

УДК 532.516

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УПРУГОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ ЛЕГКО НАГРУЖЕННОГО КОНТАКТА

КУДИН И. И.

Рассматривается плоская изотермическая упругогидродинамическая задача о легко нагруженном контакте шероховатых или гладких тел, разделенных тонким слоем несжимаемой неньютоновской жидкости (смазки). В легко нагруженном контакте влияние деформируемости контактирующих тел и поверхностного слоя микронеровностей на давление в области контакта мало. Иначе говоря, решение задачи во всей области контакта близко к решению задачи о течении вязкой жидкости через узкий зазор известной формы.

Метод решения указанной задачи основан на использовании регулярных асимптотических разложений [1, 2], позволяющих изучать поведение решения в области контакта для жидкостей со сложной реологией.

При режимах недостаточной и обильной смазки получены дифференциальные уравнения для определения двух первых членов асимптотик давления и зазора в области контакта. Кроме того, для толщины слоя смазки и силы трения найдены новые двучленные асимптотические формулы. Полученные общие зависимости иллюстрируются рассмотрением некоторых конкретных моделей жидкости. В частном случае ньютоновской жидкости главные члены упомянутых разложений совпадают с результатами [3].

Кратко рассматриваются плоская и пространственная неизотермические упругогидродинамические задачи о легко нагруженном смазанном контакте. Приводятся структурные формулы для толщины слоя и силы трения в контакте.

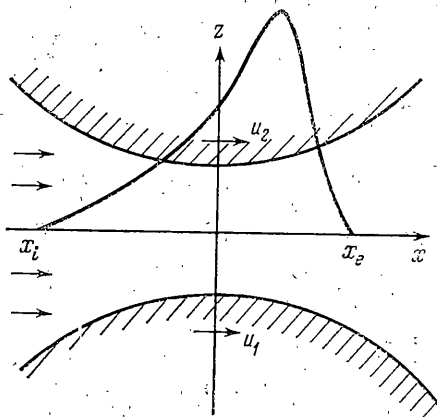
Полученные формулы для толщины слоя и силы трения могут быть использованы при обработке экспериментальных данных для оценки применимости той или иной реологической модели смазки в реально встречающихся задачах о легко нагруженном упругогидродинамическом контакте.

1. Постановка плоской изотермической задачи. Сформулируем основные допущения. Будем считать, что толщина слоя смазки существенно меньше радиусов контактирующих тел и в области контакта меняется слабо, а силы вязкого трения значительно больше сил инерции. Далее предположим, что вязкость смазки зависит только от давления, а деформация микронеровностей ашроксимируется некоторой функцией давления [4].

Реологическое уравнение, связывающее касательное напряжение τ с градиентом скорости $du/\partial z$, примем в виде [5]:

$$\tau = \Phi(\mu du/\partial z) \text{ или } \mu du/\partial z = F(\tau) \quad (1.1)$$

где Φ и F — произвольные монотонно возрастающие гладкие нечетные и взаимно обратные функции, μ — вязкость, представляющая собой гладкую неубывающую функцию давления p .



При указанных допущениях плоская задача о течении вязкой жидкости в узком зазоре сводится к уравнениям (см., например, [6, 7]):

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

с граничными условиями

$$u \left(x, -\frac{h}{2} \right) = u_1, \quad u \left(x, \frac{h}{2} \right) = u_2, \quad w \left(x, (-1)^i \frac{h}{2} \right) = (-1)^i \frac{u_i}{2} \frac{dh}{dx} \quad (i=1,2) \quad (1.3)$$

Здесь $h=h(x)$ — зазор между контактирующими телами, u и w — скорость движения жидкости в направлении качения x и поперек слоя z , u_1 и u_2 — линейные скорости точек поверхностей контактирующих тел. Общий вид области контакта и давления в ней приведен на фигуре.

При помощи уравнения (1.1) и первых двух уравнений в (1.2) и (1.3) найдем

$$u(x, z) = u_1 + \frac{1}{\mu} \int_{-h/2}^z F \left(f + t \frac{dp}{dx} \right) dt \quad (1.4)$$

При этом $f=f(x)$ — неизвестное касательное напряжение τ в срединной плоскости $z=0$. На основании (1.3) и (1.4) для $f(x)$ имеем

$$\int_{-h/2}^{h/2} F \left(f + t \frac{dp}{dx} \right) dt = \mu (u_2 - u_1) \quad (1.5)$$

Воспользовавшись равенством (1.4), проинтегрируем уравнение неразрывности по z от $-h/2$ до $h/2$ с учетом условий (1.3) на компоненту w . В результате получим аналог уравнения Рейнольдса в виде

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{\mu} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^z F \left(f + t \frac{dp}{dx} \right) dt + u_1 h \right\} = 0 \quad (1.6)$$

К уравнениям (1.5) и (1.6) необходимо добавить соотношение для $h(x)$, вытекающее из рассмотрения деформации контактирующих тел [6]

$$h = h_e + \varphi(p) + \frac{x^2 - x_e^2}{R'} + \frac{4}{\pi E'} \int_{x_i}^{x_e} p(t) \ln \frac{x_e - t}{|x - t|} dt \quad (1.7)$$

Здесь $\varphi(p)$ — локальная деформация микронеровностей, представляющая собой неубывающую функцию давления, $\varphi(0)=0$, $h_e=h(x_e)$ — толщина слоя в точке выхода из области контакта $x=x_e$, x_i — координата входа в область контакта, R' и E' — соответственно приведенные радиус и модуль упругости материалов тел.

Для замыкания уравнений (1.5)–(1.7) к ним следует присоединить граничные условия для давления на концах области контакта

$$p(x_i) = p(x_e) = dp/dx(x_e) = 0 \quad (1.8)$$

и условие равенства внешней нагрузки P интегралу от давления по области контакта

$$\int_{x_i}^{x_e} p(t) dt = P \quad (1.9)$$

Таким образом, при известных функциях μ , φ , F и постоянных x_i , u_1 , u_2 , R' , E' и P задача сводится к решению системы нелинейных интегродифференциальных уравнений (1.5)–(1.9) относительно функций $f(x)$, $p(x)$, $h(x)$ и постоянных x_c и h_c .

Решив задачу, найдем формулу для силы трения

$$F_\tau(z) = \int_{x_i}^{x_c} \tau(x, z) dx = \int_{x_i}^{x_c} \Phi \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx \quad (1.10)$$

Используя соотношения (1.4), вычислим силы трения $F_\tau^\pm = F_\tau(\pm h/2)$ на поверхностях тел. В результате получим

$$F_\tau^\pm = F_s \pm F_R, \quad F_s = \int_{x_i}^{x_c} f(x) dx, \quad F_R = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_c} h(x) \frac{dp}{dx} dx \quad (1.11)$$

где F_s и F_R — силы трения скольжения и качения.

