МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1981

УДК 539.376

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

КАШЕЛКИН В. В., СЕРГЕЕВ М. В., ШЕСТЕРИКОВ С. А.

При постановке задачи устойчивости в условиях, когда материал изучаемого элемента обладает реологическими свойствами, могут иметь место различные подходы к проблеме [1]. Ниже анализируется процесс потери устойчивости в условиях ползучести. Рассмотрен общий случай деформирования тела, имеющего начальные смещения, материал которого обладает реологическими свойствами. Отмечается, что если рассматривать процесс течения при заданной системе нагрузок, то критическое время определяется из условия обращения в бесконечность скоростей деформирования. Если искать особое состояние как возможность бифуркации в процессе изменяющегося во времени напряженно-деформированного состояния, то также находится некоторое критическое время. Доказано, что оба эти состояния совпадают по характерным параметрам. Оценивается влияние начальных смещений в теле на критические значения параметров. Показано, что при некоторых ограничениях на величину несовершенств расчет по идеальной схеме приводит к близкому, по сравнению с точным, результату. Рекомендован метод нахождения начальных упругих характеристик задачи. Приведены примеры расчета.

1. Рассмотрим процессы, протекающие при деформировании в условиях ползучести произвольного тела, имеющего отклонения от некоторой «идеальной» формы. Будем различать три состояния [2]: идеальное, начальное и напряженно-деформированное, полагая, что в любой момент времени деформации относительного удлинения остаются малыми по сравнению с единицей.

Идеальное состояние тела характеризуется метрическим тензором g_{ij} и отсутствием перемещений, деформаций и напряжений.

Начальное состояние будем отличать от идеального наличием некоторой системы перемещений u_i°, не вызывающих напряжений, но дающих новую метрику g_{ij}°. Деформации, происходящие при переходе из идеального состояния в начальное, равны

$$\overset{\circ}{e}_{ij}={}^1/_2(\overset{\circ}{g}_{ij}-g_{ij})={}^1/_2(\overset{\circ}{u}_{i,j}+\overset{\circ}{u}_{j,i}+\overset{\circ}{u}_{k,i}u^{\circ k}_{,j}) \qquad (1.1)$$

В напряженно-деформированном состоянии тело, занимающее объем $V(x^j\in V)$, где x^j — лагранжева система координат, и ограниченное поверхностью $\Sigma=\Sigma_u+\Sigma_T$, нагружено внутри объема усилиями $F_e^i(x^j, t)$, на части поверхности Σ_T усилиями $T_e^i(x^j, t)$, а на Σ_u имеет заданное распределение перемещений $u_i^e(x^j, t)$ и характеризуется метрикой $g_{ij}^\vee$, перемещениями $u_i=u_i^\circ+w_i$, деформациями e_{ij}, напряжениями σ^{ij}.

Предполагая, что деформации, складывающиеся в каждой точке из мгновенной $e_{ij}^\varkappa$ и деформации ползучести p_{ij}, которые подчиняются теории течения, и рассматривая задачу в геометрически нелинейной постановке, можно записать уравнения задачи в виде [1]:

$$\begin{gathered} s^{ij}_{,j}=F_e^i \text{ на } V, \quad s^{ij}\nu_j=T_e^i \text{ на } \Sigma_T, \quad w_i=w_i^e \text{ на } \Sigma_u \\ e_{ij}=e_{ij}^\varkappa+p_{ij},\ \dot{e}_{ij}^\varkappa=a_{ijkl}\dot{\sigma}^{kl},\ \dot{p}_{ij}=\Phi_{ij}(p_{kl}, \sigma^{kl}, q_u) \end{gathered} \qquad (1.2)$$

Здесь $s^{ki}=\sigma^{ij}(g_j^{\circ k}+w_{,j}^{\;k})$ — несимметричный тензор напряжений; Φ_{ij} — функция, описывающая закон ползучести материала; q_u $(u=1, 2, \ldots, N)$ — структурные параметры, а тензор $a_{ijkl}=a_{klij}$ является тензором мгновенных податливостей.

Система (1.2) должна быть дополнена известным уравнением связи перемещений и деформаций при наличии начальных смещений [2]:

$$e_{ij}={}^1/_2(w_{i,j}+w_{j,i}+w_{k,i}\overset{k}{w}_{,j}+\overset{\circ}{u}_{k,i}\overset{k}{w}_{,j}+w_{k,i}\overset{\circ k}{u}_{,j}) \tag{1.3}$$

Отметим, что в формулах (1.2) и (1.3) дифференцирование выполняется на основе метрического тензора идеального состояния g_{ij}, а в системе (1.2) — тензора начального состояния g_{ij}°, однако допущение о малости деформаций позволяет не выходя за пределы принятой точности, производить все операции, используя метрический тензор g_{ij}, заменив в s^{ij} и везде ниже g_{ij}° на сумму $g_{ij}+2e_{ij}^{\circ}$ согласно (1.1).

