МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1981

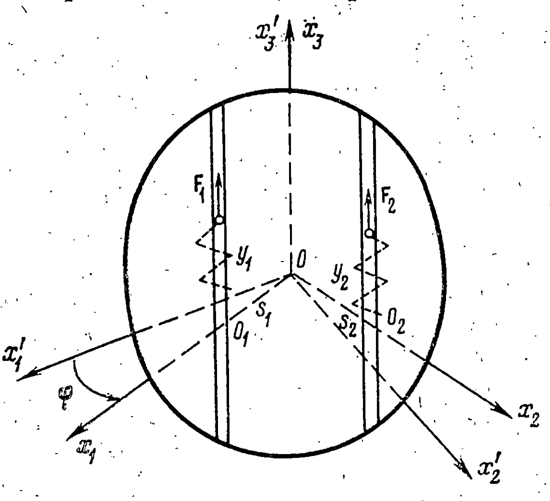
УДК 531.38

О СТАБИЛИЗАЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ ПОДВИЖНЫХ МАСС

КАЧУРИНА Н. М., КРЕМЕНТУЛО В. В.

В рамках аналитической теории управления [1, 2] дано решение задачи об оптимальной (в определенном смысле) стабилизации перманентного вращения твердого тела с неподвижной точкой при помощи внутренних сил, создающих требуемое относительное движение двух масс параллельно оси вращения тела. Полученные в явном виде управляющие силы обеспечивают асимптотическую устойчивость рассматриваемого вращательного движения тела по части его фазовых координат и минимум некоторого функционала интегрального типа.

1. Известно, что стационарное движение твердого тела может быть стабилизировано при помощи масс, совершающих вращение относительно этого тела. В качестве таких масс берутся маховики или гироскопы, управляемые специально выбираемыми моментами внутренних сил (см., например, [3]). Однако установлено, что указанная задача может быть решена и при помощи масс, совершающих поступательное движение относительно стабилизируемого тела [4, 5] под действием специально подбираемых внутренних сил. Рассмотрим изолированную от внешних сил механическую систему, состоящую из твердого тела с неподвижной точкой O и главными осями инерции $Ox_1x_2x_3$ и двух масс, способных перемещаться по прямолинейным каналам, расположенным параллельно главной оси инерции тела Ox_3 (фигура). Указанные массы будем в дальнейшем принимать за материальные точки, движущиеся по прямолинейным траекториям. Предположим, что на теле расположены специальные устройства, которые могут создавать силы, приложенные к материальным точкам и меняющиеся по требуемому закону.



Введем следующие обозначения: A_1, A_2, A_3 — моменты инерции тела относительно осей $Ox_1x_2x_3$, ρ_1, ρ_2 — массы материальных точек, s_1, s_2 — расстояния от точек пересечения O_1, O_2 каналов с осями Ox_1, Ox_2 до точки O, F_1, F_2 — управляющие силы, действующие на материальные точки, M_1, M_2 — моменты этих сил относительно осей Ox_1, Ox_2, y_1, y_2 — координаты точек, отсчитываемые от центров O_1, O_2, $Ox_1'x_2'x_3'$ — полуподвижные оси координат (ось Ox_3' совпадает с осью Ox_3, оси Ox_1', Ox_2' лежат в плоскости Ox_1x_2 и не участвуют в собственном вращении тела по углу φ), p_1, p_2, p_3 — проекции мгновенной угловой скорости тела на оси $Ox_1x_2x_3$, q_1, q_2, q_3 — проекции мгновенной угловой скорости трехгранника $Ox_1'x_2'x_3'$ на его оси, β_{ik} (i, $k=1, 2, 3$) — направляющие косинусы углов между осями $Ox_1'x_2'x_3'$ и осями инерциальной системы координат $OX_1X_2X_3$ (на фигуре не показаны); G_1, G_2, G_3 – проекции вектора кинетического момента системы относительно центра O на оси $Ox_1x_2x_3$, G_1', G_2', G_3' – проекции этого вектора на оси $Ox_1'x_2'x_3'$; h_1, h_2, h_3 – постоянные проекции этого вектора на оси $OX_1X_2X_3$, g_1, g_2 – проекции векторов кинетических моментов точек относительно центра O на оси Ox_1, Ox_2.