Введем безразмерные переменные

$$x' = x \frac{T}{R'}, \quad z' = \frac{z}{h_c}, \quad a = x_i \frac{T}{R'}, \quad c = x_c \frac{T}{R'}, \quad p' = p \frac{\pi R'}{2TP}$$

$$\mu' = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad h' = \frac{h}{h_c}, \quad \varphi' = \varphi \frac{T^2}{R'}, \quad F' = F \frac{2h_c}{\mu_0(u_1 + u_2)}, \quad f' = f \frac{\pi}{2h_c P} \left(\frac{R'}{T} \right)^2$$

Здесь $T = T(\mu_0, u_1, u_2, R', P, \dots)$ — некоторый безразмерный параметр, зависящий от реологических свойств жидкости (вида функции F), но не зависящий от приведенного модуля упругости E' . Конкретный вид параметра T будет дан ниже при рассмотрении примеров.

Приняв во внимание условия (1.5) и (1.8) и проинтегрировав один раз уравнение (1.6), получим уравнения задачи в безразмерном виде (штрихи опущены)

$$\int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^z F \left(f + t \frac{dp}{dx} \right) dt = \mu \left[\frac{s}{2} - \left(1 - \frac{s}{2} \right) (h-1) \right] \quad (1.12)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} F \left(f + t \frac{dp}{dx} \right) dt = \mu s \quad (1.13)$$

$$\gamma(h-1) = \varphi(p) + x^2 - c^2 + \frac{1}{V} \frac{2}{\pi} \int_a^c p(t) \ln \frac{c-t}{|x-t|} dt \quad (1.14)$$

$$p(a) = p(c) = 0, \quad \int_a^c p(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad (1.15)$$

$$\gamma = T^2 \frac{h_c}{R'}, \quad V = \frac{\pi R' E'}{4T^2 P}, \quad s = 2 \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1}$$

2. Метод решения плоской изотермической задачи. Ниже излагается метод регулярных асимптотических разложений [1, 2] в применении к системе нелинейных интегродифференциальных уравнений (1.12)–(1.15) для области с заранее неизвестной границей $z = \pm h/2$ и $x = c$. Последнее вызывает определенные трудности как при численном решении указанных уравнений, так и при их асимптотическом исследовании. Эти трудности

устраняются с помощью замены переменных $x = \frac{1}{2}(c+a) + \frac{1}{2}(c-a)u$, $z = \frac{1}{2}hv$, $p(x) = q(u)$, $j(x) = g(u)$; $h(x) = H(u)$ и преобразования уравнений (1.12)–(1.15) к уравнениям, записанным в области с известными границами

$$\frac{H^2}{4\mu} \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^v F \left(g + \frac{Ht}{c-a} \frac{dq}{du} \right) dt = \frac{s}{2} - \left(1 - \frac{s}{2} \right) (H-1) \quad (2.1)$$

$$\int_{-1}^1 F \left(g + \frac{Ht}{c-a} \frac{dq}{du} \right) dt = 2 \frac{\mu s}{H} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \gamma(H-1) = \varphi(q) + \left(\frac{c-a}{2} \right)^2 u^2 + \frac{c^2 - a^2}{2} u + \frac{a^2 + 2ac - 3c^2}{4} + \\ + \frac{c-a}{\pi V} \int_{-1}^1 q(t) \ln \frac{1-t}{|u-t|} dt \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$q(\pm 1) = 0, \quad \int_{-1}^1 q(t) dt = \frac{\pi}{c-a} \quad (2.4)$$

Будем считать, что контакт легко нагружен, если параметр V в (2.3) велик. Кроме того, предположим, что

$$\varphi(q) = V^{-1} \psi(q), \quad \psi(q) \sim 1 \text{ при } V \gg 1 \quad (2.5)$$

Приведенное определение легко нагруженного упругогидродинамического контакта согласуется с принятым представлением о малом влиянии деформаций микронеровностей и упругих тел в целом на давление и зазор в области контакта.

Из вида уравнений (2.1)–(2.5) следует, что при $V \gg 1$ решение указанной системы можно представить в форме¹

$$q(u) = \sum_{k=0}^{\infty} V^{-k} q_k(u), \quad H(u) = \sum_{k=0}^{\infty} V^{-k} H_k(u), \quad g(u) = \sum_{k=0}^{\infty} V^{-k} g_k(u), \quad (2.6)$$

$$c = \sum_{k=0}^{\infty} V^{-k} c_k, \quad \gamma = \sum_{k=0}^{\infty} V^{-k} \gamma_k$$

Разложим функцию F , входящую в уравнения (2.1), (2.2), в ряд Тейлора в окрестности точки q_0 , H_0 , g_0 , c_0 , γ_0 . Подставив это разложение функции F и соотношения (2.5), (2.6) в уравнения (2.1)–(2.4) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях V , получим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^v F_0 dt = \frac{4\mu_0}{H_0^2} \left[1 - H_0 \left(1 - \frac{s}{2} \right) \right], \quad \int_{-1}^1 F_0 dt = \frac{2\mu_0 s}{H_0} \\ F_0 = F \left(g_0 + \frac{H_0 t}{c_0 - a} \frac{dq_0}{du} \right), \quad \mu_0 = \mu(q_0) \end{aligned}$$

¹ В случае, когда $\varphi(q) = O(V^{-n})$ при $q \sim 1$ и $V \gg 1$ (n – положительное число), решение строится аналогичным образом, но не по степеням V^{-1} , а по иной системе функций параметра V [1, 2].