Система (1.2), (1.3) не является единственно возможной для описания ползучести рассматриваемого тела. Как известно [1], можно рассмотреть также ползучесть в терминах полей скоростей перемещений, деформаций и напряжений. Для тела с начальными смещениями подобная система уравнений легко получается дифференцированием по времени соответствующих уравнений системы (1.2), (1.3):

$$\begin{gathered}
s_{,j}^{\cdot ij}=F_e^{\cdot i} \text{ на } V, \quad s^{\cdot ij}\nu_j=T_e^{\cdot i} \text{ на } \Sigma_T, \; w_i^{\cdot}=w_i^{\cdot e} \text{ на } \Sigma_u \\
s^{\cdot ki}=\sigma^{\cdot ij}(g_j^{\circ k}+w_{,j}^{\;k})+\sigma^{ij}w_{,j}^{\cdot k}, \qquad e_{ij}^{\cdot}=e_{ij}^{\cdot \varkappa}+p_{ij}^{\cdot} \\
e_{ij}^{\cdot\varkappa}=a_{ijkl}\sigma^{\cdot kl}, \qquad p_{jj}^{\cdot}=\Phi_{ij}(p_{kl}, \sigma^{kl}, q_u) \\
e_{ij}^{\cdot}={}^1/_2[w_{i,j}^{\cdot}+w_{j,i}^{\cdot}+w_{k,i}^{\cdot}(w_{,j}^{\;k}+u_{,j}^{\;\circ k})+w_{,j}^{\cdot k}(w_{k,i}+\overset{\circ}{u}_{k,i})]
\end{gathered} \tag{1.4}$$

2. Рассмотрим случай «нейтрального равновесия». Условимся в дальнейшем критические значения параметров снабжать звездочкой. Система (1.2)—(1.3) справедлива в любой момент, в частности, в момент времени $t=t_*$ для значений параметров w_i^*, e_{ij}^*, σ_*^{ij} и в момент времени $t=t_*+0$ для значений $w_i^*+\Delta w_i$, $e_{ij}^*+\Delta e_{ij}$, $\sigma_*^{ij}+\Delta\sigma^{ij}$. Тогда можно прийти к следующим уравнениям «нейтрального равновесия»:

$$\begin{gathered}
\Delta s_{,j}^{ij}=\Delta F_e^{\,i} \text{ на } V, \qquad \Delta s^{ij}\nu_j=\Delta T_e^{\,i} \text{ на } \Sigma_T, \qquad \Delta w_i=\Delta w_i^e \text{ на } \Sigma_u \\
\Delta e_{ij}={}^1/_2[\Delta w_{i,j}+\Delta w_{j,i}+\Delta w_{k,i}(w_{,j}^{*k}+u_{,j}^{\;\circ k})+\Delta w_{,j}^{\;k}(\overset{*}{w}_{k,i}+\overset{\circ}{u}_{k,i})+\Delta w_{k,i}\Delta w_{,j}^{\;k}] \\
\Delta e_{ij}=\int\limits_{\sigma_*^{kl}}^{\sigma_*^{kl}+\Delta\sigma^{kl}} a_{ijkl}d\sigma^{kl}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{t^*}^{t^*+\varepsilon}\Phi_{ij}(p_{kl}, \sigma^{kl}, q_u)\,dt \\
\Delta s^{ki}=\Delta\sigma^{ij}(g_j^{\circ k}+w_{,j}^{*k})+\sigma_*^{ij}\Delta w_{,j}^{\;k}+\Delta\sigma^{ij}\Delta\dot{w}_{,j}^{\;k}
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Величины $\Delta F_e^{\,i}$, $\Delta T_e^{\,i}$ и Δw_i^e отличны от нуля лишь в том случае, когда в процессе потери устойчивости имели место внешние возмущения заданных усилий или перемещений на поверхности тела.

Отыскивая критический момент как момент перехода к смежным квазиравновесным формам, необходимо пренебрегать в (2.1) приращениями в степенях, выше первой.

Последнее уравнение в (2.1) при этом преобразуется следующим образом

$$
\begin{aligned}
\Delta e_{ij}=a_{ijkl}(\sigma_*{}^{rn}+\theta_1\Delta\sigma^{rn})\Delta\sigma^{kl}+\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\Phi_{ij}(t_*+\theta_2\varepsilon)\simeq \overset{*}{a}_{ijkl}\Delta\sigma^{kl}+ \\
+\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\Phi_{ij}(t_*+\theta_2\varepsilon)\quad (0\leqslant\theta_\alpha\leqslant 1,\quad \alpha=1,2)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Последнее слагаемое в (2.2) равно нулю при любых конечных скоростях ползучести Φ_{ij}. Однако имеется ряд решений конкретных задач, где рост скорости ползучести при деформировании системы полагается неограниченным [1].

Будем полагать, что при учете мгновенных пластических деформаций всегда $\Delta p_{ij}=0$.

