ЗЕВИН А. А.

Напряженно-деформированное состояние наращиваемых тел из материалов, обладающих свойствами ползучести и старения, существенно зависит от скорости наращивания, которая определяет не только закон нагружения, но и специфическую неоднородность этих тел, обусловленную тем, что возраст материала зависит от пространственных координат [1, 2]. Отмеченные факторы оказывают значительное влияние на оптимальные характеристики наращиваемых сооружений.

В публикуемой работе на основе [3] исследована оптимальная форма армированной колонны, которая возводится из неоднородно-стареющего вязкоупругого материала.

Показано, что оптимальная форма существенно зависит от скорости возведения колонны, ее упругих и реологических свойств, а также от степени армирования.

1. Постановка задачи. Пусть колонна (или группа однотипных колонн) заданной высоты l поддерживает тяжелое оборудование, чувствительное к приращению перемещений после установки. Колонна возводится с постоянной скоростью v, равной объему армированного материала, укладываемого в единицу времени; оборудование, создающее сжимающую нагрузку P, устанавливается через $\varkappa_0$ единиц времени после возведения колонны. Требуется при заданном объеме колонны V минимизировать приращение перемещения ее верхнего сечения к моменту t_1 после приложения силы P.

Задачу можно рассматривать также в двойственной постановке: найти минимальный объем V^*, при котором приращение перемещения не превосходит заданного. Нетрудно показать, что решение исходной задачи совпадает с решением двойственной, если заданный объем V равен V^*.

Пусть $y(x)$ — суммарная площадь арматуры и основного материала в сечении колонны, расположенном на расстоянии x от ее верхнего сечения, и $z(x)$ — объем колонны над сечением x. Время, необходимое на возведение объема $z(x)$:

$$T(x)=\frac{z(x)}{v},\quad z(x)=\int_0^x y(\eta)\,d\eta \tag{1.1}$$

Определим нагрузку от собственного веса, действующую в сечении x. Начало отсчета времени принимаем в момент приложения силы P.

К моменту времени $-(T(x)+\varkappa_0)$ колонна будет возведена до сечения x. Элементарное приращение нагрузки

$$dQ=vg(x)\,d\tau,\quad g(x)=g_a\mu(x)+g_0(1-\mu(x)),\quad \mu(x)=y_a(x)/y(x) \tag{1.2}$$

где g_a, g_0 — масса единицы объема арматуры и основного материала, $y_a(x)$ — площадь сечения арматуры.

Интегрируя в пределах от $-(T(x)+\varkappa_0)$ до t, получим

$$Q(x,t)=v\int_{-\varkappa(x)}^{t} g[x(\tau)]\,d\tau,\quad \varkappa(x)=\varkappa_0+T(x) \tag{1.3}$$

Формула (1.3) справедлива, если $t\in[-\varkappa(x),\ -\varkappa_0]$; при $t>-\varkappa_0$ будем иметь

$$Q(x,t)=Q(x)=v\int_{-\varkappa(x)}^{-\varkappa_0} g[x(\tau)]d\tau \tag{1.4}$$

Установим связь между средними напряжениями и деформациями для армированного стержня.

Закон ползучести основного материала [1, 2] при принятом начале отсчета времени имеет вид

$$\varepsilon_0(x,t)=\frac{1}{E_0(t+\varkappa(x))}\left[\sigma_0(x,t)+\int_{-\varkappa(x)}^{t} K(t+\varkappa(x),\tau+\varkappa(x))\sigma_0(x,\tau)d\tau\right] \tag{1.5}$$

где $E_0(t)$ — модуль упругомгновенной деформации основного материала, $K(t,\ \tau)$ — ядро ползучести, связанное с мерой ползучести $C(t,\ \tau)$ соотношением

$$K(t,\tau)=-\frac{\partial}{\partial\tau}\Delta(t,\tau),\quad \Delta(t,\tau)=\frac{E(t)}{E(\tau)}+E(t)C(t,\tau) \tag{1.6}$$

Разрешая (1.5) относительно напряжений, найдем

$$\sigma_0(x,t)=E_0(t+\varkappa(x))\varepsilon_0(x,t)- \\ -\int_{-\varkappa(x)}^{t} R(-1,t+\varkappa(x),\tau+\varkappa(x))E_0(\tau+\varkappa(x))\varepsilon_0(x,\tau)d\tau \tag{1.7}$$

Здесь $R(-1,\ t,\ \tau)$ — резольвента ядра $K(t,\ \tau)$ с параметром -1.