$$\gamma_0(H_0-1) = \left(\frac{c_0-a}{z}\right) u^2 + \frac{c_0-a^2}{z} u + \frac{a^2+2ac_0-3c_0^2}{4}$$

$$q_0(\pm 1) = 0, \quad \int_{-1}^1 q_0(t) dt = \frac{\pi}{c_0-a} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{H_0}{c_0-a} \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^v \frac{\partial F_0}{\partial g_0} t dt \frac{dq_1}{du} + \left\{ \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^v \frac{\partial F_0}{\partial q_0} dt - \right. \\ & - \frac{4}{H_0^2} \frac{d\mu_0}{dq_0} \left[1 - H_0 \left(1 - \frac{s}{2} \right) \right] \left. \right\} q_1 + \left\{ \frac{\partial H_0}{\partial c_0} \left[\int_{-1}^1 dv \int_{-1}^v \frac{\partial F_0}{\partial H_0} dt + \right. \right. \\ & + \frac{8\mu_0}{H_0^3} \left(1 - \frac{H_0}{2} \left(1 - \frac{s}{2} \right) \right) \left. \right] + \frac{1}{c_0-a} \frac{dq_0}{du} \left(\frac{\partial H_0}{\partial c_0} - \frac{H_0}{c_0-a} \right) \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^v \frac{\partial F_0}{\partial g_0} t dt \left. \right\} c_1 + \\ & + \left\{ \frac{\partial H_0}{\partial \gamma_0} \left[\frac{1}{c_0-a} \frac{dq_0}{du} \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^v \frac{\partial F_0}{\partial g_0} t dt + \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^v \frac{\partial F_0}{\partial H_0} dt + \right. \right. \\ & + \frac{8\mu_0}{H_0^3} \left(1 - \frac{H_0}{2} \left(1 - \frac{s}{2} \right) \right) \left. \right] + \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^v \frac{\partial F_0}{\partial \gamma_0} dt \left. \right\} \gamma_1 + \\ & + \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^v \frac{\partial F_0}{\partial g_0} dt g_1 + \left\{ \frac{1}{c_0-a} \frac{dq_0}{du} \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^v \frac{\partial F_0}{\partial g_0} t dt + \right. \\ & + \left. \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^v \frac{\partial F_0}{\partial H_0} dt + \frac{8\mu_0}{H_0^3} \left[1 - \frac{H_0}{2} \left(1 - \frac{s}{2} \right) \right] \right\} Q = 0 \\ & \left(\frac{H_0}{c_0-a} \int_{-1}^1 \frac{\partial F_0}{\partial g_0} t dt \frac{\partial q_1}{du} + \left[\int_{-1}^1 \frac{\partial F_0}{\partial q_0} dt - 2 \frac{s}{H_0} \frac{d\mu_0}{dq_0} \right] q_1 + \right. \\ & + \left. \left[\frac{1}{c_0-a} \frac{dq_0}{du} \left(\frac{\partial H_0}{\partial c_0} - \frac{H_0}{c_0-a} \right) \int_{-1}^1 \frac{\partial F_0}{\partial g_0} t dt + \frac{\partial H_0}{\partial c_0} \left(\int_{-1}^1 \frac{\partial F_0}{\partial H_0} dt + \frac{2\mu_0 s}{H_0^2} \right) \right] c_1 + \right. \\ & + \left\{ \frac{\partial H_0}{\partial \gamma_0} \left[\frac{1}{c_0-a} \frac{dq_0}{du} \int_{-1}^1 \frac{\partial F_0}{\partial g_0} t dt + \int_{-1}^1 \frac{\partial F_0}{\partial H_0} dt + \frac{2\mu_0 s}{H_0^2} \right] + \int_{-1}^1 \frac{\partial F_0}{\partial \gamma_0} dt \right\} \gamma_1 + \\ & + \int_{-1}^1 \frac{\partial F_0}{\partial g_0} dt g_1 + \left[\frac{1}{c_0-a} \frac{dq_0}{du} \int_{-1}^1 \frac{\partial F_0}{\partial g_0} t dt + \int_{-1}^1 \frac{\partial F_0}{\partial H_0} dt + \frac{2\mu_0 s}{H_0^2} \right] Q = 0 \\ & H_1 = \frac{\partial H_0}{\partial c_0} c_1 + \frac{\partial H_0}{\partial \gamma_0} \gamma_1 + Q \end{aligned}$$

$$Q = \psi(q_0) + \frac{c_0-a}{\pi} \int_{-1}^1 q_0(t) \ln \frac{1-t}{|u-t|} dt$$

$$q_1(\pm 1) = 0, \quad \int_{-1}^1 q_1(t) dt = -\frac{\pi c}{(c_0 - a)^2}$$

и т. д. Здесь функции F_0 , $\partial F_0/\partial q_0$, $\partial F_0/\partial g_0$, $\partial H_0/\partial c_0$ и $\partial H_0/\partial \gamma_0$ вычисляются при помощи главных членов разложений q_0 , H_0 , g_0 , μ_0 , c_0 и γ_0 ; частные производные $\partial F_0/\partial H_0$, $\partial F_0/\partial \gamma_0$ также вычисляются по указанным главным членам разложений при условии постоянства величины $g_0 + H_0 t / (c_0 - a) dq_0/du$.

Таким образом, решение задачи (2.1)–(2.5) в условиях недостаточной ($|a| \ll 1$) и обильной смазки ($|a| \gg 1$) сводится к последовательному интегрированию нелинейной системы дифференциальных уравнений (2.7) относительно $q_0(u)$, $H_0(u)$, $g_0(u)$, c_0 , γ_0 и линейных систем дифференциальных уравнений типа (2.8) относительно $q_k(u)$, $H_k(u)$, $g_k(u)$, c_k и γ_k при $k \geq 1$.

Основным преимуществом асимптотического метода решения задачи по сравнению с численным в данном случае является возможность получения простых асимптотических формул для толщины слоя смазки и силы трения. При помощи соотношений (1.11) и асимптотических разложений

$$\begin{aligned} \gamma \int_a^c f(x) dx &= \frac{\gamma_0(c_0 - a)}{2} \int_{-1}^1 g_0(u) du + \\ &+ \frac{1}{2V} \left\{ \gamma_0(c_0 - a) \int_{-1}^1 g_1(u) du + [\gamma_1(c_0 - a) + \gamma_0 c_1] \int_{-1}^1 g_0(u) du \right\} + \dots \\ \gamma \int_a^c h(x) \frac{dp}{dx} dx &= \gamma_0 \int_{-1}^1 H_0(u) \frac{dq_0}{du} du + \frac{1}{V} \left\{ \gamma_0 \int_{-1}^1 \left[H_1(u) \frac{dq_0}{du} + \right. \right. \\ &\left. \left. + H_0(u) \frac{dq_1}{du} \right] du + \gamma_1 \int_{-1}^1 H_0(u) \frac{dq_0}{du} du \right\} + \dots \end{aligned}$$

получим двучленные асимптотические формулы для толщины слоя смазки

$$h_0 = \frac{R'}{T^2} \left(\gamma_0 + \frac{1}{V} \gamma_1 + \dots \right) = \frac{R'}{T^2} \gamma_0 + \frac{4P'}{\pi R' E'} \gamma_1 + \dots \quad (2.9)$$