Окончательно уравнения нейтрального равновесия принимают вид

$$
\begin{gathered}
\Delta s_{,j}{}^{ij}=0 \text{ на } V,\quad \Delta s^{ij}\nu_j=0 \text{ на } \Sigma_T,\quad \Delta w_i=0 \text{ на } \Sigma_u,\quad \Delta e_{ij}=\overset{*}{a}_{ijkl}\Delta\sigma^{kl} \\
\Delta e_{ij}={}^1/{}_2[\Delta w_{i,j}+\Delta w_{j,i}+\Delta w_{k,i}(u_{,j}{}^{\circ k}+w_{,j}{}^{*k})+\Delta w_{,j}{}^k(\overset{*}{w}_{k,i}+\overset{\circ}{u}_{k,i})] \\
\Delta s^{ki}=\Delta\sigma^{ij}(g_j^{\circ k}+w_{,j}{}^{*k})+\sigma_*{}^{ij}\Delta w_{,j}{}^k
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

3. Системе уравнений ползучести тела в скоростях может быть поставлен в соответствие, согласно смешанному вариационному принципу [3], функционал, в котором независимому варьированию подлежат скорости перемещений и скорости напряжений. Применительно к рассматриваемому случаю с начальными перемещениями он записывается в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
K_S=\int_V\left[\dot\sigma^{ij}\dot e_{ij}+\frac{1}{2}\sigma^{ij}\dot w_{k,i}\dot w_{,j}{}^k-\frac{1}{2}\dot\sigma^{ij}(\dot e_{ij}{}^{\varkappa}+2\dot p_{ij})\right]dV- \\
-\int_{\Sigma_u}\dot\sigma^{ij}\nu_j(\dot w_i-\dot w_i{}^e)\,d\Sigma-\int_{\Sigma_T}T_e{}^{\cdot i}\dot w_i\,d\Sigma
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где под e_{ij} понимается выражение (1.3). Для случая отсутствия изменения массовых сил $\dot F_e{}^i=0$ обращение в нуль вариации δK_S эквивалентно системе (1.4).

Представим начальное смещение u_i° в виде разложения по некоторой системе координатных функций $\varphi_i{}^s$ $(s=1,2,\ldots,P)$;

$$
u_i^\circ=h_s\varphi_i{}^s \tag{3.2}
$$

Будем разыскивать напряжения и смещения в виде

$$
\sigma^{ij}=\sigma_0{}^{ij}+c^k\sigma_k{}^{ij},\qquad w_i=f_s\varphi_i{}^s \tag{3.3}
$$

где величины c^k и f_s представляют собой неизвестные пока функции времени, а для систем координатных функций $\sigma_k{}^{ij}$ и $\varphi_i{}^s$ потребуем выполнения условия ортогональности

$$
E_k{}^{st}=E_k{}^{ts}=\int_V\sigma_k{}^{ij}\overset{s}{\varphi}_{r,i}\varphi_{,j}{}^{tr}dV=0 \text{ при } s\neq t \tag{3.4}
$$

Условимся здесь и в дальнейшем, что индексы k, l, m пробегают значения от 1 до M, а p, s, t — от 1 до P, причем k, l, s, t будут использоваться в качестве «немых». Остальные индексы принимают, как обычно, значения 1, 2, 3.

Подстановка аппроксимаций (3.2) и (3.3) в функционал (3.1) приводит к системе

$$-A_{km}c^{\cdot k}+[D_m{}^s+(f_s+h_s)E_m{}^{ss}]f_s{}^{\cdot}=B_m-G_m{}^{\cdot}$$
$$[D_k{}^p+(f_p+h_p)E_k{}^{pp}]c^{\cdot k}+(E_0{}^{pp}+c^kE_k{}^{pp})f_p{}^{\cdot}=H^{\cdot p} \tag{3.5}$$

$$A_{lk}=A_{kl}=\int\limits_V a_{ijrn}\sigma_k{}^{ij}\sigma_l{}^{rn}\,dV,\qquad B_k=\int\limits_V \sigma_k{}^{ij}\Phi_{ij}(p_{kl},\sigma^{kl},q_u)\,dV$$

$$D_k{}^{\vee s}=\frac{1}{2}\int\limits_V \sigma_k{}^{ij}(\overset{s}{\varphi}_{i,j}+\overset{s}{\varphi}_{j,i})\,dV,\qquad G_k=\int\limits_{\Sigma_u}\sigma_k{}^{ij}\nu_jw_i{}^e\,d\Sigma,\qquad H^s=\int\limits_{\Sigma_T}T_e{}^i\varphi_i{}^s\,d\Sigma$$

$$J_k{}^s=\int\limits_{\Sigma_u}\sigma_k{}^{ij}\nu_j\varphi_i{}^s\,d\Sigma,\qquad D_k{}^s=D_k{}^{\vee s}-J_k{}^s$$

4. Рассмотрим условия потери устойчивости. Предварительно введем обозначения

$$\Lambda=\begin{vmatrix}\{-A_{km}\} & \{D_m{}^s+(f_s+h_s)E_m{}^{ss}\}\\ \{D_k{}^p+(f_p+h_p)E_k{}^{pp}\} & \{E_0{}^{pp}+c^kE_k{}^{pp}\}\end{vmatrix} \tag{4.1}$$

$$c\Lambda^l=\begin{vmatrix}\{-A_{km}(1-\delta_k{}^l)+\delta_k{}^l(B_m-G_m{}^{\cdot})\} & \{D_m{}^s+(f_s+h_s)E_m{}^{ss}\}\\ \{[D_k{}^p+(f_p+h_p)E_k{}^{pp}](1-\delta_k{}^l)+\delta_k{}^lH^{\cdot p}\} & \{E_0{}^{pp}+c^kE_k{}^{pp}\}\end{vmatrix} \tag{4.2}$$

$$f\Lambda_t=\begin{vmatrix}\{-A_{km}\} & \{[D_m{}^s+(f_s+h_s)E_m{}^{ss}](1-\delta_t{}^s)+\delta_t{}^s(B_m-G_m{}^{\cdot})\}\\ \{D_k{}^p+(f_p+h_p)E_k{}^{pp}\} & \{(E_0{}^{pp}+c^kE_k{}^{pp})(1-\delta_t{}^p)+\delta_t{}^pH^{\cdot p}\}\end{vmatrix} \tag{4.3}$$

