МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1981

УДК 539.3:534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ НА ОСНОВЕ СХЕМЫ С МИНИМАЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

МАЛЫШЕВ А. П.

Реакция конструкций на импульсное воздействие представляет собой результат взаимодействия волн возмущения, которые в процессе распространения отражаются от граничных контуров, свободных поверхностей и других неоднородностей конструкции. При этом на фронтах волн могут иметь место разрывы как кинематических, так и силовых параметров волнового процесса.

В [1, 2] для расчета волновых процессов был предложен эффективный метод сеток с предварительным аналитическим выделением разрывов, имеющий широкое применение для решения широкого класса динамических проблем (см., например, [3, 4]). Вместе с тем, если имеется значительное количество границ связности, что характерно для составных оболочечных конструкций, и волновой процесс рассматривается в течение значительного отрезка времени, когда наблюдаются многократные отражения элементарных волн, анализируемая волновая картина принимает весьма сложный вид. Необходимость следить за положением фронтов элементарных волн при использовании указанного метода приводит в этих случаях к быстрому усложнению логической схемы алгоритма, увеличению потребного объема машинной памяти и времени счета. Поэтому для анализа подобных волновых процессов более удобным оказывается использование так называемых методов сквозного счета [5–7], которые позволяют не следить в ходе расчета за положением элементарных волн возмущений. Однако, если $c_i\Delta t<\Delta\alpha$, где c_i – скорость распространения возмущения, схема [5], оставаясь монотонной, проявляет значительную сеточную вязкость, которая может существенно исказить решение – особенно при рассмотрении переходного процесса большой длительности. Другие схемы сквозного счета в этом случае описывают ложные осцилляции решения в окрестности разрывов и в областях с высокими градиентами решения.

Тем не менее одномерный волновой процесс в упругой изотропной оболочке, согласно модели Тимошенко, характеризуется двумя скоростями распространения возмущений [8]: c_1 – для продольных и изгибных возмущений и $c_s=k_s((1-\mu)/2)^{1/2}$ – для сдвиговых, k_s – коэффициент сдвига, μ – коэффициент Пуассона. В анизотропной оболочке одномерный волновой процесс характеризуется уже тремя скоростями. Даже если воспользоваться сеткой $c_m\Delta t=\Delta\alpha$ (c_m – максимальная скорость распространения возмущений), которая согласно условию Куранта, Фридрихса и Леви [6] выводит разностную схему на границу устойчивости, то для остальных скоростей $c_i\Delta t<\Delta\alpha$ и эта часть решения может быть существенно искажена в процессе расчета.

В данной работе используется модификация схемы сквозного счета, обеспечивающая снижение сеточной вязкости и ложных осцилляций путем минимизации дисперсии решения. Эффективность схемы исследуется на модельных задачах для цилиндрической оболочки и оболочечной конструкции.

1. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$N'-a_1U^{\boldsymbol{\cdot}}=0,\quad N^{\boldsymbol{\cdot}}-a_2U'=0,\quad U(0,\alpha)=G_1(\alpha)$$
$$N(0,\alpha)=G_2(\alpha),\quad (\ldots)'=\partial(\ldots)/\partial\alpha,\quad (\ldots)^{\boldsymbol{\cdot}}=\partial(\ldots)/\partial t \tag{1.1}$$

Решение ищется на равномерной сетке с шагами $\Delta\alpha$ и Δt. Узлы на промежуточных временных слоях $t=(k-{}^1/_2)\Delta t$ $(k=1, 2,\ldots)$ имеют координаты $\alpha_n=n\Delta\alpha$ $(n=\ldots, -1, 0, 1,\ldots)$. Узлы на основных слоях $t=k\Delta t$ имеют координаты $\alpha_{n-1/2}={}^1/_2(\alpha_{n-1}+\alpha_n)$. Для сеточных функций Ф используются обозначения: $\Phi_{n-1/2}$ — в узлах основного слоя $t=t_0$, Φ_n — в узлах промежуточного слоя $t=t_0+{}^1/_2\Delta t$, $\Phi^{n-1/2}$ — в узлах слоя $t=t_0+\Delta t$.

