МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1981

УДК 539.374

О ТЕПЛОВЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

ЛЕВИН В. М.

В ряде работ [1–5] для определения эффективных упругих и термоупругих характеристик композитных материалов, состоящих из матрицы и включений эллипсоидальной формы, был применен один из вариантов метода самосогласования, позволяющий свести задачу о многочастичном взаимодействии к упругой задаче для одного включения. Таким способом были найдены эффективные упругие модули [1–5], коэффициенты теплового расширения [2], а также получены выражения для детальных микрополей [6] в композитных материалах.

В публикуемой работе аналогичный подход используется для оценки полей, вызванных изменением температуры, и определения тепловых деформаций композитов со сферическими включениями и упругопластической матрицей.

1. Рассмотрим композитный материал, состоящий из однородной и изотропной матрицы с тензором упругих модулей $L_2(M_2=L_2^{-1})$, коэффициентов теплового расширения α_2 и сферических включений другого компонента с термоупругими характеристиками $L_1(M_1=L_1^{-1})$, α_1. Включения считаем одинаковыми по величине, а их центры — хаотически распределенными в пространстве.

Пусть композитный материал подвергается воздействию температурного поля $\theta(x)$. Выделим характерный объем композита V, т. е. объем с линейными размерами, существенно превышающими расстояния между включениями, но в пределах которого изменением температурного поля можно пренебречь. При этих условиях объем V можно считать неограниченным.

При равномерном изменении температуры вследствие различия термоупругих постоянных матрицы и включений в среде возникает исчезающее на бесконечности поле напряжений $\sigma(x)$, удовлетворяющее системе уравнений

$$\operatorname{div}\sigma(x)=0,\quad \operatorname{Rot} M(x)\sigma(x)=-\operatorname{Rot}\,[\alpha]\,v(x)\,\theta$$
$$M(x)=M_2+[M]\,v(x),\quad [M]=M_1-M_2,\quad [\alpha]=\alpha_1-\alpha_2 \tag{1.1}$$

где $v(x)$ — характеристическая функция включений, принимающая значение единица в области, занятой включениями, и нуль вне этой области.

Задачу определения поля $\sigma(x)$ можно свести к интегральному уравнению

$$\sigma(x)=\int \Gamma(x-y)\,v(y)\,([M]\sigma(y)+[\alpha]\theta)\,dy \tag{1.2}$$

где $\Gamma(x-y)$ — тензор Грина оператора $\operatorname{Rot} M_2$. Если ввести обозначение $\tau(x)=[M]\sigma(x)+[\alpha]\theta$ и фиксировать точку x в k-м произвольном включении, то уравнение (1.2) можно привести к виду

$$\tau(x)=\tau^{\vee}(x)+\int\limits_{v_k}\Gamma(x-y)[M]\tau(y)dy \quad (x,y\in v_k)$$

$$\tau^{\vee}(x)=[\alpha]\theta+\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{N}\int\limits_{v_i}\Gamma(x-y)[M]\tau(y)dy \tag{1.3}$$

совершенно аналогичному уравнению для определения изотермических напряжений в среде с включениями [6] (N — число включений в характерном объеме.).

Для решения уравнения (1.3) относительно $\tau(x)$ используем приближенный прием, заключающийся в замене поля $\tau^{\vee}$ величиной, осредненной по такому множеству реализаций случайного поля включений, в котором положение выделенного включения фиксировано. Осуществив такую замену при некоторых весьма общих предположениях относительно статистического характера распределения включений [6], получим

$$\tau^{\vee}=[\alpha]\theta+Q[M]\frac{v}{V}\sum_j\langle\tau\rangle_j,\quad v=\frac{4}{3}\pi a^3 \tag{1.4}$$

Здесь $\langle\tau\rangle_j$ — поле $\tau(x)$ $(x\in v_j)$ в произвольном включении, среднее в указанном смысле, a — радиус включений, а Q — постоянный изотропный тензор, компоненты которого зависят от упругих характеристик матрицы

$$Q_{ijkl}=q_1\delta_{ij}\delta_{kl}+2q_2(I_{ijkl}-{}^1/_3\delta_{ij}\delta_{kl})$$
$$q_1=\frac{4\mu_2k_2}{3k_2+4\mu_2},\quad q_2=\frac{\mu_2(9k_2+8\mu_2)}{5(3k_2+4\mu_2)} \tag{1.5}$$

где k_2 и μ_2 — объемный и сдвиговой упругие модули.