$(k,l,m=1,2,\ldots,M;\ s,p,t=1,2,\ldots,P)$

где $\delta_i{}^j$ — символ Кронекера, а символами $\{\ldots\}$ обозначены соответствующие блоки. Тогда система (3.5) может быть представлена в виде, разрешенном относительно производных

$$c^{\cdot k}=c\Lambda^k/\Lambda,\qquad f_s{}^{\cdot}=f\Lambda_s/\Lambda \tag{4.4}$$

Отметим, что матрица определителя (4.1) — симметрическая. При интегрировании системы (4.4) с течением времени возможны ситуации, когда величины $c^{\cdot k}$ и $f_s{}^{\cdot}$ неограниченно возрастают, что в соответствии с изложенным выше квалифицируется как потеря устойчивости. Неограниченный рост скоростей (4.4) может быть обеспечен в двух случаях: при ненулевом конечном Λ быстрый рост величин $c\Lambda^k$ и $f\Lambda_s$, либо при не всех нулевых $c\Lambda^k$ и $f\Lambda_s$ обращение в нуль величины Λ.

Анализ структуры определителей (4.2) и (4.3) позволяет утверждать, что первый случай возможен лишь при неограниченных скоростях ползучести.

Подробнее рассмотрим достижения критического момента на основе условия $\Lambda(t_*)=0$. Для фактического определения критического времени используем прием [4], связанный с заменой переменной интегрирования, который проиллюстрируем для случая, когда величины $c\Lambda^k$ и $f\Lambda_t$ явно от времени не зависят.

Выбрав одну из переменных, например, f_p за независимую, можно исключить остальные $M+P-1$, проинтегрировав уравнения связи, вытекающие из (4.4):

$$dc^k/df_p=c\Lambda^k/(f\Lambda_p),\qquad df_s/df_p=f\Lambda_s/(f\Lambda_p) \tag{4.5}$$

$(k=1,2,\ldots,M;\ s=1,2,\ldots,P;\ s\neq p)$

После этого величины Λ, $c\Lambda^k$ и $f\Lambda_s$ оказываются функциями лишь f_p и можно найти зависимость

$$t=\int_{f^0_p}^{f_p}\Lambda/(f\Lambda_p)\,df_p \tag{4.6}$$

Из условия $\Lambda(t^*)=0$ следует условие прекращения интегрирования — обращение в нуль числителя в (4.6).

Следует отметить, что поиск критического момента времени как времени обращения параметра f_p в бесконечность приводит к условию вида (4.6), но с бесконечным верхним пределом в интеграле

$$t_*=\int_{f_p{}^0}^{\infty}\Lambda/(f\Lambda_p)\,df_p \tag{4.7}$$

Уравнения «нейтрального равновесия», соответствующие системе (2.1) при выбранной аппроксимации (3.2) и (3.3), можно получить, интегрируя непосредственно уравнения (3.5).

В этом случае имеем следующую систему, справедливую в любой момент времени

$$-\int_0^t A_{km}c^{\cdot k}dt+D_m{}^s(f_s+h_s)+\frac{1}{2}E^{ss}(f_s+h_s)^2=Q_m-G_m+G_{1m}$$

$$D_k{}^pc^k+(E_0{}^{pp}+c^kE_k{}^{pp})(f_p+h_p)=H^p+C_2{}^p \tag{4.8}$$

$$Q_m=\int_0^t B_m dt \quad (m=1,2,\dots,M;\quad p=1,2,\dots,P)$$

где C_{1m} и C_{2m} — постоянные интегрирования.

Полностью повторяя рассуждения, проделанные при выводе уравнений (2.3) из (2.1) и учитывая, что величины A_{km}, H^p, G_m, B_m соответствуют величинам a_{ijkl}, $T_e{}^i$, $w_i{}^e$ и Φ_{ij}, можно получить следующую систему

$$\begin{aligned}&-A_{km}{}^*\Delta c^k+[D_m{}^s+(f_s{}^*+h_s)E_m{}^{ss}]\,\Delta f_s=0 \quad (m=1,2,\dots,M)\\ &[D_k{}^p+(f_p{}^*+h_p)E_k{}^{pp}]\,\Delta c^k+(E_0{}^{pp}+c_*{}^kE_k{}^{pp})\,\Delta f_p=0 \quad (p=1,2,\dots,P)\end{aligned} \tag{4.9}$$

Отметим, что условие наличия нетривиального решения системы (4.9) совпадает с уравнением $\Lambda(t_*)=0$. Это означает, что совпадают и соответствующие значения критического времени.