Значения функций на следующем основном слое определяются расчетными соотношениями типа «крест»

$$U^{n-1/2}=U_{n-1/2}+k_\alpha a_1^{-1}c^{-1}(N_n-N_{n-1}), \qquad N^{n-1/2}=N_{n-1/2}+ \\ +a_2c^{-1}k_\alpha(U_n-U_{n-1}), \qquad k_\alpha=c\Delta t/\Delta\alpha, \qquad c=(a_2/a_1)^{1/2} \tag{1.2}$$

Для вычисления функций в узлах промежуточного слоя используются соотношения на характеристиках, пересекающихся в этих узлах

$$N_n\pm a_1cU_n=(N\pm a_1cU)_\pm \tag{1.3}$$

(плюс в индексе указывает, что функция определена в точке пересечения α_+ соответствующей характеристики со слоем $t=t_0$ справа от α_n; минус — указывает на аналогичную точку α_- слева от α_n). Для вычисления параметров в этих точках воспользуемся интерполяцией функций по их значениям в соседних узлах

$$f_\pm=f_{n\pm1/2}+x(f_{n\mp1/2}-f_{n\pm1/2})+y(f_{n\mp1/2}-2f_{n\pm1/2}+f_{n\pm3/2}) \tag{1.4}$$

После подстановки (1.4) и (1.3) в (1.2) выражение для U на слое $t=$ $=t_0+\Delta t$ принимает вид

$$U^{n-1/2}=U_{n-1/2}+k_\alpha b^{-1}[{}^1/_2(N_{n+1/2}-N_{n-3/2})+({}^1/_2-x)b(U_{n+1/2}-2U_{n-1/2}+ \\ +U_{n-3/2})+{}^1/_2y(N_{n+3/2}-2N_{n+1/2}+2N_{n-3/2}-N_{n-5/2})+{}^1/_2by(U_{n+3/2}- \\ -4U_{n+1/2}+6U_{n-1/2}-4U_{n-3/2}+U_{n-5/2})], \qquad b=ca_1 \tag{1.5}$$

Если N и U — достаточно гладкие функции, то с учетом формул численного дифференцирования [9] и связи производных в уравнениях (1.1) при $\Delta t/\Delta\alpha=\text{const}$ и (1.5) будем иметь

$$U^{n-1/2}=U_{n-1/2}+\Delta t\dot U_{n-1/2}+({}^1/_2-x)k_\alpha a_1a_2^{-1}\Delta\alpha^2\ddot U_{n-1/2}+R \tag{1.6}$$

$$R={}^1/_2y[\Delta tb^{-1}O(\Delta\alpha^2)+\Delta t\Delta\alpha^3\overset{\mathrm{IV}}{U}_{n-1/2}]+O(\Delta\alpha^3)=(y+1)O(\Delta t^3)$$

Результаты для N аналогичны и для краткости здесь не приводятся.

Полученное двухпараметрическое семейство разностных схем включает в себя, в частности, схему Годунова [5] первого порядка точности: $x=y=0$ (схема 1) и схему Лакса — Вендроффа [6] второго порядка точности: $y=0$, $x={}^1/_2(1-k_\alpha)$ (схема 2).

В схеме работы [10] также используется линейная интерполяция ($x\neq0$, $y=0$), однако коэффициент при x вычисляется для разных узлов по различным зависимостям, которые подбираются таким образом, чтобы обеспечить минимальную особенность градиента решения. Эта схема имеет, вообще говоря, первый порядок точности.

Пусть

$$x={}^1/_2(1-k_\alpha), \qquad y=Ax(x-1)/2=-A(1-k_\alpha^2)/8 \tag{1.7}$$

При $A=1$ эти значения x и y соответствуют параболической интерполяции по формуле Гаусса для интерполирования вперед [9].