В силу однородности температурного поля θ величины $\langle\tau\rangle_j$ можно считать независимыми от положения центров включений и равными между собой. Обозначая их τ, можем записать (c_1 — объемная концентрация включений):

$$\tau^{\vee}=[\alpha]\theta+c_1Q[M]\tau,\quad c_1={}^4/_3N\pi a^3/V \tag{1.6}$$

Таким образом, задача определения поля $\tau(x)$ $(x\in v_k)$, как это следует из (1.3), свелась к задаче для одного включения, которое находится в пока неизвестном, но постоянном «эффективном» поле $\tau^{\vee}$. При этом условии поле во включении также постоянно [7] и равно

$$\tau^+(x)=(I+Q[M])^{-1}\tau^{\vee}\quad (x\in v_k) \tag{1.7}$$

Теперь можно воспользоваться методом самосогласования, подставив величину τ в уравнение (1.6) и определив $\tau^{\vee}$. Затем в силу (1.7) окончательно получим выражение

$$\tau^+=(I+c_2Q[M])^{-1}[\alpha]\theta,\quad c_2=1-c_1 \tag{1.8}$$

позволяющее найти поле напряжений σ^+ во включении

$$\sigma^+=-c_2Q(I+c_2Q[M])^{-1}[\alpha]\theta \tag{1.9}$$

Если материал включений изотропен, то тензор $[\alpha]$ шаровой. Отсюда следует, что тензоры τ^+ и σ^+ также шаровые, т. е. $\tau_{ij}{}^+=\tau^+\delta_{ij}$, $\sigma_{ij}{}^+=\sigma^+\delta_{ij}$, причем в силу (1.9)

$$\sigma^{+}=-4c_2\mu_2[\alpha]\theta/\Delta,\ \Delta=1+{}^4/{}_3\mu_2(c_1/k_2+c_2/k_1) \tag{1.10}$$

Далее допустим, что точка x лежит в окрестности произвольного включения. В этом случае поле напряжений вне включения определяется выражением

$$\sigma_{ij}^{-}(x)=\frac{12k_2\mu_2}{3k_2+4\mu_2}\left[c_1\delta_{ij}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3(\delta_{ij}-3n_in_j)\right]\tau^{+} \tag{1.11}$$

где n_i — компоненты единичной нормали к поверхности включения. Переходя в этом выражении к сферическим координатам с началом в центре включения, будем иметь

$$\sigma_r=\frac{4\mu_2}{r^3}\left(\frac{c_1r^3}{a^3}-1\right)B,\quad \sigma_\varphi=\sigma_\theta=\frac{4\mu_2}{r^3}\left(\frac{c_1r^3}{a^3}+\frac{1}{2}\right)B$$

$$B=3[\alpha]\theta a^3/\Delta \tag{1.12}$$

а остальные компоненты тензора напряжений в этих осях координат равны нулю.

Приведенные формулы определяют напряженное состояние внутри и в окрестности произвольного включения в упругом композитном материале при температурном воздействии.

2. Допустим, что материал матрицы идеально пластический с пределом текучести σ_s. Из упругого решения следует, что интенсивность касательных напряжений в матрице в окрестности выделенного включения

$$T=4\mu_2/\Delta^1/_2\sqrt{3}[\alpha]\theta(a/r)^3 \tag{2.1}$$

максимальна на границе раздела фаз при $r=a$. Именно на границе контакта при достижении комбинацией $[\alpha]\theta$ величины $(\Delta/6\mu_2)\sigma_s$ материал матрицы переходит в пластическое состояние. Такие пластические области, которые в силу принятых допущений являются сферами, концентрическими с включениями, при дальнейшем изменении температуры θ будут расширяться.