Результат, полученный выше для тела, имеющего начальные несовершенства формы, легко перенести на случай, когда начальные смещения отсутствуют — достаточно везде в предыдущих уравнениях положить u_i° равными нулю, и, соответственно, $h_s=0$. Это приводит к следующему условию критического момента:

$$\Lambda^0(t_*{}^0)=\begin{vmatrix}\{-A^*_{km}\} & \{D_m{}^s+f_s{}^*E_m{}^{ss}\}\\ \{D_k{}^p+f_p{}^*E_k{}^{pp}\} & \{E_0{}^{pp}+c_*{}^kE_k{}^{pp}\}\end{vmatrix}=0 \tag{4.10}$$

$$(k,m=1,2,\dots,M;\ s,p=1,2,\dots,P)$$

Поскольку в условие $\Lambda(t_*)=0$ входят величины h_s, а в условие (4.10) — нет, то при заданном законе ползучести материала эти условия приводят к разным значениям критических параметров $f_s{}^*$, $c_*{}^k$, и, соответственно, различным значениям критического времени $t_*(h_s)$ и $t_*{}^\circ$. При этом время

t_*° соответствует одному из подходов к проблеме устойчивости, а время $t_*(h_s)$ — другому [1].

Существование предельного перехода $\Lambda^\circ = \lim \Lambda$ при $\|h\| \to 0$ обеспечивает выполнение неравенства

$$\lim_{\|h\|\to 0} t_*(h_s) = t_*^\circ \tag{4.11}$$

Величиной $\|h\|$ обозначена норма вектора h_s, введенная по одному из известных правил, например, $\|h\| = h_s h^s$ $(s=1, 2, \ldots, P)$.

Отметим, что в некоторых задачах, например, для сжатого стержня, может иметь место условие

$$\lim_{\|h\|\to 0} t_*(h_s) \longrightarrow \infty \tag{4.12}$$

В этом случае и условие (4.10) дает для $t_*^\circ \to \infty$ (см. п. 5).

При решении конкретных задач возникает вопрос о начальных условиях для интегрирования системы (4.4), т. е. о нахождении величин c_0^k и f_s°:

$$c^k(0) = c_0^k \quad (k=1, 2, \ldots, M), \qquad f_s(0) = f_s^\circ \quad (s=1, 2, \ldots, P) \tag{4.13}$$

Так как в большинстве практически интересных задач начальное нагружение упруго, то можно рекомендовать путь, указанный в [5] — использовать для нахождения начального упругого решения смешанный принцип Рейсснера [6], сохраняя предположения (3.2) и (3.3) о полях перемещений и напряжений.

Функционал Рейсснера для линейноупругого тела с начальными смещениями можно записать в виде

$$K_R = \int_V \left[\sigma_{ij} e_{ij} - \frac{1}{2} a_{ijrn} \sigma^{ij} \sigma^{rn} - F_e^i w_i \right] dV - \int_{\Sigma_u} \sigma^{ij} \nu_j (w_i - w_i^e)\, d\Sigma -$$

$$- \int_{\Sigma_T} T_e^i w_i d\Sigma \tag{4.14}$$

Подставив ряды (3.2) и (3.3) в (4.14), после очевидных преобразований получим уравнения, сравнивая которые с (4.8) в момент $t=0$ можно найти

$$C_{1m} = D_m^s h_s + {}^1/_2 E_m^{ss} h_s h_s + A_{0m}$$

$$C_2^p = L^p - D_0^p, \quad L^p = \int_V F_e^i \varphi_i^p dV \tag{4.15}$$

Отметим, что уравнения упругой потери устойчивости приводят к тому же условию $\Lambda(t_*) = 0$ для критических значений параметров системы.

5. Рассмотрим применение вышеизложенного подхода для случая одномерной задачи в декартовой метрике, т. е. для стержней и пологих арок. Обозначая v — смещение вдоль продольной оси x, а w — полный поперечный прогиб и используя гипотезу плоских сечений, запишем для единственной существенной компоненты тензора деформации, следуя (1.3)

$$e = v_{,x} + {}^1/_2 (w_{,x}^2 - w_{0,x}^2) - y (w_{,xx} - w_{0,xx}) \tag{5.1}$$

где y — координата точки поперечного сечения, отсчитываемая от оси арки. Пусть сечение прямоугольного $b \times 2\delta$, длина элемента l, он шарнирно оперт по концам, нагружен поперечной нагрузкой интенсивности q и торцевыми условиями $N(t)$, а для материала справедлив степенной закон упрочнения

$$p^{\cdot}=Ap^{-\alpha}\sigma^{n} \tag{5.2}$$

Тогда выражения для функционалов K_S и K_R принимают вид

$$\begin{gathered}K_S=b\int\limits_0^l\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left[\sigma^{\cdot}(u_{,x}^{\cdot}+w_{,x}w_{,x}^{\cdot}-yw_{,xx}^{\cdot})+\frac{1}{2}\sigma w_{,x}^{\cdot 2}-\right.\\ \left.-\frac{1}{2E}\sigma^{\cdot 2}-Ap^{-\alpha}\sigma^{n}\sigma^{\cdot}\right]dy\,dx+\int\limits_0^l q^{\cdot}w^{\cdot}dx-N^{\cdot}[u^{\cdot}(l)-u^{\cdot}(0)]\end{gathered} \tag{5.3}$$

$$\begin{gathered}K_R=b\int\limits_0^l\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left\{\sigma\left[u_{,x}+\frac{1}{2}(w_{,x}^2-w_{0,x}^2)-y(w_{,xx}-w_{0,xx})\right]-\right.\\ \left.-\frac{1}{2E}\sigma^2\right\}dy\,dx+\int\limits_0^l q(w-w_0)\,dx-N[u(l)-u(0)]\end{gathered} \tag{5.4}$$