Для определенности примем $a_1=a_2=1$, причем

$$G_1(\alpha)=1, \quad G_2(\alpha)=-1 \quad (n-{}^1/_2<0) \\ G_1(\alpha)=G_2(\alpha)=0 \quad (n-{}^1/_2>0) \tag{1.8}$$

В качестве меры дисперсии решения используется величина

$$\sigma=\left(\sum_{n=-K}^{K}(U^{n-1/2}-U_0)^2\right)^{1/2} \tag{1.9}$$

Здесь $U_0=U_0(\alpha_{n-1/2}, t)$ — известное точное решение задачи (1.1) при начальных условиях (1.8). Величина K выбирается достаточно большой, чтобы обеспечить сходимость суммы (1.9).

На фиг. 1, *а* показана зависимость $\sigma(A, k_\alpha)$ при $\Delta\alpha=\mathrm{const}$ в момент времени, когда фронт волны возмущения пройдет расстояние $\alpha=6\Delta\alpha$. Видно, что дисперсия достигает минимума при $A=A_0(k_\alpha)$. На фиг. 1, *б* штриховой линией показана дисперсия решения для схемы 1, штрихпунктирной — для $A=A_0$. Значение $A=0$ соответствует схеме 2.

На фиг. 2 показаны расчетные профили волны U, распространяющейся слева направо, которые соответствуют различным значениям A. Пунктирная линия соответствует схеме 1. С увеличением $A\geqslant0$ возрастают искажения решения перед фронтом волны и уменьшаются его осцилляции за фронтом. Увеличение градиента решения на фронте волны с ростом A свидетельствует об уменьшении сеточной вязкости схемы. При $A=1$ искажения решения малы и близки к симметричным относительно фронта волны.

Таким образом, применение параболической аппроксимации (1.4), (1.7) на предыдущем основном временном слое, хотя и не повышает порядок точности схемы выше второго, но при $A=A_0$ минимизирует дисперсию разностного решения относительно точного решения. При изменении A на отрезке $1\leqslant A\leqslant A_0$, как видно из приведенных на фиг. 1, *б* результатов, дисперсия меняется незначительно. Поэтому можно принять $A=1$ для всех значений k_α (схема 3). Методом Фурье несложно показать, что необходимым условием устойчивости схемы 3 является условие Куранта, Фридрихса и Леви: $k_\alpha\leqslant1$. Во всех приведенных расчетах соблюдение этого условия обеспечивало устойчивость схемы.

При рассмотрении краевых задач для узлов, примыкающих к границам, вместо (1.4) можно применить интерполяционную формулу, в которой используются нецентральные разности

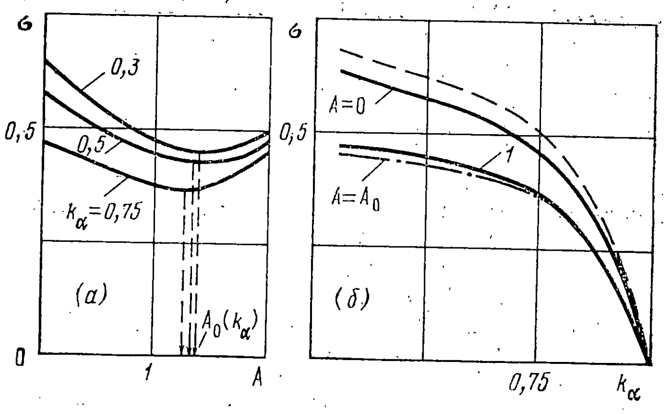
$$f_\pm=f_{n\pm1/2}+x(f_{n\pm1/2}-f_{n\pm3/2})+y(f_{n\pm1/2}-2f_{n\pm3/2}+f_{n\pm5/2}) \qquad (1.10)$$

где x, y определяются выражениями (1.7) и $A=1$.