Для арматуры имеем $\sigma_a(x,\ t)=E_a\varepsilon_a(x,\ t)$. Учитывая условия совместности деформаций $\varepsilon_a(x,\ t)=\varepsilon_0(x,\ t)=\varepsilon(x,\ t)$ и уравнение равновесия

$$\sigma_a(x,\ t)y_a(x)+\sigma_0(x,\ t)y_0(x)=N(x,\ t) \tag{1.8}$$

($N(x,\ t)$ — нормальная сила, $y_0(x)$ — площадь сечения основного материала) после некоторых преобразований получим ($\sigma=N/y$ — среднее напряжение):

$$B(x,t)\varepsilon(x,t)-\int_{-\varkappa(x)}^{t} U(x,t,\tau)B(x,\tau)\varepsilon(x,\tau)d\tau=\sigma(x,t) \tag{1.9}$$

$$B(x,\ t)=E_a\mu(x)+E_0(t+\varkappa(x))(1-\mu(x))$$

$$U(x,t,\tau)=R(-1,t+\varkappa(x),\tau+\varkappa(x))\frac{(1-\mu(x))E_0(\tau+\varkappa(x))}{B(x,\tau)}$$

Из (1.9) найдем

$$\varepsilon(x,t)=\frac{1}{B(x,t)}\left[\sigma(x,t)+\int_{-\varkappa(x)}^{t}\Gamma(x,t,\tau)\sigma(x,\tau)d\tau\right] \tag{1.10}$$

где $\Gamma(x,\ t,\ \tau)$ — резольвента ядра $U(x,\ t,\ \tau)$.

В частности, если $E_0(t)=E_0=\text{const}$, то решение уравнения (1.9) будет иметь вид

$$\varepsilon(x,t)=\frac{1}{B(x)}\left[\sigma(x,t)+\beta(x)\int\limits_{-\varkappa(x)}^{t}R(-1+\beta(x),t+\varkappa(x),\tau+\varkappa(x))\sigma(x,\tau)d\tau\right]\tag{1.11}$$

$$B(x)=E_a\mu(x)+E_0(1-\mu(x)),\quad \beta(x)=E_0(1-\mu(x))/B(x)$$

где $R(-1+\beta(x),\ t,\ \tau)$ — резольвента ядра $K(t,\ \tau)$ с параметром $-1+\beta(x)$.

Для рассматриваемой колонны средние напряжения

$$\begin{gathered}\sigma(x,\ t)=Q(x,\ t)/y(x),\quad t\in[-\varkappa(x),\ 0]\\ \sigma(x,\ t)=[Q(x,\ t)+P]/y(x),\quad t>0\end{gathered}\tag{1.12}$$

Приращение деформаций равно $\xi_0(x)=\varepsilon(x,\ t_1)-\varepsilon(x,\ 0)$, а приращение перемещения верхнего сечения колонны определяется из формулы

$$u_0=\int\limits_0^l \xi_0(x)dx\tag{1.13}$$

Задача состоит в отыскании функции $y(x)$, минимизирующей функционал (1.13), при ограничении на объем колонны