Будем отыскивать решение в следующей форме

$$\begin{gathered}v=0,\quad w_0=2\delta\sum_{s=1}^{P}\frac{h_s}{s}\sin\frac{s\pi x}{l}\\ w=2\delta\sum_{s=1}^{P}\frac{f_s+h_s}{s}\sin\frac{s\pi x}{l}\\ \sigma=\sigma^{\vee}\left(\sigma_0+\frac{y}{2\delta}\sum_{s=1}^{P}\sigma_s\sin\frac{s\pi x}{l}\right),\quad \sigma^{\vee}=\frac{\pi^2\delta^2E}{3l^2}\end{gathered} \tag{5.5}$$

После очевидных вычислений полученное выражение для K_S варьируем по $f_k^{\cdot}$, $\sigma_0^{\cdot}$, $\sigma_k^{\cdot}$. Тогда получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{6}\sigma_0^{\cdot}+\frac{B_0}{12}=\sum_{j=1}^{P}(f_j+h_j)f_j^{\cdot},\quad \frac{k}{12}f_k^{\cdot}-\frac{\sigma_k^{\cdot}}{144}=\frac{B_k}{12}\\ \sigma_0^{\cdot}(f_k+h_k)+\sigma_0f_k^{\cdot}+\frac{k}{12}\sigma_k^{\cdot}+\frac{u_k^{\cdot}}{k^2}=0\quad (k=1,2,\ldots,P)\end{gathered} \tag{5.6}$$

а варьирование K_R по f_{ki}, σ_{0i}, σ_{ki} определяет начальные условия

$$\begin{gathered}-\frac{1}{6}\sigma_{0i}+\sum_{j=1}^{P}\frac{1}{2}f_{ji}(f_{ji}+2h_j)=0,\quad \frac{k}{12}f_{ki}-\frac{\sigma_{ki}}{144}=0\\ \sigma_{0i}(f_{ki}+h_i)+\frac{k}{12}\sigma_{ki}+\frac{u_{ki}}{k^2}=0\end{gathered} \tag{5.7}$$

$$u_k=\frac{3}{2\pi^5}\frac{ql^4}{b\delta^4E}(1-\cos k\pi)$$

$$B_{(0,k)}=A\sigma^{n-1}E\,\frac{1}{l\delta}\int\limits_0^l\int\limits_{-\delta}^{\delta}p^{-\alpha}\left(\sigma_0+\frac{y}{2\delta}\sum_{s=1}^{P}\sigma_s\sin\frac{s\pi x}{l}\right)^n\xi_{(0,k)}\,dy\,dx$$

$$\xi_{(0)}=1,\qquad \xi_{(k)}={}^1/_2(y/\delta)\,\sin\,(k\pi x/l)$$

Линеаризованные уравнения «нейтрального равновесия» имеют вид

$$-\frac{1}{6}\Delta\sigma_0+\sum_{j=1}^{P}\Delta f_j(f_j^*+h_j)=0,\quad -\frac{\Delta\sigma_k}{144}+\frac{k}{12}\Delta f_k=0$$
$$\Delta\sigma_0(f_k^*+h_k)+\frac{k}{12}\Delta\sigma_k+\sigma_0^*\Delta f_k=0 \tag{5.8}$$

Условием критического состояния системы, как для (5.6), так и для (5.8) является

$$(t_*)=\left|\begin{array}{cccc:cccc}
-\frac{1}{6} & & & 0 & f_1^*+h_1 & f_2^*+h_2 & \dots & f_p^*+h_p\\
 & -\frac{1}{144} & & & \frac{1}{12} & & & 0\\
 & & \ddots & & & \frac{2}{12} & \ddots & \\
0 & & & -\frac{1}{144} & 0 & & & \frac{p}{12}\\
\hline
f_1^*+h_1 & \frac{1}{12} & & 0 & \sigma_0^* & \dots & & 0\\
f_2^*+h_2 & & \frac{2}{12} & & & \sigma_0^* & & \\
\vdots & & \ddots & & & & \ddots & \\
f_p^*+h_p & 0 & & \frac{p}{12} & 0 & & & \sigma_0^*
\end{array}\right|=0$$

а в случае $h_k\equiv 0$ $(k=1-P)$:

$$\Lambda^\circ(t_*^\circ)=\left|\begin{array}{cccc:cccc}
-\frac{1}{6} & & & 0 & f_1^* & f_2^* & \dots & f_p^*\\
 & -\frac{1}{144} & & & \frac{1}{12} & & & 0\\
 & & \ddots & & & \frac{2}{12} & \ddots & \\
0 & & & -\frac{1}{144} & 0 & & & \frac{p}{12}\\
\hline
f_1^* & \frac{1}{12} & & 0 & \sigma_0^* & & & 0\\
f_2^* & & \frac{2}{12} & & & \sigma_0^* & & \\
\vdots & & \ddots & & & & \ddots & \\
f_p^* & 0 & & \frac{p}{12} & 0 & & & \sigma_0^*
\end{array}\right|=0$$

Значения t_* и $t_*{}^\circ$ для заданного закона ползучести (5.2) могут быть получены в общем виде численно, сведением системы (5.6) к виду (4.5), (4.6). Покажем это для частного случая $\alpha=0$, $n=3$ и $P=2$ на примере пологой синусоидальной арки под постоянной нагрузкой и стержня, сжатого в продольном направлении.