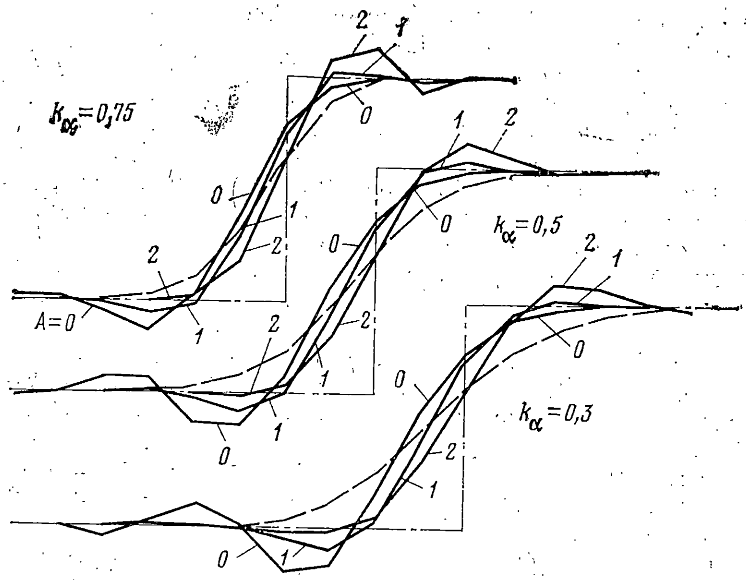
2. Осесимметричное движение однородных оболочек вращения с учетом сдвига и инерции поворота сечений описывается системой уравнений [8]:

$$\begin{gathered}
hU^\bullet=N_1'+B_1(N_1-N_2)+TR_1^{-1}, \quad hW^\bullet=T'-N_1R_1-N_2R_2+\\
+B_1T+P_3, \quad h^3\Phi^\bullet=M_1'+B_1(M_1-M_2)+\gamma Q_1\\
U=u^\bullet, \quad W=w^\bullet, \quad \Phi=\varphi^\bullet, \quad B_1=B'/B, \quad T=N_1\theta+Q_1\\
\theta=w'-uR_1^{-1}, \quad \alpha=\alpha^\circ/A_0, \quad t=t^\circ c_0/A_0, \quad u=u^\circ/A_0\\
w=w^\circ/A_0, \quad B=B^\circ/A_0, \quad h=h^\circ/h_0, \quad N_j=N_j^\circ/b_0\\
M_j=M_j^\circ\gamma/(b_0m_0), \quad R_j=R_j^\circ/A_0 \quad (j=1,2)\\
\gamma=12(A_0/h_0)^2, \quad Q_1=Q_1^\circ/b_0, \quad P_3=P_3^\circ b_0/A_0\\
c_0=(b_0/m_0)^{1/2}, \quad m_0=\rho h_0, \quad b_0=Eh_0/(1-\mu^2)
\end{gathered} \qquad (2.1)$$

Здесь E, μ, ρ — соответственно модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала, N_j° и M_j° — усилия и изгибающие моменты, причем $j=1$ соответствует меридиональному направлению, $j=2$ — окружному, Q_1° — перерезывающая сила, P_3° — нормальное давление, h° — толщина оболочки, B° — радиус направляющей, R_1° и R_2° — главные радиусы кривизны срединной поверхности, t° — время, h_0 — характерная толщина, A_0 — коэффициент Ламэ для координаты α.



Фиг. 1



Фиг. 2

Силовые факторы связаны с перемещениями срединной поверхности соотношениями

$$N_1=h(\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2),\quad M_1=h^3(\varkappa_1+\mu\varkappa_2)\quad (1\rightleftarrows 2)$$

$$Q_1=g\varepsilon_{1z},\quad g=k_s^2h(1-\mu)/2,\quad \varepsilon_1=u'+wR_1^{-1}+\theta^2 \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_2=B_1u+wR_2^{-1},\quad \varkappa_1=\varphi',\quad \varkappa_2=B_1\varphi,\quad \varepsilon_{1z}=\theta-\varphi,\quad k_s^2={}^5/_6$$