Используя выражения для проекций кинетического момента системы

$$G_1=B_1p_1-e_1p_3+g_1,\ G_2=B_2p_2-e_2p_3+g_2$$
$$G_3=B_3p_3-e_1p_1-e_2p_2,\ B_1=A_1+\rho_1y_1^2+\rho_2(y_2^2+s_2^2)$$
$$B_2=A_2+\rho_1(y_1^2+s_1^2)+\rho_2y_2^2,\ B_3=A_3+\rho_1s_1^2+\rho_2s_2^2$$
$$e_1=\rho_1s_1y_1,\ e_2=\rho_2s_2y_2,\ g_1=\rho_2s_2y_2^{\cdot},\ g_2=-\rho_1s_1y_1^{\cdot} \tag{1.1}$$

и применяя теорему об изменении кинетического момента системы относительно осей $Ox_1x_2x_3$, приходим к следующим трем уравнениям:

$$\begin{gathered}B_1p_1^{\cdot}-e_1p_3^{\cdot}+B_1^{\cdot}p_1+(B_3-B_2)p_3p_2-e_1p_1p_2+e_2(p_3^2-p_2^2)+g_1^{\cdot}=0\\ B_2p_2^{\cdot}-e_2p_3^{\cdot}+B_2^{\cdot}p_2+(B_1-B_3)p_1p_3+e_2p_1p_2+e(p_1^2-p_3^2)+g_2^{\cdot}=0\\ B_3p_3^{\cdot}-e_1p_1^{\cdot}-e_2p_2^{\cdot}+(B_2-B_1)p_2p_1+p_3(e_1p_2-e_2p_1)+p_1g_2-p_2g_1=0\end{gathered} \tag{1.2}$$

Выпишем девять кинематических уравнений Пуассона

$$\beta_{i1}^{\cdot}=q_3\beta_{i2}-q_2\beta_{i3}\quad (i=1,2,3)\quad (1\ 2\ 3) \tag{1.3}$$
$$q_1=p_1\cos\varphi-p_2\sin\varphi,\ q_2=p_1\sin\varphi+p_2\cos\varphi,\ q_3=p_3-\varphi^{\cdot}$$

Уравнения относительного движения материальных точек после несложных преобразований можно записать в виде

$$\begin{gathered}g_1^{\cdot}=M_1-\rho_2s_2^2(p_1^{\cdot}+p_2p_3)+e_2(p_1^2+p_2^2)\\ g_2^{\cdot}=M_2-\rho_1s_1^2(p_2^{\cdot}-p_1p_3)-e_1(p_1^2+p_2^2)\\ M_1=F_2s_2,\ M_2=-F_1s_1\end{gathered} \tag{1.4}$$

Уравнения (1.2)–(1.4) составляют замкнутую систему уравнений движения изучаемой механической системы по фазовым координатам p_i, β_{ik} (i, k=1, 2, 3), y_1, y_2. Для дальнейшего целесообразно преобразовать полученные уравнения движения к новой форме. Для этого, заменив слагаемые $g_1^{\cdot}$, $g_2^{\cdot}$ в уравнениях (1.2) правыми частями уравнений (1.4), получим

$$\begin{gathered}C_1p_1^{\cdot}-e_1p_3^{\cdot}=f_1,\ C_2p_2^{\cdot}-e_2p_3^{\cdot}=f_2\\ B_3p_3^{\cdot}-e_1p_1^{\cdot}-e_2p_2^{\cdot}=f_3\\ C_1=B_1-\rho_2s_2^2,\ C_2=B_2-\rho_1s_1^2\\ -f_1=B_1^{\cdot}p_1+(B_3-B_2-\rho_2s_2^2)p_3p_2-e_1p_1p_2+e_2(p_1^2+p_3^2)+M_1\\ -f_2=B_2^{\cdot}p_2+(B_1-B_3+\rho_1s_1^2)p_1p_3+e_2p_1p_2-e_1(p_3^2+p_2^2)+M_2\\ -f_3=(B_2-B_1)p_2p_1+p_3(e_1p_2-e_2p_1)+p_1g_2-p_2g_1\end{gathered} \tag{1.5}$$