Для арки, вводя безразмерное время $\tau=A\check\sigma^2Et$ и исключая переменные σ_1 и σ_2, проинтегрировав соответствующие уравнения системы (5.7), можно получить систему вида

$$\frac{d\sigma_0}{df_1}-6\left[f_1+h_1+(f_2+h_2)\frac{df_2}{df_1}\right]+\frac{B_0{}^\circ}{2}\frac{d\tau}{df_1}=0$$
$$\frac{d\sigma_0}{df_1}+(\sigma_0+1)=B_1{}^\circ\frac{d\tau}{df_1} \qquad (5.9)$$
$$\frac{d\sigma_0}{df_1}(f_2+h_2)+(\sigma_0+4)\frac{df_2}{df_1}=2B_2{}^\circ\frac{d\tau}{df_1}$$

$$B_0{}^\circ=\sigma_0{}^3+{}^1/{}_8\sigma_0\sigma_1{}^2+{}^1/{}_8\sigma_0\sigma_2{}^2,\qquad B_1{}^\circ={}^1/{}_4\sigma_0{}^2\sigma_1+{}^3/{}_{320}\sigma_1{}^3+{}^3/{}_{160}\sigma_1\sigma_2{}^2$$
$$B_2{}^\circ={}^1/{}_2\sigma_0{}^2\sigma_2+{}^3/{}_{80}\sigma_1{}^2\sigma_2+{}^3/{}_{160}\sigma_2{}^3$$

Система (5.9) легко разрешается относительно производных и может быть проинтегрирована численно. Некоторые результаты расчетов можно найти в [4].

Для стержня $\sigma_0=-P/(2b\delta\check\sigma)$. В системе (5.6) необходимо положить $\sigma_0{}^\bullet=0$, $u_k{}^\bullet=0$ и отбросить первое уравнение. Перейдем к дифференцированию по безразмерному времени

$$\sigma_0f_1{}^\bullet+{}^1/{}_{12}\sigma_1{}^\bullet=0,\qquad f_1{}^\bullet-{}^1/{}_{12}\sigma_1{}^\bullet=B_1{}^\circ$$
$$\sigma_0f_2{}^\bullet+{}^1/{}_6\sigma_2{}^\bullet=0,\qquad 2f_2{}^\bullet-{}^1/{}_{12}\sigma_2{}^\bullet=B_2{}^\circ \qquad (5.10)$$

Приняв за независимую переменную f_1, получим систему типа (4.5) и (4.6)

$$d\tau/df_1=(\sigma_0+1)/B_1{}^\circ$$
$$df_2/df_1=4(\sigma_0+1)B_2{}^\circ/[(\sigma_0+4)B_1{}^\circ] \qquad (5.11)$$

Отметим, что так как в данной задаче величина $\Lambda=\mathrm{const}$, то при неучете пластических свойств материала условие типа $\Lambda(t_*)=0$ не достигается и завышенная оценка критического времени может быть получена лишь по (4.7).

Так как переменные во втором уравнении (5.11) не разделяются, то положив $h_2=0$, рассмотрим стержень с одной степенью свободы [3]. Тогда для начальных значений f_{1i} и σ_{1i} имеем

$$f_{1i}=-\sigma_0h_1/(\sigma_0+1),\qquad \sigma_{1i}=-12\sigma_0h_1/(\sigma_0+1) \qquad (5.12)$$

а время определяется интегралом

$$\tau=-\frac{1+\sigma_0}{3\sigma_0{}^3}\int\limits_{f_{1i}}^{f_1}\frac{df_1}{[1+{}^{27}/{}_5(f_1+h_1)^2](f_1+h_1)}$$

Этот интеграл расходится при $f_{1i}=0$, что означает $\tau_*{}^\circ\to\infty$. При ненулевых значениях f_{1i} время τ равно

$$\tau=-\frac{1+\sigma_0}{6\sigma_0{}^3}\ln\frac{(f_1+h_1)^2[1+{}^{27}/{}_5(f_{1i}+h_1)^2]}{(f_{1i}+h_1)^2[1+{}^{27}/{}_5(f_1+h_1)^2]} \qquad (5.13)$$

Устремляя $f_1\to\infty$, имеем

$$\tau_*=-\frac{1+\sigma_0}{6\sigma_0^3}\ln\frac{{}^5/_{27}(1+\sigma_0)^2+h_1^2}{h_1^2}$$

Видно, что имеет место соотношение типа (4.12) $\lim\tau\to\infty$ при $|h_1|\to 0$.