Параметры переходного процесса на слое $t=t_0+\Delta t$ определяются системой уравнений

$$N_j^*=l_{j4}U_*^*+l_{j5}W_*^*+Y_j,\quad M_j^*=l_{j6}\Phi_*^*+Y_{j+2}$$

$$Q_1^*=l_{54}U_*^*+l_{56}\Phi_*^*+Y_5\quad (j=1,\ 2)$$

$$hU^*=B_t(N_{1*}^*-N_{2*}^*)-k_{t1}T_*^*+Y_6$$

$$hW^*=B_tT_*^*-k_{t1}N_{1*}^*-k_{t2}N_{2*}^*+Y_7 \tag{2.3}$$

$$h^3\Phi^*=B_t(M_{1*}^*-M_{2*}^*)+\gamma_tQ_{1*}^*+Y_8$$

$$l_{14}=h(\mu B_t-\theta_*k_{t1}),\quad l_{24}=h(B_t-\mu\theta_*k_{t1}),\quad l_{15}=h(k_{t1}+\mu k_{t2})$$

$$l_{25}=h(k_{t2}+\mu k_{t1}),\quad l_{j6}=h^2l_{j4},\quad l_{54}=-gk_{t1},\quad l_{56}=-g\Delta t$$

$$B_t=B_1\Delta t,\quad k_{t1}=\Delta t/R_1,\quad k_{t2}=\Delta t/R_2,\quad \gamma_t=\gamma\Delta t$$

$$(\ldots)_\Delta=[(\ldots)_n-(\ldots)_{n-1}]\Delta t/\Delta\alpha,\quad (\ldots)_*^*={}^1\!/_2[(\ldots)^*+(\ldots)_*],\quad Y_1=h(U_\Delta+\theta_* W_\Delta)+N_{1*}$$
$$Y_2=\mu h(U_\Delta+\theta_* W_\Delta)+N_{2*},\quad Y_3=h^3\Phi_\Delta+M_{1*}$$
$$Y_4=\mu h^3\Phi_\Delta+M_{2*},\quad Y_5=gW_\Delta+Q_{1*},\quad Y_6=N_{1\Delta}+hU_*$$
$$Y_7=T_\Delta+hW_*+P_{3*}{}^*\Delta t,\quad Y_8=M_{1\Delta}+h^3\Phi_*$$

Индекс $(n-{}^1\!/_2)$ для краткости заменен на $(*)$.

Параметры на промежуточном слое $t=t_0+{}^1\!/_2\Delta t$ вычисляются при помощи соотношений на характеристиках линеаризованной системы (2.1), (2.2):

$$N_{1n}+f_{1r}U_n=F_{1r},\quad T_n+f_{2r}W_n=F_{2r},\quad M_{1n}+f_{3r}\Phi_n=F_{3r}$$
$$f_{1r}=rh,\quad f_{2r}=c_s rh,\quad f_{3r}=rh^3,\quad c_s=k_s((1-\mu)/2)^{1/2}$$
$$r=-\operatorname{sign}(\operatorname{tg}\eta),\quad F_{1r}=\{N_1+f_{1r}U+{}^1\!/_2[l_{14}U+l_{15}W+r(B_t(N_1-N_2)-Tk_{t1})]\}_r,\ldots \tag{2.4}$$

Здесь η — угол наклона характеристики в плоскости αt.

Рассмотрим волновой процесс в полубесконечной цилиндрической оболочке, левому торцу $\alpha=0$ которой сообщается скорость $U_0=10^{-3}H(t)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда. Остальные граничные условия на этом торце: $W=0$, $\Phi=0$. В качестве A_0 принимается радиус срединной поверхности, $A_0/h^\circ=50$, $\mu=0{,}33$. Для разностной сетки выбрано $\Delta t/\Delta\alpha=0{,}75$.