и компонент силы трения

$$\begin{aligned} F_s &= \frac{P}{T} \left(a_0 + \frac{1}{V} a_1 + \dots \right) = \frac{P}{T} a_0 + \frac{4P^2}{\pi R' E'} T a_1 + \dots \\ F_R &= \frac{P}{T} \left(b_0 + \frac{1}{V} b_1 + \dots \right) = \frac{P}{T} b_0 + \frac{4P^2}{\pi R' E'} T b_1 + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$a_0 = \frac{\gamma_0(c_0 - a)}{\pi} \int_{-1}^1 g_0(u) du, \quad b_0 = \frac{\gamma_0}{\pi} \int_{-1}^1 H_0(u) \frac{dq_0}{du} du$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \left\{ \gamma_0(c_0 - a) \int_{-1}^1 g_1(u) du + [\gamma_1(c_0 - a) + \gamma_0 c_1] \int_{-1}^1 g_0(u) du \right\}$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \left\{ \gamma_0 \int_{-1}^1 \left[H_1(u) \frac{dq_0}{du} + H_0(u) \frac{dq_1}{du} \right] du + \gamma_1 \int_{-1}^1 H_0(u) \frac{dq_0}{du} du \right\}$$

В последних формулах численные значения безразмерных коэффициентов γ_0 , γ_1 , a_0 , a_1 , b_0 и b_1 зависят от конкретного вида функций F , ψ , μ и постоянных a и s . Из (2.7)–(2.10) следует, что h_e , F_s и F_R зависят от E' и вида функции $\psi(q)$ лишь начиная с членов порядка V^{-1} при $V \gg 1$.

Рассмотрим некоторые примеры. Исследуем задачу о легко нагруженном контакте, смазываемом жидкостью со степенным реологическим законом [5, 8, 9]:

$$\tau = \mu^\alpha \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\alpha > 0) \quad (2.11)$$

В данном случае функция F , входящая в уравнение Рейнольдса (1.6), принимает вид $F(x) = |x|^{(1-\alpha)/\alpha} x$. После введения безразмерных переменных в систему (1.5)–(1.9) уравнения (1.12) и (1.13) таковы:

$$12^{1/\alpha} \gamma^{(\alpha+1)/\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^{h/2} \left| f+t \frac{dp}{dx} \right|^{(1-\alpha)/\alpha} \left(f+t \frac{dp}{dx} \right) dt = \\ = \mu \left[\frac{s}{2} - \left(1 - \frac{s}{2} \right) (h-1) \right] \quad (2.12)$$

$$12^{1/\alpha} \gamma^{(\alpha+1)/\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \left| f+t \frac{dp}{dx} \right|^{(1-\alpha)/\alpha} \left(f+t \frac{dp}{dx} \right) dt = \mu s$$

а уравнения (1.14), (1.15) остаются без изменений. При этом постоянная T находится из условия

$$T^2 = \frac{2R'}{\mu_0(u_1+u_2)} \left(\frac{P}{6\pi R'} \right)^{1/\alpha} \quad (2.13)$$

а постоянная V определена в (1.12)–(1.15).

В этом случае формулы (2.9) и (2.10) можно записать так:

$$h_e = \frac{\mu_0(u_1+u_2)}{2} \left[\frac{6\pi R'}{P} \right]^{1/\alpha} \gamma_0 + \frac{4P}{\pi E'} \gamma_1 + \dots \\ F_s = P \left[\frac{\mu_0(u_1+u_2)}{2R'} \right]^{1/2} \left[\frac{6\pi R'}{P} \right]^{1/(2\alpha)} a_0 + \\ + \frac{4P^2}{\pi R' E'} \left[\frac{2R'}{\mu_0(u_1+u_2)} \right]^{1/2} \left[\frac{P}{6\pi R'} \right]^{1/(2\alpha)} a_1 + \dots \\ F_R = P \left[\frac{\mu_0(u_1+u_2)}{2R'} \right]^{1/2} \left[\frac{6\pi R'}{P} \right]^{1/(2\alpha)} b_0 + \\ + \frac{4P^2}{\pi R' E'} \left[\frac{2R'}{\mu_0(u_1+u_2)} \right]^{1/2} \left[\frac{P}{6\pi R'} \right]^{1/(2\alpha)} b_1 + \dots \quad (2.14)$$

Отметим, что в (2.14) постоянные γ_0 , γ_1 , a_0 , a_1 , b_0 и b_1 зависят от вида функции μ и постоянных a , s и α .

В случае ньютоновской жидкости $\alpha=1$ и формулы (2.14) принимают вид

$$h_e = \frac{\mu_0(u_1+u_2)R'}{P} d_{00} + \frac{P}{E'} d_{01} + \dots$$

$$F_s = (u_2 - u_1) \left\{ \left[\frac{\mu_0 P}{u_1 + u_2} \right]^{1/2} d_{10} + \frac{1}{R'E'} \left[\frac{P^5}{\mu_0 (u_1 + u_2)^3} \right]^{1/2} d_{11} + \dots \right\} \quad (2.15)$$

$$F_R = [\mu_0 (u_1 + u_2) P]^{1/2} d_{20} + \frac{1}{R'E'} \left[\frac{P^5}{\mu_0 (u_1 + u_2)} \right]^{1/2} d_{21} + \dots$$

где постоянные d_{00} , d_{01} , d_{10} , d_{11} , d_{20} и d_{21} зависят лишь от вида функции μ и значения постоянной a .

Обратимся, далее, к задаче о легко нагруженном контакте, смазываемом жидкостью Ри-Эйринга [5, 10], для которой

$$\tau = G_1 \mu_1 \operatorname{arsh} [(\mu/G) (\partial u / \partial z)] \quad (2.16)$$

где $\mu_1 = \mu_1(p)$ — функция давления, G и G_1 — реологические постоянные.

В рассматриваемом случае функция F , входящая в уравнение (1.6), имеет вид $F(x) = G \operatorname{sh}[x/(G_1 \mu_1)]$. Произведя интегрирование в (1.5) и (1.6), придем к аналогу уравнения Рейнольдса из [10]. Введем безразмерные переменные в полученное уравнение с учетом $\mu_1' = \mu_1 / \mu_1^0$, $\mu_1^0 = \mu_1(0)$. При этом постоянная T может быть определена, например, из равенства $T^2 = 2R'G/[\mu_0(u_1 + u_2)]$ или из (2.13). После этого из (2.9) и (2.10) получим формулы для h_e , F_s , F_R и $F_{\tau^{\pm}}$. При этом постоянные γ_0 , γ_1 , a_0 , a_1 , b_0 и b_1 будут зависеть от постоянных a , s и $P/(R'G_1 \mu_1^0)$ и вида функций μ и μ_1 .