Особый интерес представляет случай, когда материал стержня обладает мгновенно нелинейноупругими свойствами $e^\times=\sigma/E+c\sigma^3$. Тогда в выражениях (5.3) и (5.4) необходимо учесть дополнительные члены

$$K_R=-b\int\limits_0^l\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{2}c\sigma^4\,dy\,dx,\quad K_S=-b\int\limits_0^l\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{3}{2}c\sigma^2\sigma^{\cdot 2}\,dy\,dx$$

Положив в (5.5) $P=1$, имеем в этом случае следующие уравнения (вместо (5.12) и (5.10)):

$$\sigma_0(f_{1i}+h_1)+{}^1/_{12}\sigma_{1i}=0,\quad f_{1i}-{}^1/_{12}\sigma_{1i}-{}^1/_{12}\beta\sigma_{1i}(\sigma_0^2+{}^3/_{80}\sigma_{1i}^2)=0$$
$$\sigma_0 f_1^{\cdot}+{}^1/_{12}\sigma_1^{\cdot}=0,\quad f_1^{\cdot}-{}^1/_{12}\sigma_1^{\cdot}-{}^1/_4\beta\sigma_1^{\cdot}(\sigma_0^2+{}^9/_{80}\sigma_1^2)=B_1^\circ$$
$$\beta=cE\sigma^{\cdot 2}$$

Начальное значение f_{1i} определяется из решения нелинейного алгебраического уравнения

$$f_{1i}(1+\sigma_0)+\sigma_0 h_1+6\beta\sigma_0^3(f_{1i}+h_1)\,[1+{}^{27}/_5(f_{1i}+h_1)^2]=0$$

Вместо первого уравнения (5.11) имеем

$$d\tau/df_1=\{1+\sigma_0+3\beta\sigma_0^3[1+{}^{81}/_5(f_1+h_1)^2]\}/B_1^\circ \tag{5.14}$$

Здесь, в отличие от предыдущего случая, величина (4.1) переменная и критерием достижения критического состояния служит равенство нулю числителя в (5.14), что достигается при

$$(f_1^*+h_1)^2={}^5/_{81}[1+\sigma_0+3\beta\sigma_0^3]/(-3\beta\sigma_0^3) \tag{5.15}$$

т. е. критическое значение прогиба не зависит от свойств ползучести материала, а определяется лишь мгновенными характеристиками системы. Из (5.14) следует

$$\tau=-\frac{1+\sigma_0}{6\sigma_0^3}\ln\frac{(f_1+h_1)^2[1+{}^{27}/_5(f_{1i}+h_1)^2]}{(f_{1i}+h_1)^2[1+{}^{27}/_5(f_1+h_1)^2]}-\frac{\beta}{2}\ln\frac{(f_1+h_1)^2[1+{}^{27}/_5(f_{1i}+h_1)^2]^4}{(f_{1i}+h_1)^2[1+{}^{27}/_5(f_1+h_1)^2]^4} \tag{5.16}$$

Первое слагаемое совпадает с (5.13). Критическое значение времени получается при подстановке в (5.16) критического прогиба (5.15).

Проведенное исследование показывает, что при изучении устойчивости процессов деформирования «в малом», момент наступления критического состояния зависит только от времени накопления таких деформаций, которые приводят к бифуркации, определяемой мгновенными упругими или упругопластическими свойствами материала и геометрическими характеристиками. То же самое время получается при прямом решении задачи ползучести, как время обращения в бесконечность скоростей деформирования.

Этот результат, аналогичный полученному Вебеком [7] для вязкопластического тела, остается справедливым и в случае, когда тело имеет начальные отклонения от некоторой «идеальной» формы. Расчет подобного «несовершенного» тела по «идеальной» схеме дает отличное от истинного значение критического времени, однако при некоторых ограничениях на величину начальных несовершенств эти значения оказываются близкими.

Очевидно, что вышеизложенный анализ сохраняет свою силу и в случае, когда в рассмотренные уравнения введены соответствующие кинематические и статические гипотезы теории стержней, пластин либо оболочек. Уравнения потери устойчивости «хлопком» оболочек с использованием вариационного принципа [3] были проанализированы в [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория тонких оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 432 с.
3. *Sanders J. L., Mc Comb H. G., Jr. Schlechte F. R.,* A variational theorem for creep with applications to plates and columns. NASA, 1957, TN 4003, 23 p.
4. *Шестериков С. А., Кашелкин В. В., Сергеев М. В.* Устойчивость пологих арок.— В кн.: Деформирование и разрушение твердых тел. М.: Изд-во МГУ, 1977, с. 52–64.
5. *Pian T. H. H.* Creep buckling of curved beam under lateral loading.— In: Proc. 3rd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., New York: ASME, 1958, p. 649–654.
6. *Reissner E.* On a variational theorem for finite elastic deformations.— J. Math. and Phys., 1953, t. 32, No. 2–3, p. 129–135.
7. *Fraeijs de Veubeke B.* Creep buckling.— In: High temperature effect in aircraft structures, London: Pergamon Press, 1958, p. 267–287.
8. *Григолюк Э. И., Липовцев Ю. В.* Применение вариационного принципа в задачах устойчивости оболочек в условиях ползучести.— Инж. ж. МТТ, 1966, № 2, с. 84–90.
9. *Ржаницын А. Р.* Процессы деформирования конструкций из упруговязких элементов.— Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1, с. 25–28.

Москва

Поступила в редакцию
3.IX.1979