Задача о торцевом ударе цилиндрической оболочки исследовалась, в частности, в [11, 12] аналитически, в [13] – методом характеристик, в [14] – с помощью схемы 1. Подробно эта задача исследована в [3, 4].

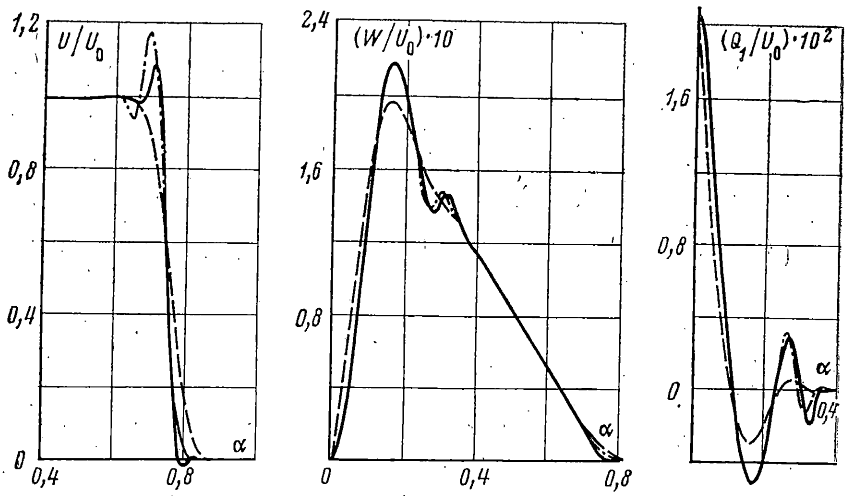
На фиг. 3 приведены профили волн U, W и Q_1 в момент времени, когда фронт возмущения, распространяющегося со скоростью продольных волн, пройдет расстояние $\alpha=0{,}75$. Сплошной линией показано решение, полученное по схеме 3, пунктирной – по схеме 1, штрихпунктирной – по схеме 2.

Характер сходимости виден из результатов, приведенных на фиг. 4. Профили на фиг. 4, *а* рассчитаны по схеме 1, на фиг. 4, *б* – по схеме 2, на фиг. 4, *в* – по схеме 3. Сплошные линии соответствуют $\Delta t=0{,}01$, пунктирные – 0,02, штрихпунктирные – 0,04.

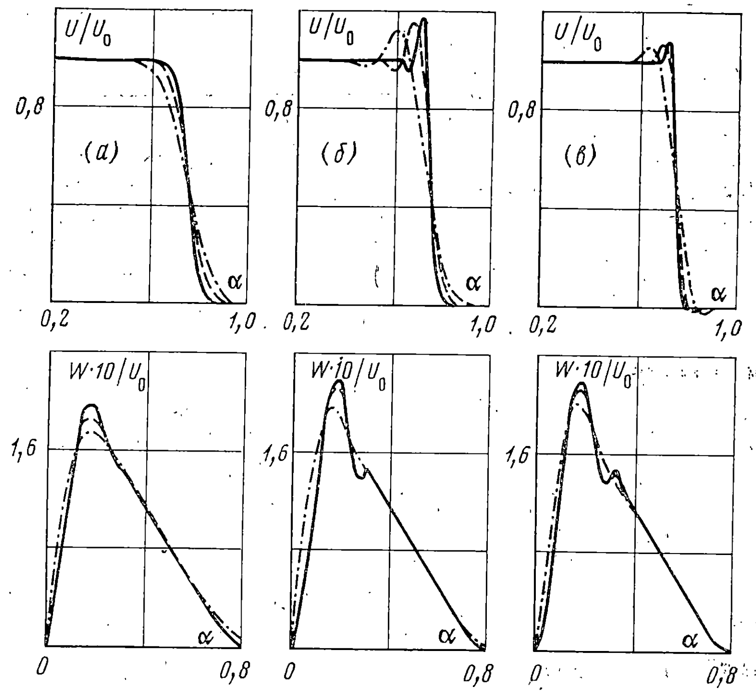
Анализ результатов позволяет заключить, что схема 1, проявляя большую сеточную вязкость, приводит к сглаживанию решения, занижая максимальное значение W на 10% и смазывая характерные детали изменения W за фронтом, распространяющимся со скоростью c_s. Это детали хорошо выявляют расчеты по двум другим схемам уже при $\Delta t=0{,}02$. Отметим, что сходимость для W при расчете по схеме 1 с $\Delta t=0{,}01$ такая же, как по схемам 2 и 3 с $\Delta t=0{,}04$.