Поскольку определитель при производных $p_1^{\cdot}$, $p_2^{\cdot}$, $p_3^{\cdot}$ в системе уравнений (1.5)

$$\Delta=C_1C_2B_3-C_2e_1^2-C_1e_2^2 \tag{1.6}$$

при малых y_1, y_2 отличен от нуля, эту систему можно привести к форме Коши

$$\begin{gathered}p_1^{\cdot}=\Delta^{-1}[f_1(C_2B_3-e_2^2)+f_2e_1e_2+f_3C_2e_1]\\ p_2^{\cdot}=\Delta^{-1}[f_1e_1e_2+f_2(C_1B_3-e_1^2)+f_3C_1e_2]\\ p_3^{\cdot}=\Delta^{-1}(f_1C_2e_1+f_2C_1e_2+f_3C_1C_2)\end{gathered} \tag{1.7}$$

В дальнейшем нам потребуется уравнение (1.1), разрешенное относительно $y_1^\cdot$, $y_2^\cdot$

$$-\rho_1 s_1 y_1^\cdot = G_2 - B_2 p_2 + e_2 p_3, \quad \rho_2 s_2 y_2^\cdot = G_1 - B_1 p_1 + e_1 p_3$$
$$G_1 = G_1' \cos\varphi + G_2' \sin\varphi, \quad G_2 = -G_1' \sin\varphi + G_2' \cos\varphi \tag{1.8}$$
$$G_j' = \Sigma h_k \beta_{kj} \ {\scriptstyle (j=1,\,2)}, \quad h_i^\cdot = 0 \ {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,3)}$$

Таким образом, окончательная система уравнений движения сводится к (1.7), (1.3), (1.8). Изучаемое перманентное вращение тела вокруг оси Ox_3 имеет вид

$$p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 = \varphi^\cdot = \omega = \text{const}$$
$$\beta_{ik} = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}, \quad y_1 = y_2 = 0 \tag{1.9}$$
$$M_1 = M_2 = 0, \quad h_1 = h_2 = 0, \quad h_3 = h_3^\circ = B_3 \omega$$

В этом движении материальные точки покоятся в экваториальной плоскости тела Ox_1x_2, управляющие силы отсутствуют.

Возьмем движение (1.9) в качестве невозмущенного и составим уравнения возмущенного движения, сохраняя за возмущениями обозначения исходных переменных. Нетрудно проверить, что эти уравнения имеют следующий вид:

$$p_1^\cdot = A_1^{-1}[(A_2 - A_3)\omega p_2 - e_2(\omega + p_3)^2 - M_1] + P_1 \tag{1.10}$$
$$p_2^\cdot = A_2^{-1}[(A_3 - A_1)\omega p_1 + e_1(\omega + p_3)^2 - M_2] + P_2, \quad p_3^\cdot = P_3$$
$$\beta_{ii}^\cdot = B_{ii}, \quad \beta_{12}^\cdot = -q_3 + B_{12}, \quad \beta_{13}^\cdot = q_2 + B_{13} \ {\scriptstyle (i=1,\,2,\,3)\ (1\ 2\ 3)}$$
$$\rho_1 s_1 y_1^\cdot = (h_1 + h_3^\circ \beta_{31}) \sin \omega t - (h_2 + h_3^\circ \beta_{32}) \cos \omega t + (A_2 + \rho_1 s_1^2) p_2 - e_2 \omega + Y_1$$
$$\rho_2 s_2 y_2^\cdot = (h_1 + h_3^\circ \beta_{31}) \cos \omega t + (h_2 + h_3^\circ \beta_{32}) \sin \omega t - (A_1 + \rho_2 s_2^2) p_1 + e_1 \omega + Y_2 \tag{1.11}$$
$$q_1 = p_1 \cos \omega t - p_2 \sin \omega t, \quad q_2 = p_1 \sin \omega t + p_2 \cos \omega t$$
$$q_3 = p_3, \quad B_{i1} = q_3 \beta_{i2} - q_2 \beta_{i3} \ {\scriptstyle (i=1,\,2,\,3)\ (1\ 2\ 3)}$$

Через P_i, Y_1, Y_2 обозначены члены не ниже второго порядка малости относительно p_i, β_{ik}, y_1, y_2, h_i, причем структура членов P_i $(i=1, 2, 3)$ такова, что они обращаются в нуль при $p_1 = p_2 = 0$.