3. Плоская неизотермическая задача. Наряду с допущениями, принятыми в п. 1, будем считать, что тепловыделение в слое смазки связано преимущественно с наличием вязкого сдвига жидкости, причем поток тепла направлен по нормали к контактирующим поверхностям. Предположим также, что вязкость смазки $\mu = \mu(p, \Theta)$ является известной функцией давления p и температуры Θ .

Учитывая сказанное, к уравнениям (1.2), (1.3) необходимо добавить уравнение переноса тепла поперек слоя смазки [7]:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = -\tau \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \Theta \left(x, -\frac{h}{2} \right) = \Theta_{w1}(x), \quad \Theta \left(x, \frac{h}{2} \right) = \Theta_{w2}(x) \quad (3.1)$$

где $\lambda = \lambda(p, \Theta)$ — коэффициент теплопроводности смазки.

Проведем по аналогии с п. 1 необходимые выкладки и введем безразмерные переменные ($\Theta' = \Theta / \Theta_0$, $\Theta_{wi}' = \Theta_{wi} / \Theta_0$, $\lambda' = \lambda / \lambda_0$), придем к системе уравнений

$$\int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^z \frac{1}{\mu} F \left(f+t \frac{dp}{dx} \right) dt = \frac{s}{2} - \left(1 - \frac{s}{2} \right) (h-1) \quad (3.2)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{\mu} F \left(f+t \frac{dp}{dx} \right) dt = s$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = -\kappa \frac{\gamma^2}{\mu} \left(f+z \frac{dp}{dx} \right) F \left(f+z \frac{dp}{dx} \right)$$

$$\kappa = \frac{(u_1 + u_2) P}{\pi \lambda_0 \Theta_0 T^2}, \quad \Theta \left(x, -\frac{h}{2} \right) = \Theta_{w1}(x), \quad \Theta \left(x, \frac{h}{2} \right) = \Theta_{w2}(x)$$

К данной системе необходимо присоединить уравнения (1.14), (1.16).

Приведем ход решения системы уравнений (3.2), (1.14), (1.15). По аналогии с п. 2 перейдем к новым переменным и будем искать решение

полученной системы уравнений при $V \gg 1$ и выполненном равенстве (2.5) в виде (2.6). При этом температуру Θ также следует искать в виде ряда по степеням V^{-1} :

$$\Theta = \sum_{k=0}^{\infty} V^{-k} \Theta_k \quad (3.3)$$

В результате подстановки (2.6) и (3.3) в уравнения задачи и приравнивания членов при одинаковых степенях V получим для главных членов разложений нелинейную систему дифференциальных уравнений, аналогичную системе (2.7), а для последующих членов — линейные системы дифференциальных уравнений. При этом для толщины слоя смазки и силы трения получим формулы (2.9), (2.10), в которых постоянные γ_0 , γ_1 , a_0 , a_1 , b_0 и b_1 зависят от вида функций F , ψ , μ , λ , Θ_{w1} , Θ_{w2} и постоянных a , s и κ . Из этого следует, что формулы для h_e , F_s , F_R и F_{τ}^{\pm} сохраняют свою структуру и в случае неизотермической задачи (см., например, формулы (2.14) и (2.15)).

В [7, 11] развиты асимптотические методы решения плоских задач упругогидродинамической теории смазки тяжело нагруженного контакта (например, при $V \ll 1$), также позволяющие получать формулы для толщины слоя и силы трения.

4. Пространственная упругогидродинамическая задача. Рассмотрим пространственную неизотермическую упругогидродинамическую задачу. Предположим, что уравнения, связывающие касательные напряжения в жидкости τ_{xz} и τ_{yz} со скоростями сдвига $\partial u / \partial z$ и $\partial v / \partial z$, имеют вид

$$\mu \partial u / \partial z = F_u(\tau_{xz}), \quad \mu \partial v / \partial z = F_v(\tau_{yz}) \quad (4.1)$$

где F_u и F_v — произвольные гладкие монотонно возрастающие функции.

Приняв допущения, сделанные в п. 1 при выводе уравнения Рейнольдса и в п. 3 — при выводе уравнения переноса тепла, проведем необходимые вычисления (см. п. 1). В результате сведем задачу к следующей системе нелинейных интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^z \frac{1}{\mu} F_u \left(f_u + t \frac{\partial p}{\partial x} \right) dt + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^z \frac{1}{\mu} F_v \left(f_v + t \frac{\partial p}{\partial y} \right) dt + u_1 \frac{\partial h}{\partial x} + v_1 \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ & h = h_e + \varphi(p) - \varphi(0) + \frac{x^2}{R_x'} + \frac{y^2}{R_y'} + \\ & + \frac{2}{\pi E'} \left\{ \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} - \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right\} \\ & \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{\mu} F_u \left(f_u + t \frac{\partial p}{\partial x} \right) dt = u_2 - u_1, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{\mu} F_v \left(f_v + t \frac{\partial p}{\partial y} \right) dt = v_2 - v_1 \\ & \int_{\Omega} \int_{\Omega} p(\xi, \eta) d\xi d\eta = P, \quad p(x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n}(x, y)|_{\Gamma_0} = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = - \frac{1}{\mu} \left\{ \left(f_u + z \frac{\partial p}{\partial x} \right) F_u \left(f_u + z \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + \left(f_v + z \frac{\partial p}{\partial y} \right) F_v \left(f_v + z \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right\}$$

$$\Theta(x, y, -1/2h) = \Theta_{w1}(x, y), \quad \Theta(x, y, 1/2h) = \Theta_{w2}(x, y), \quad \mu = \mu(p, \Theta), \quad \lambda = \lambda(p, \Theta)$$

Здесь Ω — область контакта, Γ — граница области контакта, Γ_0 — часть границы области контакта, на которой проекция потока массы жидкости на внешнюю нормаль к Γ положительна, $f_u = f_u(x, y)$, $f_v = f_v(x, y)$ — проекции касательного напряжения скольжения соответственно на ось x и y , u_i , v_i — линейные скорости точек поверхностей контактирующих тел в проекциях на ось x и y ($i=1, 2$). В ряде случаев можно принять²

$$u_i = u_{i0} + \omega_i y, \quad v_i = \omega_i x \quad (4.3)$$

где u_{i0} — постоянные, являющиеся проекциями скоростей на направление качения, ω_i — угловые скорости вращения.