Схема 3 по сравнению со схемой 2 более, чем вдвое уменьшает амплитуду ложных осцилляций U в окрестности разрыва и вдвое сужает область, где они наблюдаются.

На фиг. 5 показано изменение по времени осевой деформации ε_1 в точке $\alpha=0{,}5$ на внутренней поверхности цилиндрической оболочки, правый торец $\alpha=1{,}5$ которой свободен: $N_1=T=0$, $M_1=0$. Условия нагружения, геометрические параметры оболочки и $\Delta t/\Delta\alpha$ такие же, как и в предыдущей задаче. Пунктирная линия соответствует результату, полученному по схеме 1, сплошная – по схеме 3. Из сравнения результатов видно, что схема 3 практически не приводит к сглаживанию и затуханию решения за счет сеточной вязкости, причем ложные возмущения в моменты прихода фронтального разрыва незначительны. Интересно отметить, что даже в такой короткой и относительно толстостенной оболочке характер изменения осевых деформаций может быть удовлетворительно описан стержневой моделью только на протяжении времени, за которое возмущение, распространяющееся со скоростью продольных волн, пробегает расстоя-



Фиг. 3



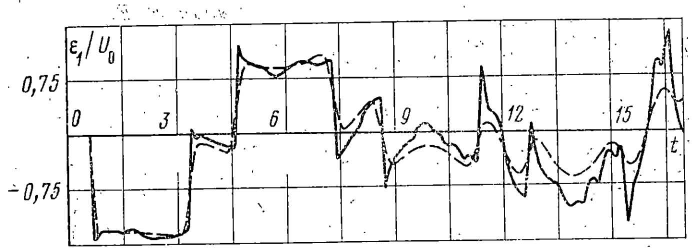
Фиг. 4

ние, равное четырем длинам оболочки. Далее за счет взаимного наложения трех групп возмущений деформация ε_1 принимает сложный, оболочечный характер.

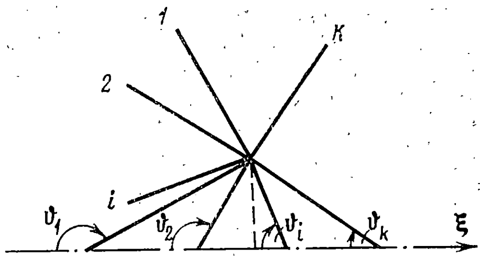
3. Использование соотношений на характеристиках дает, как известно, удобную возможность корректной постановки граничных условий [15], в том числе и на границах сложного вида.

Рассмотрим, например, стык K оболочек (фиг. 6). Условия совместности перемещений в плоскости стыка имеют вид

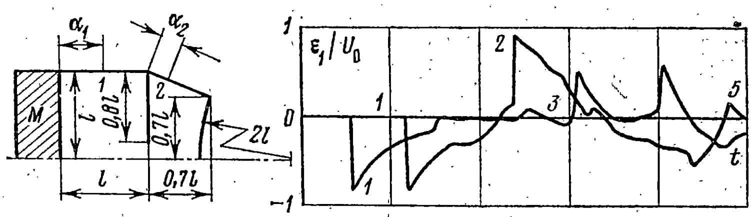
$$L_K = D_{Ki} L_i, \qquad \Phi^K = \Phi^i \quad {\scriptstyle (i=1,\,2,\,\ldots,\,K-1)} \tag{3.1}$$