Поставим следующую задачу: так определить управляющие моменты M_1, M_2 (а значим, в силу (1.4) и силы F_1, F_2), как функции фазовых координат системы p_i, β_{ik}, y_1, y_2, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость режима (1.9) (нулевого решения уравнений (1.10), (1.11)) по части переменных p_i, β_{ik} и минимум некоторого функционала

$$\int_0^\infty \Omega(p_1, p_2, p_3; \beta_{11}, \ldots, \beta_{12}, \beta_{33}; M_1, M_2; y_1, y_2)\, dt \tag{1.12}$$

где Ω — определенно-положительная по стабилизируемым переменным функция, которая будет найдена в процессе решения задачи.

2. Обозначив $A_1\omega_1 = (A_2 - A_3)\omega$, $A_2\omega_2 = (A_3 - A_1)\omega$ и введя новые управляющие моменты u_1, u_2 по формулам

$$-A_1 u_1 = M_1 + e_2(\omega + p_3)^2, \quad -A_2 u_2 = M_2 - e_1(\omega + p_3)^2 \tag{2.1}$$

приведем уравнения (1.10) к форме

$$p_1^\cdot = \omega_1 p_2 + u_1 + P_1, \quad p_2^\cdot = \omega_2 p_1 + u_2 + P_2, \quad p_3^\cdot = P_3$$
$$\beta_{ii}^\cdot = B_{ii}, \quad \beta_{12}^\cdot = -q_3 + B_{12}, \quad \beta_{13}^\cdot = q_2 + B_{13} \quad {\scriptstyle (i=1,\,2,\,3)\ (1\ 2\ 3)} \tag{2.2}$$

Уравнения (1.11), в дальнейшем не играющие существенной роли, оставим без изменений.

Следуя [3, с. 53], проведем решение поставленной задачи в два этапа. Сначала рассмотрим приближенную систему уравнений по переменным $p_1, p_2, \beta_{31}, \beta_{32}, \beta_{33}$:

$$\begin{gathered} p_1^{\cdot}=\omega_1 p_2+u_1, \quad p_2^{\cdot}=\omega_2 p_1+u_2 \\ \beta_{31}^{\cdot}=-q_2, \quad \beta_{32}^{\cdot}=q_1, \quad \beta_{33}^{\cdot}=q_2\beta_{31}-q_1\beta_{32} \end{gathered} \tag{2.3}$$

Будем изучать вопрос об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.3)

$$p_1=p_2=0, \quad \beta_{31}=\beta_{32}=\beta_{33}=0 \tag{2.4}$$

при минимуме функционала

$$\int_0^\infty \Omega_1(p_1, p_2;\ \beta_{31}, \beta_{32}, \beta_{33};\ u_1, u_2)\,dt \tag{2.5}$$

посредством функции Ляпунова с неизвестными переменными коэффициентами $a_{31}(t)$, $a_{32}(t)$, $b_{31}(t)$, $b_{32}(t)$

$$\begin{gathered} 2V=k(\beta_{31}^2+\beta_{32}^2+\beta_{33}^2)+m_1 p_1^2+ \\ +m_2 p_2^2+2p_1(a_{31}\beta_{31}+a_{32}\beta_{32})+2p_2(b_{31}\beta_{31}+b_{32}\beta_{32}) \end{gathered} \tag{2.6}$$

и подынтегральной функции

$$\Omega_1=e_{11}p_1^2+2e_{12}p_1p_2+e_{22}p_2^2+n_1u_1^2+n_2u_2^2+S(\beta_{31}, \beta_{32}) \tag{2.7}$$

где $e_{jk}(t)$ $(j, k=1, 2)$ — также неизвестные функции времени, $S(\beta_{31}, \beta_{32})$ — неизвестная квадратичная форма по переменным β_{31}, β_{32} При этом положительные параметры k, m_1, m_2, n_1, n_2 можно выбирать в соответствии с поставленной задачей.