$$V=\int\limits_0^l y(x)dx=\text{const}\tag{1.14}$$

2. Случай постоянного коэффициента армирования. Пусть отношение площадей сечения арматуры и основного материала остается постоянным по высоте колонны, т. е. $\mu(x)=\mu=\text{const}$. Тогда $g(x)=g=\text{const}$, $Q(x,\ t)=vg(t+\varkappa(x))$ $(t\in[-\varkappa(x),\ -\varkappa_0])$, $Q(x,\ t)=Q(x)=vgT(x)$ при $t>-\varkappa_0$, а функции $B(x,\ t)$ и $U(x,\ t)$ принимают вид

$$B(x,\ t)=E_a\mu+E_0(t+\varkappa(x))(1-\mu)=B_\mu(t+\varkappa(x))\tag{2.1}$$

$$\begin{gathered}U(x,t,\tau)=R(-1,t+\varkappa(x),\tau+\varkappa(x))\frac{(1-\mu)E_0(\tau+\varkappa(x))}{B_\mu(\tau+\varkappa(x))}=\\ =U_\mu(t+\varkappa(x),\ \tau+\varkappa(x))\end{gathered}\tag{2.2}$$

Учитывая, что резольвента ядра вида (2.2) является функцией аргументов $t+\varkappa(x)$, $\tau+\varkappa(x)$, получим

$$\varepsilon(x,t)=\frac{1}{B_\mu(t+\varkappa(x))}\left[\sigma(x,t)+\int\limits_{-\varkappa(x)}^{t}\Gamma_\mu(t+\varkappa(x),\tau+\varkappa(x))\sigma(x,\tau)d\tau\right]\tag{2.3}$$

причем $\Gamma_\mu(t,\ \tau)$ — резольвента ядра $U_\mu(t,\ \tau)$.

Введем функцию

$$\Delta_\mu(t,\tau)=\int\limits_\tau^t \Gamma_\mu(t,\eta)d\eta+1\tag{2.4}$$

Тогда $\Gamma_\mu(t, \tau) = -\partial[\Delta_\mu(t, \tau)]/\partial\tau$, т. е. ядро соотношения (2.3) связано с функцией (2.4) так же, как ядро $K(t, \tau)$ в формуле (1.4) работы [3] с функцией $\Delta(t, \tau)$.

Таким образом, при постоянном коэффициенте армирования функция $y(x)$, доставляющая минимум функционалу (1.13), определяется параметрически соотношениями

$$\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{F_\mu(\xi)} = D_\mu x, \quad y = D_\mu F_\mu(z), \quad D_\mu = \frac{1}{l} \int_0^{V} \frac{d\xi}{F_\mu(\xi)} \tag{2.5}$$

$$F_\mu(z) = F_Q(z, t_1) + F_p(z, t_1) - F_Q(z, 0) - F_p(z, 0)$$

$$F_Q(z, t) = \frac{gv}{B_\mu(\varkappa_0 + z/v + t)} \int_0^{z/v} \Delta_\mu\left(t + \varkappa_0 + \frac{z}{v}, \tau\right) d\tau$$

$$F_p(z, t) = \frac{P}{B_\mu(\varkappa_0 + z/v + t)} \Delta_\mu\left(t + \varkappa_0 + \frac{z}{v}, \varkappa_0 + \frac{z}{v}\right)$$

Нетрудно показать, что деформации колонны оптимальной формы не зависят от координаты сечения, при этом $\xi_0 = 1/D_\mu$ и соответствующее минимальное приращение перемещений верхнего сечения $u_0 = l/D_\mu$.

Из условия $\xi_0 = \mathrm{const}$ следует, что при большой скорости возведения, когда материал колонны почти однороден, площадь поперечного сечения должна возрастать к основанию ввиду влияния собственного веса.

При малой скорости возведения площадь сечения должна увеличиваться в верхней части, чтобы компенсировать большую деформативность «молодого» материала.

Представляет интерес определение такой скорости возведения v^*, при которой площадь поперечного сечения колонны оптимальной формы наименее отличается от своего среднего значения. Принимая среднеквадратичный критерий, получим уравнение

$$v^* = \arg\min \frac{1}{l} \int_0^l [y(x, v) - y^\vee]^2 dx, \quad y^\vee = \frac{1}{l} \int_0^l y(x, v)\, dx = \frac{V}{l} \tag{2.6}$$

где $y^\vee$ — средняя площадь поперечного сечения.