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Условия равновесия стыка

$$R_K = \sum_{i=1}^{K-1} S_{Ki} D_{Ki} R_i, \qquad M_1^K = \sum_{i=1}^{K-1} S_{Ki} M_1^i \tag{3.2}$$

$$D_{ij} = \begin{Vmatrix} \cos\beta_{ij} & -\sin\beta_{ij} \\ \sin\beta_{ij} & \cos\beta_{ij} \end{Vmatrix}, \quad L_i = \begin{Vmatrix} U^i \\ W^i \end{Vmatrix}, \quad R_i = \begin{Vmatrix} N_1^i \\ T^i \end{Vmatrix}$$

$$\beta_{ij} = \vartheta_i - \vartheta_j, \quad S_{ij} = -r^i r^j$$

Верхний индекс указывает, к какой оболочке относится параметр, r^i определяется так же, как в (2.4).

Вместе с соотношениями на характеристиках (2.4) уравнения (3.1), (3.2) образуют систему $6K$ уравнений для определения $6K$ неизвестных на промежуточном слое: N_1^i, U^i, T^i, W^i, M_1^i, Φ^i ($i=1, \ldots, K$).

Вообще, на любой границе многосвязной оболочечной конструкции всегда имеется k кинематических условий и $m/2-k$ статических условий, где m — число неизвестных параметров в граничных узлах на промежуточном слое. Если учесть $m/2$ соотношений на характеристиках, то получим систему m уравнений для m неизвестных.

На фиг. 7 показаны результаты расчета деформаций в точках 1 (кривая *1*) и 2 (кривая *2*) на внутренней поверхности составной оболочечной конструкции. Расчет проводился по схеме 3, при этом принималось: $A_0 = l$, $A_0/h_0=100$, $\Delta\alpha=\Delta t=0{,}02$, $M=0{,}5M_0$, где M_0 — масса цилиндрической оболочки, $\alpha_1=0{,}5$, $\alpha_2=0{,}2$. Толщина всех оболочек h_0, толщина пластины $h_1=h_0/2$. Число узлов вдоль образующей на цилиндрической оболочке — 50, на конической — 38, на сферической — 35, на пластине вдоль радиуса — 39. Переходный процесс обусловлен тем, что масса в момент времени $t=0$ имеет начальную скорость $U_0=10^{-3}$. Считается, что деформации в конструкции при $t=0$ отсутствуют.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айнола Л. Я., Нигул У. К.* Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек.— Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1965, т. 14, № 1, с. 3—63.
2. *Нигул У. К., Петерсон М.* Алгоритм метода трехмерных сеток для анализа динамических переходных процессов осесимметричной деформации цилиндрической оболочки.— Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1966, т. 15, № 1, с. 31—35.
3. *Nigul U.* Three-dimensional shell theory of axially symmetric transient wave in a semi-infinite cylindrical shell.— Arch. mech. stosowanej, 1967, v. 19, № 6, p. 839—856.
4. *Nigul U.* Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates.— Internat. J. Solids Structures, 1969, v. 5, № 6, p. 607—627.
5. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
6. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418 с.
7. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 172 с.
8. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
9. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1959. 464 с.
10. *Колган В. П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики.— Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 6, с. 68—77.
11. *Bercowitz H. M.* Longitudinal impact of a semi-infinity elastic cylindrical shell.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1963, v. 30, № 3, p. 347—354.
12. *Малышев А. П.* Волновые процессы в упругой тонкостенной цилиндрической оболочке при внезапном приложении силы к ее торцу.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 2, с. 138—141.
13. *Chou P. C.* Analysis of axisymmetrical motions of cylindrical shells by the method of characteristics.— AIAA Journal, 1968, v. 6, № 8, p. 1492—1497.
14. *Малышев А. П., Паничкин В. И.* Нелинейные волновые процессы в оболочках вращения.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4, с. 175—178.
15. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 416 с.

Москва

Поступила в редакцию 19.VII.1979