Можно показать, что компоненты силы трения на контактирующих поверхностях определяются из соотношений

$$F_{rx}^{\pm} = F_{sx} \pm F_{Rxx}, \quad F_{ry}^{\pm} = F_{sy} \pm F_{Ryy}, \quad F_{sx} = \iint_{\Omega} f_u(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (4.4)$$

$$F_{Rx} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} h(\xi, \eta) \frac{\partial p}{\partial \xi} d\xi d\eta, \quad F_{sy} = \iint_{\Omega} f_v(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$F_{Ry} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} h(\xi, \eta) \frac{\partial p}{\partial \eta} d\xi d\eta$$

Отметим, что если вязкость жидкости μ не зависит от температуры Θ , $\Theta_{w1} = \Theta_{w2}$ и $\lambda \rightarrow \infty$, то система уравнений (4.2) описывает изотермическую упругогидродинамическую задачу.

Введем в (4.2) безразмерные величины

$$x' = x \frac{T}{R_x}, \quad y' = y \frac{T}{R_x}, \quad z' = \frac{z}{h_c}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad h' = \frac{h}{h_c}$$

$$p' = \frac{2\pi R_x'^2}{3PT^2} p, \quad \Theta' = \frac{\Theta}{\Theta_0}, \quad \Theta_{wi}' = \frac{\Theta_{wi}}{\Theta_0}, \quad \Phi' = \Phi \frac{T^2}{R_x'}$$

$$F'_{u,v} = F_{u,v} \frac{2h_c}{\mu_0(u_{10} + u_{20})}, \quad f'_{u,v} = f_{u,v} \frac{2\pi R_x'^2}{3h_c P T^2}$$

В результате получим систему уравнений в безразмерных переменных (штрихи опущены):

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^z \frac{1}{\mu} F_u \left(f_u + t \frac{\partial p}{\partial x} \right) dt + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^z \frac{1}{\mu} F_v \left(f_v + t \frac{\partial p}{\partial y} \right) dt + \\ + \left(1 - \frac{s}{2} + \tau_1 y \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \tau_1 x \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

² В случаях, когда существенно кривизна контактирующих тел в направлении y , в (4.3) вместо u_{i0} следует подставить $u_{i0}(1 - 1/2y^2 / R_i^2)$.

$$\begin{aligned}
 & \gamma(h-1) = \varphi(p) - \varphi(0) + x^2 + \varepsilon y^2 + \\
 & + \frac{2}{\pi V} \left\{ \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} - \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{V\xi^2 + \eta^2} \right\} \\
 & \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{\mu} F_u \left(f_u + t \frac{\partial p}{\partial x} \right) dt = s + (\tau_2 - \tau_1) y \\
 & \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{\mu} F_v \left(f_v + t \frac{\partial p}{\partial y} \right) dt = (\tau_2 - \tau_1) x \\
 & \int_{\Omega} \int p(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{2\pi}{3}, \quad p(x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial n}(x, y) \right|_{r_0} = 0 \quad (4.5) \\
 & \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = -\kappa \frac{\gamma^2}{\mu} \left[\left(f_u + z \frac{\partial p}{\partial x} \right) F_u \left(f_u + z \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \right. \\
 & \left. + \left(f_v + z \frac{\partial p}{\partial y} \right) F_v \left(f_v + z \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\Theta(x, y, -1/2 h) = \Theta_{w1}(x, y), \quad \Theta(x, y, 1/2 h) = \Theta_{w2}(x, y)$$

$$s = 2 \frac{u_{20} - u_{10}}{u_{10} + u_{20}}, \quad \tau_i = \frac{2\omega_i R_x'}{(u_{10} + u_{20})T}, \quad \varepsilon = \frac{R_x'}{R_y'}$$

$$\kappa = \frac{3(u_{10} + u_{20})P}{4\pi\lambda_0\Theta_0 R_x' T}, \quad V = \frac{2\pi E' R_x'^2}{3PT^3}, \quad \gamma = T^2 \frac{h_e}{R_x'}$$

где постоянная $T = T(\mu_0, u_{10}, u_{20}, \omega_1, \omega_2, R_x', R_y', P, \dots)$ — безразмерный параметр, зависящий от вида функций $F_{u, v}$ и не зависящий от E' .

Асимптотический анализ системы уравнений (4.5) при $V \gg 1$, аналогичный анализу п. 2, весьма трудоемок. Однако для $h_e, F_{\tau x}^{\pm}, F_{\tau y}^{\pm}$ удается получить структурные асимптотические формулы в виде двучленного разложения

$$\begin{aligned}
 h_e &= \frac{R_x'}{T^2} \left(\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{V} + \dots \right) = \frac{R_x'}{T^2} \gamma_0 + \frac{3TP}{2\pi E' R_x'} \gamma_1 + \dots \\
 F_{sx(y)} &= \frac{P}{T} \left(a_{0sx(y)} + \frac{a_{1sx(y)}}{V} + \dots \right) = \frac{P}{T} a_{0sx(y)} + \frac{3TP^2}{2\pi E' R_x'^2} a_{1sx(y)} + \dots \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Формулы для $F_{Rx(y)}$ отличаются от формул для $F_{sx(y)}$ только значением коэффициентов $a_{0sx(y)}$ и $a_{1sx(y)}$. Заметим, что постоянные $\gamma_0, \gamma_1, a_{0sx(y)}, a_{1sx(y)}, \dots$ являются функциями параметров $\varepsilon, s, \tau_i, \kappa$ и зависят, кроме того, от вида функций $F_{u, v}, \mu, \lambda$ и Θ_{wi} , а также формы границы $\Gamma \setminus \Gamma_0$.

В случае жидкости со степенной реологией (см. формулу (2.11)) в качестве постоянной T можно принять

$$T = \left\{ \frac{3P}{2\pi R_x'^2} \left[\frac{2R_x'}{\mu_0(u_{10} + u_{20})} \right]^\alpha \right\}^{1/(2\alpha-1)} \quad (4.7)$$

После этого с помощью соотношений (4.6), (4.7) нетрудно получить структурные формулы для $h_e, F_{sx(y)}, F_{Rx(y)}$ и $F_{\tau x}^{\pm}(y)$ в окончательном виде.