Условие (2.6) после замены переменной интегрирования приводится к виду

$$v^* = \arg\min \int_0^V y(z, v)\, dz \tag{2.7}$$

При численном решении задачи (2.7) может быть использован любой известный метод одномерного поиска.

3. Пример. Пусть $E_0(t) = E_0 = \mathrm{const}$ и ядро ползучести имеет вид

$$K(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\left(\frac{E_0 A_1}{\tau_0 + \tau} + E_0 C_0\right)(1 - \exp[-\rho(t - \tau)])\right\} \tag{3.1}$$

Используя известное [4] решение интегрального уравнения с ядром типа (3.1), а также соотношения (1.11), (2.3), (2.4), получим

$$\Delta_\mu(t,\tau)=1+\beta\int_\tau^t R(-1+\beta,t,\eta)\,d\eta=$$

$$=1+\beta\rho\left[\frac{E_0A_1}{\tau+\tau_0}+E_0C_0\right]\frac{\zeta^p(\tau)}{r}e^{\zeta(\tau)}[\gamma(a,\zeta(t)-\gamma(a,\zeta(\tau))] \qquad (3.2)$$

$$\zeta(t)=r(t+\tau_0),\quad r=\rho[1+(1-\beta)E_0C_0]$$

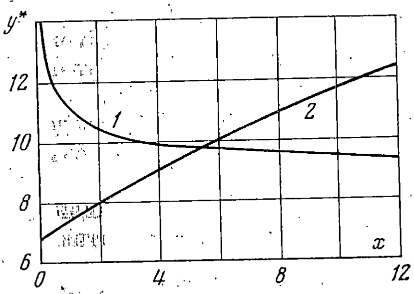
$$p=\rho(1-\beta)E_0A_1,\quad a=1-p$$

где $\gamma(a,\zeta)$ — неполная гамма-функция.

На основании (1.11) параметр β может быть представлен в виде

$$\beta=\frac{E_0(1-\mu)}{E_a\mu+E_0(1-\mu)}=\frac{y_0}{y_0+E_ay_a/E_0}$$

На основании соотношений (2.5) и (3.2) найдено оптимальное распределение сечений по высоте колонны $y^*(x)$ при следующих числовых значениях параметров: $V=125$ м^3, $l=12{,}5$ м, $g=20$ кН/м^3, $P=2500$ кН, $t_1=100$ сут, $\varkappa_0=5$ сут, $\rho=0{,}06$ сут$^{-1}$, $E_0A_1=10$ сут, $E_0C_0=2$, $\tau_0=1$ сут, $\beta=0{,}8$.



Варьировалась скорость возведения колонны v. Результаты вычислений приведены на фиг. 1.

Как видно, при малой скорости возведения ($v=1$, кривая *1*) колонна резко расширяется в верхней части; при большей скорости ($v=50$, кривая *2*) сечение возрастает к основанию, так как собственный вес оказывает более существенное влияние, чем неоднородность материала.

Перемещения u_0 верхнего сечения равны соответственно 0,12 и 0,26 мм, т. е. при большей скорости возведения перемещения существенно возрастают.

Была решена также задача определения скорости v, при которой площадь сечения наименее уклоняется от средней. В результате получено $v^*=7{,}62$.

Максимальное отклонение площади сечения от среднего значения составило 2,4% т. е. сечение колонны практически постоянно, что упрощает технологию возведения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел.– Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3, с. 153–164.
2. *Арутюнян Н. Х.* Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела.– ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 783–789.
3. *Арутюнян Н. Х., Зевин А. А.* Задачи оптимизации в теории ползучести для наращиваемых тел, подверженных старению.– Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 1, с. 100–107.
4. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.– Л.: Гостехиздат, 1952.

Москва, Ленинград

Поступила в редакцию 5.XII.1980