Допустим, что для данного уровня температуры θ эти пластические области имеют одинаковый для всех включений радиус ρ. Внутри них выполняется условие текучести $\sigma_\theta-\sigma_r=\pm\sigma_s$, где верхний знак берется при $[\alpha]\theta>0$, нижний — в случае $[\alpha]\theta<0$, а вне этих областей распределение напряжений по-прежнему будет упругим. Это значит, что компоненты тензора напряжений при $r>\rho$ имеют вид (1.12), однако величина B является неизвестной, так как напряженное состояние во включении, оставаясь гидростатическим, теперь отличается от упругого. Таким образом, вновь приходим к сферически симметричной, но уже упругопластической задаче для одного включения, на границе пластической зоны вокруг которого действуют напряжения (1.12) при неизвестном B.

Параметр B может быть определен из условия текучести на пластической границе ($r=\rho$). В результате для радиального смещения и компонент тензора напряжения в окрестности пластической зоны получаются выражения ($r\geqslant\rho$):

$$\begin{gathered}u_r=r\left[\pm\left(\frac{2c_1}{9k_2}\left(\frac{\rho}{a}\right)^3+\frac{1}{6\mu_2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^3\right)\sigma_s+\alpha_2\theta\right]\\ \sigma_r=\pm\frac{2}{3}\left[c_1\left(\frac{\rho}{a}\right)^3-\left(\frac{\rho}{r}\right)^3\right]\sigma_s\\ \sigma_\varphi=\sigma_\theta=\pm\frac{2}{3}\left[c_1\left(\frac{\rho}{a}\right)^3+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^3\right]\sigma_s\end{gathered} \tag{2.2}$$

В пластической области напряженное состояние статически определимо, т. е. напряжения определяются из уравнений равновесия и условия текучести

$$\sigma_r=\pm 2\sigma_S \ln r+C, \quad \sigma_\theta=\pm\sigma_S+\sigma_r \tag{2.3}$$

а постоянная C находится из условия непрерывности σ_r на пластической границе $C=\pm[c_1(\rho/a)^3-1-2\ln\rho]\sigma_S$.

Поскольку каждый элемент материала в окрестности произвольного включения испытывает простое нагружение, то для определения смещений в пластической зоне можно воспользоваться соотношениями Генки

$$\begin{gathered}\varepsilon_\theta=\frac{u_r}{r}=\psi(\sigma_\theta-\sigma)+\frac{\sigma}{3k_2}+\alpha_2\theta, \quad \sigma=\frac{1}{3}(\sigma_r+2\sigma_\theta)\\ \varepsilon_r=\frac{du_r}{r}=\psi(\sigma_r-\sigma)+\frac{\sigma}{3k_2}+\alpha_2\theta\end{gathered} \tag{2.4}$$

где функция ψ находится из уравнения совместности деформаций и условия непрерывности состояния на пластической границе [8] (стр. 106): $\psi=-{}^2/_3[1/k_2-(\rho/r)^3/q_1]$.

Таким образом, в пластической зоне $(a\leqslant r\leqslant\rho)$ имеем

$$\begin{gathered}u_r=r\left\{\pm\frac{2}{3}\left[\frac{1}{k_2}\left(\ln\frac{r}{\rho}-\frac{1}{3}\left(1-\frac{c_1\rho^3}{a^3}\right)\right)+\frac{1}{3q_1}\left(\frac{\rho}{r}\right)^3\right]\sigma_s+\alpha_2\theta\right\}\\ \sigma_r=\pm 2\left[\ln\frac{r}{\rho}-\frac{1}{3}\left(1-\frac{c_1\rho^3}{a^3}\right)\right]\sigma_s, \quad \sigma_\theta=\pm\sigma_s+\sigma_r\end{gathered} \tag{2.5}$$

Во включении напряженно-деформированное состояние однородно и определяется выражениями

$$u_r=Ar, \quad \sigma_r=\sigma_\theta=\sigma_\varphi=3k_1(A-\alpha_1\theta) \tag{2.6}$$

На границе контакта $(r=a)$ должны быть непрерывны напряжения σ_r и смещения u_r. Первое из этих условий определяет постоянную A, а второе — устанавливает зависимость между температурой θ и радиусом пластической зоны ρ. Вводя обозначения $\xi=\rho/a$, $k_1/k_2=\eta$, $b=2k_1/[3q_1(1-\eta)]$, можем записать $(0\leqslant r\leqslant a)$:

$$\begin{gathered}u_r=\frac{r}{3k_1}\left[\mp\left(2\ln\xi+\frac{2}{3}(1-c_1\xi^3)\right)\sigma_s+3k_1\alpha_1\theta\right]\\ \sigma^+=\mp[2\ln\xi+{}^2/_3(1-c_1\xi^3)]\sigma_S\\ \pm\left(2\ln\xi+\frac{2}{3}(1-c_1\xi^3)+b\xi^3\right)\sigma_s=\frac{3k_1[\alpha]}{1-\eta}\theta\end{gathered} \tag{2.7}$$

Полученные выражения могут служить оценкой внутренних напряжений, возникающих в композитных материалах в результате изменения температуры и оказывающих существенное влияние на их прочность [9].