На основании теоремы об оптимальной стабилизации [1] имеем для u_j и V:

$$u_j=-\frac{1}{2n_j}\frac{\partial V}{\partial p_j} \quad (j=1,2) \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial V}{\partial t}-\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{4n_j}\left(\frac{\partial V}{\partial p_j}\right)^2+\frac{\partial V}{\partial p_1}\omega_1 p_2+\frac{\partial V}{\partial p_2}\omega_2 p_1- \\ -\frac{\partial V}{\partial \beta_{31}}(p_1\sin\omega t+p_2\cos\omega t)+\frac{\partial V}{\partial \beta_{32}}(p_1\cos\omega t-p_2\sin\omega t)+ \\ +\frac{\partial V}{\partial \beta_{33}}[(p_1\sin\omega t+p_2\cos\omega t)\beta_{31}-(p_1\cos\omega t-p_2\sin\omega t)\beta_{32}]+ \\ +e_{11}p_1^2+2e_{12}p_1p_2+e_{22}p_2^2+S(\beta_{31}, \beta_{32})=0 \end{gathered} \tag{2.9}$$

Подставляя функцию (2.6) в уравнение (2.9), получаем для a_{31}, a_{32}, b_{31}, b_{32} легко разрешимую систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} a_{31}^{\cdot}-d_1a_{31}+\omega_2 b_{31}=-k\sin\omega t, \quad b_{31}^{\cdot}-d_2b_{31}+\omega_1a_{31}=-k\cos\omega t \\ a_{32}^{\cdot}-d_1a_{32}+\omega_2b_{32}=k\cos\omega t, \quad b_{32}^{\cdot}-d_2b_{32}+\omega_1a_{32}=-k\sin\omega t \\ d_j=m_j/2n_j \quad (j=1, 2) \end{gathered} \tag{2.10}$$

Вычислив a_{31}, b_{31}, a_{32}, b_{32}, легко находим далее

$$e_{11}=d_1^2n_1+a_{31}\sin\omega t-a_{32}\cos\omega t$$
$$e_{22}=d_2^2n_2+b_{31}\cos\omega t+b_{32}\sin\omega t$$
$$2e_{12}=-(m_1\omega_1+m_2\omega_2)+(a_{31}-b_{32})\cos\omega t+(b_{31}+a_{32})\sin\omega t \quad (2.11)$$
$$S(\beta_{31},\beta_{32})=\frac{1}{4n_1}(a_{31}\beta_{31}+a_{32}\beta_{32})^2+\frac{1}{4n_2}(b_{31}\beta_{31}+b_{32}\beta_{32})^2$$

Положив для простоты $m_j=m$, $n_j=n$, $d_j=d$ $(j=1, 2)$, $\mu=1/d$, $l=k/m$, и считая параметр d достаточно большим, имеем
$a_{31}=k\mu\sin\omega t+\ldots$, $b_{31}=k\mu\cos\omega t+\ldots$ $a_{32}=-k\mu\cos\omega t+\ldots$, $b_{32}=k\mu\sin\omega t+\ldots$

$$e_{11}=d^2n+k\mu+\ldots,\ e_{22}=d^2n+k\mu+\ldots$$
$$2e_{12}=-m(\omega_1+\omega_2)+\ldots,\ S(\beta_{31},\ \beta_{32})=nl^2(\beta_{31}^2+\beta_{32}^2)+\ldots \quad (2.12)$$

Многоточие означает более высокого порядка малости. В силу (2.7), (2.8) для Ω_1 и u_j получаем

$$\Omega_1=(d^2n+k\mu)(p_1^2+p_2^2)-m(\omega_1+\omega_2)p_1p_2+nl^2(\beta_{31}^2+\beta_{32}^2)+$$
$$+n(u_1^2+u_2^2)+\ldots \quad (2.13)$$
$$-u_1=dp_1+l(\beta_{31}\sin\omega t-\beta_{32}\cos\omega t)+\ldots \quad (2.14)$$
$$-u_2=dp_2+l(\beta_{31}\cos\omega t+\beta_{32}\sin\omega t)+\ldots$$