5. Численный пример. Рассмотрим плоскую изотермическую упругогидродиническую задачу для ньютоновской жидкости. В этом случае функция F равна

$$F \left(g + \frac{Ht}{c-a} \frac{dq}{du} \right) = 12\gamma^2 \left(g + \frac{Ht}{c-a} \frac{dq}{du} \right) \quad (5.1)$$

Подставив (5.1) в системы уравнений (2.7), (2.8) и вычислив интегралы, запишем полученные уравнения в виде

$$\begin{aligned} \frac{dq_0}{du} &= \frac{\mu_0(c_0-a)(H_0-1)}{2\gamma_0^2 H_0^3}, & g_0 &= \frac{\mu_0 s}{12\gamma_0^2 H_0} \\ \gamma_0(H_0-1) &= \left(\frac{c_0-a}{2} \right)^2 u^2 + \frac{c_0^2-a^2}{2} u + \frac{a^2+2ac_0-3c_0^2}{4} \\ q_0(\pm 1) &= 0, & \int_{-1}^1 q_0(t) dt &= \frac{\pi}{c_0-a} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{du} &= \frac{\mu_0(c_0-a)}{2\gamma_0^2 H_0^3} \left\{ (H_0-1) \frac{d \ln \mu_0}{dq_0} q_1 + \left[3 \left(3-H_0 - \frac{2}{H_0} \right) + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{a(c_0-a)}{\gamma_0} (u-1) \left(2 - \frac{3}{H_0} \right) \right] \frac{c_1}{c_0-a} - 3 \left(1 - \frac{1}{H_0} \right) \frac{\gamma_1}{\gamma_0} + \left(\frac{3}{H_0} - 2 \right) Q \left. \right\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\mu_0 s}{12\gamma_0^2 H_0} \left\{ \frac{d \ln \mu_0}{dq_0} q_1 - \frac{1}{H_0} \frac{\partial H_0}{\partial c_0} c_1 - \left(1 + \frac{1}{H_0} \right) \frac{\gamma_1}{\gamma_0} - \frac{Q}{H_0} \right\} \\ H_1 &= \frac{\partial H_0}{\partial c_0} c_1 - (H_0-1) \frac{\gamma_1}{\gamma_0} + Q, & q_1(\pm 1) &= 0, & \int_{-1}^1 q_1(t) dt &= -\frac{\pi c_1}{(c_0-a)^2} \end{aligned}$$

Исследуем уравнения (5.2), (5.3) в случае постоянной вязкости $\mu(q) = \mu_0(q_0) = 1$. Используя результаты [3], решение системы уравнений (5.2) получим в виде

$$\begin{aligned} q_0(x) &= \frac{b^3}{8} \left\{ \frac{b^2-3c_0^2}{b^2} \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{b} + \frac{bx}{b^2+x^2} \right] - \frac{2b\gamma_0 x}{(b^2+x^2)^2} - c^0 \right\} \\ c^0 &= \frac{b^2-3c_0^2}{b^2} \left[\operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \frac{ab}{a^2+b^2} \right] - \frac{2ab\gamma_0}{(a^2+b^2)^2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$b = \sqrt{\gamma_0 - c_0^2}, \quad x = 1/2(a+c_0) + 1/2(c_0-a)u$$

Постоянные γ_0 и c_0 , входящие в выражения (5.4), определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{b^2-3c_0^2}{b^2} \left[\operatorname{arctg} \frac{c_0}{b} - \operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \frac{bc_0}{\gamma_0} - \frac{ab}{a^2+b^2} \right] + \frac{2ab\gamma_0}{(a^2+b^2)^2} - \frac{2bc_0}{\gamma_0} &= 0 \\ \frac{b^2-3c_0^2}{b^2} \left[\frac{c_0}{b} \left(\operatorname{arctg} \frac{c_0}{b} - \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) - \frac{a(c_0-a)}{a^2+b^2} \right] + \frac{a^2-c_0^2}{a^2+b^2} + \frac{2a\gamma_0(c_0-a)}{(a^2+b^2)^2} - 4\pi b^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Решение системы уравнений (5.3) можно записать в виде

$$q_1(x) = \frac{1}{b^3} \left\{ \frac{3\gamma_1}{b^2} \varepsilon_\gamma(x) + \frac{c_1}{c_0-a} \varepsilon_c(x) + \frac{\gamma_0}{b^2} \varepsilon(x) \right\}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\gamma(x) &= \frac{\gamma_0}{b^2} A_4(\rho) - A_3(\rho), \quad \varepsilon_c(x) = \frac{6\gamma_0(ac_0 - \gamma_0)}{b^4} A_4(\rho) + \\ &+ \frac{9\gamma_0 - 4ac_0}{b^2} A_3(\rho) - 3A_2(\rho) + \frac{2a}{b} \left[2B_2(\rho) - \frac{3\gamma_0}{b^2} B_3(\rho) \right] \\ \varepsilon(x) &= \int_{ab^{-1}}^{\rho} \frac{1}{(1+t^2)^3} \left[\frac{3\gamma_0}{b^2(1+t^2)} - 2 \right] \left[\psi(q_0) + \frac{2b}{\pi} \int_{ab^{-1}}^{c_0b^{-1}} q_0(z) \ln \frac{c_0b^{-1}-z}{|t-z|} dz \right] dt \\ A_{n+1}(\rho) &= \frac{1}{2n} \left[\frac{\rho}{(1+\rho^2)^n} - \frac{ab^{2n-1}}{(a^2+b^2)^n} \right] + \frac{2n-1}{2n} A_n(\rho) \\ A_1(\rho) &= \arctg \rho - \arctg \frac{a}{b}, \quad B_n(\rho) = \frac{1}{2n} \left[\left(\frac{b^2}{a^2+b^2} \right)^n - \frac{1}{(1+\rho^2)^n} \right] \quad (n=1, 2, \dots) \\ \rho &= x/b, \quad x = 1/2(a+c_0) + 1/2(c_0-a)u \end{aligned} \quad (5.6)$$

Из (5.6) и последних двух уравнений в (5.3) найдем соотношения для определения постоянных c_1 и γ_1 :

$$\begin{aligned} 3\varepsilon_\gamma(c_0)\gamma_1 + \frac{b^2}{c_0-a} \varepsilon_c(c_0)c_1 &= -\gamma_0\varepsilon(c_0) \\ 3 \int_a^{c_0} \varepsilon_\gamma(x) dx \gamma_1 + \frac{b^2}{c_0-a} \left[\int_a^{c_0} \varepsilon_c(x) dx + \frac{\pi b^3}{2} \right] c_1 &= -\gamma_0 \int_a^{c_0} \varepsilon(x) dx \end{aligned} \quad (5.7)$$