3. Определим коэффициент теплового расширения композитного материала $\alpha_{ij}{}^*$ как среднюю деформацию (приходящуюся на единицу изменения температуры) характерного объема, поверхность которого свободна от нагрузок. При макроскопической изотропии композита $\alpha_{ij}{}^*$ — шаровой тензор, т. е. $\alpha_{ij}{}^*=\alpha^*\delta_{ij}$, причем $\alpha^*=\langle\varepsilon_{kk}\rangle/3\theta$, где угловые скобки означают осреднение по характерному объему.

Воспользовавшись законом Дюгамеля — Неймана, можем записать

$$\langle\varepsilon_{kk}\rangle=3(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2)\theta+{}^1/_3c_1\langle\sigma\rangle_1/k_1+{}^1/_3c_2\langle\sigma\rangle_2/k_2 \tag{3.1}$$

где $\langle\sigma\rangle_1$ и $\langle\sigma\rangle_2$ — средние напряжения в каждом компоненте композитного материала. Так как средние напряжения в характерном объеме равны нулю, $c_1\langle\sigma\rangle_1+c_2\langle\sigma\rangle_2=0$, то окончательно получаем

$$\alpha^*=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\frac{c_1}{3k_1}(1-\eta)\frac{\langle\sigma\rangle_1}{\theta} \tag{3.2}$$

В этом выражении величину $\langle\sigma\rangle_1$ можно отождествить с полем напряжений в одном включении σ^+, поскольку при принятых допущениях напряжения во всех включениях одинаковы. Очевидно, что при наличии пластических деформаций в матрице величина σ^+ зависит от температуры нелинейно и, следовательно, α^* также будет нелинейной функцией θ, зависящей от истории ее изменения. При монотонном изменении температуры для некоторого текущего ее значения выражение (3.2) определяет величину, которую по аналогии с секущим модулем [10] можно назвать секущим коэффициентом теплового расширения композита. На основе (2.7) находим

$$\begin{gathered}\langle\sigma\rangle_1=\pm b\xi^3\sigma_s+3k_1[\alpha]\theta/(1-\eta)\\ \theta=\pm\frac{1-\eta}{3k_1[\alpha]}\left(2\ln\xi+\frac{2}{3}(1-c_1\xi^3)+b\xi^3\right)\sigma_s\end{gathered} \tag{3.3}$$

Выразив отсюда $\langle\sigma\rangle_1/\theta$ и подставив в (3.2), получим выражение для секущего коэффициента α_s^*:

$$\alpha_s^*=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2-c_1(\alpha_1-\alpha_2)\frac{2\ln\xi+{}^2/_3(1-c_1\xi^3)}{2\ln\xi+{}^2/_3(1-c_1\xi^3)+b\xi^3} \tag{3.4}$$

при выполнении условий (3.3). Кроме того, будем считать, что матрица полностью переходит в пластическое состояние при $\xi=\sqrt[3]{c_1}$, т. е. $1\leqslant\xi\leqslant\sqrt[3]{c_1}$. В самом начале возникновения пластических деформаций $\xi=1$ и формула (3.4) переходит в следующую:

$$\alpha^*=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2-\frac{4c_1c_2\mu_2}{\Delta}\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)(\alpha_1-\alpha_2) \tag{3.5}$$

Это выражение совпадает с коэффициентом теплового расширения композитных материалов со сферическими включениями, найденным ранее [2].