Нетрудно проверить, что для симметричного тела $(A_1=A_2)$ слагаемое в (2.13), содержащее p_1p_2, обращается в нуль и функция Ω_1 приобретает простейший вид суммы квадратов переменных. На основании (1.4), (2.1), (2.14) приходим к следующим управляющим моментам:

$$M_1=A_1[dp_1+l(\beta_{31}\sin\omega t-\beta_{32}\cos\omega t)]-\omega^2e_2+\ldots$$
$$M_2=A_2[dp_2+l(\beta_{31}\cos\omega t+\beta_{32}\sin\omega t)]+\omega^2e_1+\ldots \quad (2.15)$$

и управляющим силам

$$F_1=-s_1^{-1}A_2[dp_2+l(\beta_{31}\cos\omega t+\beta_{32}\sin\omega t)]-b_1y_1+\ldots \quad (2.16)$$
$$F_2=s_2^{-1}A_1[dp_1+l(\beta_{31}\sin\omega t-\beta_{32}\cos\omega t)]-b_2y_2+\ldots,\ b_j=\rho_j\omega^2\ (j=1,\ 2)$$

Необходимо учесть, что из девяти координат β_{ik} $(i, k=1, 2, 3)$ независимыми являются лишь две; можно, например, выразить все β_{ik} в виде функций двух углов Крылова θ, ψ [6]. Отсюда следует, что из стабилизируемости движения (1.13) по β_{31}, β_{32} вытекает стабилизируемость этого движения по всем β_{ik} $(i, k=1, 2, 3)$.

По аналогии с [3] устанавливается, что управление (2.15), (2.16), полученное в силу приближенных уравнений (2.3), решает задачу стабилизации движения (2.13) и в силу точных уравнений (2.2) и выражений для q_1, q_2, q_3 в (1.3) при условии, что это движение обладает обычной устойчивостью по нестабилизируемым переменным p_3, y_1, y_2. При этом подынтегральная функция Ω (1.12) примет вид $\Omega=\Omega_1+\Omega_2$, где Ω_2 — члены не ниже третьего порядка малости. Устойчивость вращения (1.9) по p_3 имеет место, например, в случае динамической симметрии тела $(A_1=A_2)$. Устойчивость (1.9) по y_1, y_2 может быть достигнута введением упругих пружин, ограничивающих перемещения подвижных масс, что имеет место в реальных системах стабилизации. В этом случае суммарная сила Φ_j, действующая на каждую массу, будет состоять из упругой силы и найденной силы (2.16). Обозначив коэффициенты жесткости пружин через c_j ($j=1, 2$), получим [4]:

$$\begin{gathered}\Phi_1=-(c_1+b_1)y_1-k_1p_2-l_1(\beta_{31}\cos\omega t+\beta_{32}\sin\omega t)+\ldots\\ \Phi_2=-(c_2+b_2)y_2+k_2p_1+l_2(\beta_{31}\sin\omega t-\beta_{32}\cos\omega t)+\ldots\\ k_1=A_2ds_1^{-1},\ k_2=A_1ds_2^{-1},\ l_1=A_2ls_1^{-1},\ l_2=A_1ls_2^{-1}\end{gathered}\tag{2.17}$$

Как только ось вращения тела Ox_3 придет в исходное положение и управления (2.14) будут выключены, пружины при помощи специальных устройств должны быть раскреплены с телом, чтобы дать возможность массам равномерно перемещаться вдоль каналов до их полного отделения от тела. В противном случае в силу закона сохранения кинетического момента системы относительно точки O массы не смогут принять на себя возмущения кинетического момента системы и обеспечить стабилизацию вращательного движения тела. Предложенный способ стабилизации имеет, таким образом, на последнем этапе внешнее сходство со стабилизацией при помощи реактивных двигателей, но по сравнению с последней представляется более приемлемым с энергетической точки зрения. С технической точки зрения данная система стабилизации является более простой и обладает меньшим весом, чем система стабилизации при помощи маховиков или гироскопов [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений.— В кн.: Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Доп. 4. М.: Наука, 1966. с. 530.
2. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 3, с. 421.
3. *Крементуло В. В.* Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс. М.: Наука, 1977. 264 с.
4. *Childs D. W.* A movable mass attitude stabilization system for artificial g-space stations.— J. Spacecraft and Rockets, 1971, v. 8, No. 8, p. 829.
5. *Kunciw B. G., Kaplan M. H.* Optimal space station detumbling by interanl mass motion.— Automatica, 1976, v. 12, No. 5, p. 417.
6. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.I.1980