Решив последовательно системы (5.5) и (5.7), вычислим постоянные c_0 , γ_0 , c_1 и γ_1 . Далее найдем постоянные

$$\begin{aligned} d_{00} &= 3\pi\gamma_0, \quad d_{01} = 4\gamma_1/\pi, \quad d_{10} = \alpha_1/(\sqrt{3}\pi b) \\ d_{20} &= \frac{3}{2\sqrt{3}\pi b^2} \left[\frac{b^2 - c_0^2}{b^2} \alpha_1 + \frac{a\gamma_0}{a^2 + b^2} - c_0 \right] \\ d_{11} &= -\frac{4}{3\pi^2 \sqrt{3}\pi b^3} \left\{ \gamma_1 \alpha_2 + \frac{2c_1}{c_0 - a} \left[\frac{b^2 \alpha_1}{2} + (ac_0 - \gamma_0) \alpha_2 - ab\beta_1 \right] + \gamma_0 \int_{ab^{-1}}^{c_0b^{-1}} \frac{Q(t) dt}{(1+t^2)^3} \right\} \\ d_{21} &= \frac{4}{\pi^2 \sqrt{3}\pi b^3} \left\{ 2\gamma_1 \left(\frac{\gamma_0 \alpha_3}{b^2} - \alpha_2 \right) + \frac{c_1}{c_0 - a} \left[\frac{4\gamma_0(ac_0 - \gamma_0)\alpha_3}{b^2} + (5\gamma_0 - 2ac_0)\alpha_2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - b^2 \alpha_1 + 2ab \left(\beta_1 - \frac{2\gamma_0 \beta_2}{b^2} \right) \right] + \gamma_0 \int_{ab^{-1}}^{c_0b^{-1}} \frac{Q(t)}{(1+t^2)^2} \left[\frac{2\gamma_0}{b^2(1+t^2)} - 1 \right] dt \right\} \\ \alpha_i &= A_i(c_0/b), \quad \beta_i = B_i(c_0/b) \quad (i=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (5.8)$$

В табл. 1 приведены результаты расчета величин c_0 , d_{00} , d_{10} , d_{20} , $q_{0 \max} = \max_{a \leq x \leq c_0} q_0(x)$ и $H_{0 \min} = \min_{a \leq x \leq c_0} H_0(x)$ в зависимости от значений постоянной a .

Из приведенных в табл. 1 данных следует, что по мере увеличения количества смазки (параметра $|a|$) в легко нагруженном контакте толщина слоя смазки и сила трения качения растут, максимальное давление убывает, а сила трения скольжения сначала убывает (приблизительно до $a = -1$), а затем медленно возрастает до предельного значения с коэффициентом $d_{10} = 1,8$.

В табл. 2 для случая $\psi(q) = \lambda q^\alpha$ и $\alpha = 0,8$ приведены результаты вычисления величин c_1 , d_{01} , d_{11} и d_{21} при различных значениях постоянных a и λ .

Из табл. 2 и формул (2.6) и (2.15) следует, что при любом $a < 0$ в легко нагруженном контакте шероховатых поверхностей протяженность области контакта $s-a$ (см. значения c_1) и толщина слоя смазки h_e (см. значения d_{01}) больше, а сила трения качения F_R (см. значения d_{21}) меньше соответствующих величин в легко нагруженном гладком контакте. Сила трения скольжения F_s (см. значения d_{11}) в легко нагруженном контакте шероховатых поверхностей при $a \geq -0,164$ больше, а при $a \leq -0,554$ меньше, чем F_s , вычисленная для гладкого контакта.

Таблица 1

α	c_0	d_{00}	d_{10}	d_{20}	φ_{\max}	H_{\min}
-0,031	0,014	0,038	3,601	0,037	63,850	0,951
-0,164	0,059	0,286	2,245	0,187	13,181	0,886
-0,554	0,123	0,867	1,792	0,529	4,543	0,835
-0,954	0,148	1,158	1,725	0,757	3,686	0,823
-5	0,170	1,481	1,767	1,285	2,762	0,816
-10	0,171	1,495	1,791	1,375	2,713	0,816

Таблица 2

α	λ	c_1	d_{01}	d_{11}	d_{21}
-0,031	0	0,144	0,012	0,4125	-0,0317
	1	2,584	0,242	5,5270	-0,6048
-0,164	0	0,254	0,044	0,0470	-0,0524
	1	1,550	0,287	0,1701	-0,3381
-0,554	0	0,346	0,104	-0,0074	-0,0617
	1	1,261	0,385	-0,0351	-0,2404
-0,954	0	0,366	0,129	-0,0136	-0,0586
	1	1,189	0,424	-0,0442	-0,2078
-5	0	0,368	0,146	-0,0143	-0,0481
	1	1,096	0,446	-0,0413	-0,1657
-10	0	0,369	0,147	-0,0144	-0,0474
	1	1,090	0,448	-0,0406	-0,1627

Увеличение толщины слоя смазки в случае шероховатого контакта по сравнению с гладким, по-видимому, объясняется вкладом в толщину слоя фиктивной высоты микронеровностей порядка λ/V .

Из табл. 2 также следует, что при увеличении количества смазки (параметра $|\alpha|$), приращения величин протяженности контакта, толщины слоя, силы трения скольжения для гладких тел и силы трения качения для шероховатых тел изменяются монотонно, а приращения силы трения скольжения для шероховатых тел и силы трения качения для гладких тел изменяются немонотонным образом. При $\alpha \geq -0,164$ характер зависимости величин h_s , F_s и F_R от приведенного модуля упругости E' соответствует закономерностям, установленным для случая ньютоновской жидкости в условиях тяжело нагруженного контакта [11].

Автор благодарен Н. Х. Арутюняну и В. М. Александрову за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
2. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
3. Капица П. Л. Гидродинамическая теория смазки при качении.— Ж. техн. физ., 1955, т. 25, вып. 4, с. 747.
4. Демкин Н. В. Фактическая площадь касания твердых поверхностей. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 111 с.
5. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неьютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
6. Коднир Д. С. Контактная гидродинамика смазки деталей машин. М.: Машиностроение, 1976. 303 с.

7. Кудиш И. И. Асимптотический анализ плоской неизотермической упругодинамической задачи для тяжело нагруженного контакта качения.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1978, т. 31, № 6, с. 16.
8. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, с. 901.
9. Шульман З. П. Конвективный теплоперенос реологически сложных жидкостей. М.: Энергия, 1975. 351 с.
10. Кудиш И. И. Определение толщины слоя смазки в условиях масляного голодания для линейного контакта.— Тр. Всес. н.-и. конструкт.-технол. ин-та подшипн. пром-сти, М., 1977, № 1(91), с. 10.
11. Александров В. М., Кудиш И. И. Задача контактно-гидродинамической теории смазки для вязкой жидкости со сложной реологией.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4, с. 78.

Москва

Поступила в редакцию
5.VII.1979