Наряду с секущим можно ввести касательный коэффициент теплового расширения α_τ^* по формулам

$$\alpha_\tau^*=\frac{\langle\dot\varepsilon_{kk}\rangle}{\dot\theta}=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\frac{c_1}{3k_1}(1-\eta)\frac{\langle\dot\sigma\rangle_1}{\dot\theta} \tag{3.6}$$

где точку над величинами следует понимать как производную по монотонно изменяющемуся параметру ξ — безразмерному радиусу пластической зоны. Вычисление этих производных на основе (3.3) и подстановка их в формулу (3.6) дает

$$\alpha_\tau^*=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2-c_1(\alpha_1-\alpha_2)\frac{1-c_1\xi^3}{1-(c_1-{}^3/_2b)\xi^3} \tag{3.7}$$

При $\xi=1$ это выражение совпадает с коэффициентом теплового расширения композитных материалов с идеально упругими компонентами (3.5), а при переходе матрицы полностью в пластическое состояние коэффициент α_τ^* становится независящим от температуры и определяется «правилом механического смешивания»: $\alpha_\tau^*=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$.

Если же происходит разгрузка, т. е. изменение знака $\dot\theta$, то α_τ^* вновь находится по формуле (3.5) для упругих компонентов.

Заметим, что при выводе выражений для коэффициентов теплового расширения композитных материалов не учитывались флуктуации истинных полей напряжений и деформаций в окрестности каждого из включений. Поэтому важное значение приобретает оценка точности примененного здесь метода самосогласования. Такой анализ при определении упругих модулей композитных материалов был проведен в [4, 5]. В частности, при сравнении с точными решениями показано, что для регулярного расположения включений в матрице отличие полученного методом самосогласования приближенного решения от точного не превышает 10% даже в том случае, когда включения представляют собой пустоты или являются абсолютно жесткими, а значения их объемной концентрации близки к соответствующим плотной упаковке. При меньших значениях концентрации приближенное и точное решения практически совпадают.

В [5] выражения для эффективных упругих модулей материалов с взаимодействующими трещинами сравнивались с имеющимися экспериментальными данными; совпадение также было хорошим. Поскольку для определения коэффициентов теплового расширения упругих композитов здесь применен тот же метод, следует ожидать, что выражения для них обладают той же степенью точности.

Отметим, что формула (3.5), полученная методом самосогласования, совпадает с коэффициентом теплового расширения упругого «сферического композитного элемента», поверхность которого свободна от напряжений. Такой элемент состоит из сферического включения и концентрической с ним оболочки из материала матрицы с отношением радиусов сфер $\sqrt[3]{c_1}$ и является основой «ячеечной» модели композитных сред. Можно показать, что то же остается справедливым и для полученных здесь формул с учетом пластической деформации матрицы. Следовательно, выражения (3.4) и (3.7) можно считать точными значениями секущего и касательного коэффициентов теплового расширения композитных материалов, которые можно представить ансамблем сферических композитных элементов [10]. Однако вопрос относительно применимости полученных формул для немалых концентраций включений и упругопластического поведения матрицы требует экспериментальных подтверждений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левин В. М.* К определению эффективных упругих модулей композитных материалов.– Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 5, с. 1042–1045.
2. *Левин В. М.* К определению упругих и термоупругих постоянных композитных материалов.– Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 6, с. 137–145.
3. *Канаун С. К.* Метод самосогласованного поля в задаче об эффективных свойствах упругого композита.– ПМТФ, 1975, № 4, с. 194–203.
4. *Канаун С. К.* О приближении самосогласованного поля для упругой композитной среды.– ПМТФ, 1977, № 2, с. 160–169.
5. *Канаун С. К., Яблокова Г. И.* Приближение самосогласованного поля в плоской задаче для систем взаимодействующих трещин.– Механика стержневых систем и сплошных сред: Сб. статей. Вып. 9. Л.: Ленингр. инж.-строит. ин-т, 1976, с. 118–133.
6. *Левин В. М.* О концентрации напряжений на включениях в композитных материалах.– ПММ, 1977, т. 41, вып. 4, с. 735–743.
7. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.
8. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
9. *Ленг Ф. Ф.* Разрушение композитов с дисперсными частицами в хрупкой матрице.– В кн.: Композиционные материалы. Т. 5. Разрушение и усталость. М.: Мир, 1978, с. 11–57.
10. *Chu T. Y., Hashin Z.* Plastic behaviour of composites and porous media under isotropic stress.— Internat. J. Engng Sci., 1971, v. 9, No. 10, p. 971–993.

Петрозаводск

Поступила в редакцию 25.III.1980