

УДК 539.3

ОДНОМЕРНЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

АРТЮХИН Ю. П.

Предлагается способ получения точного решения одномерных контактных задач теории оболочек в постановке, учитывающей поперечную деформацию и приводящей к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода [1]. (Принимается во внимание взаимодействие оболочек только по нормали.) Метод решения основывается на сведении решения интегрального уравнения к решению соответствующей краевой задачи¹. Другой способ получения точного решения в этой постановке указан в [2]. Обсуждается вопрос об особенностях постановки контактных задач теории оболочек в рамках гипотез Кирхгофа — Лява и сдвиговой модели С. П. Тимошенко. Приводятся примеры решения одномерных контактных задач взаимодействия цилиндрической оболочки с жестким бандажом (осесимметрическая задача) и взаимодействия цилиндрической оболочки по дуге с двумя штампами (плоская задача).

Получены простые формулы, определяющие контактные напряжения и границу области контакта. В последней задаче дается сравнение полученных результатов с решением, базирующимся на интегрировании уравнений теории упругости.

1. Постановка задачи. Пусть две оболочки, нагруженные известными нагрузками и соответствующим образом закрепленные по краям, взаимодействуют по области $a \leq x \leq b$. Задача состоит в определении контактного напряжения $\sigma(x)$ и границы области контакта, если она неизвестна. Будем предполагать, что для обеих оболочек удастся построить функцию влияния, одна из которых может быть обобщенной (определяемой с точностью до жесткого смещения при наличии самоуравновешенной нагрузки). Выполнив условия контакта по равенству прогибов контактируемых объектов, получим следующее интегральное уравнение:

$$\int_a^b K_0(x, \xi) \sigma(\xi) d\xi = f(x), \quad x \in (a, b) \quad (1.1)$$

где ядро уравнения — сумма функций влияния, а правая часть $f(x)$ — функция формы объектов и известных внешних нагрузок. В том случае, когда одна из функций влияния является обобщенной, функция $f(x)$ будет содержать постоянные жесткого смещения одного из объектов. Эти постоянные и граница области контакта (если она неизвестна) определяются из дополнительных условий

$$\int_a^b \sigma(\xi) \left\{ \frac{1}{\xi} \right\} d\xi + \left\{ \frac{P}{M} \right\} = 0, \quad \sigma(a) = \sigma(b) = 0 \quad (1.2)$$

где P и M — величины главного вектора и момента контактных напряжений.

Корректность постановки контактных задач теории оболочек зависит от точности построения функций влияния контактируемых объектов. Для тонкостенных элементов наиболее простой и в тоже время достаточно

¹ Артюхин Ю. П. О решении одномерных и осесимметричных контактных задач теории трансверсально-изотропных пластин и оболочек. — В кн.: Смешанные задачи механики деформируемого тела: Тез. докл. Всес. научн. конф. Ростовск. ун-т, 1977, ч. 2, с. 63—64.

строгий способ построения функций влияния состоит в суперпозиции функции влияния, полученной по какой-либо прикладной теории, дающей прогибы элемента в результате изгиба и растяжения, и функции Грина для полупространства (полуплоскости), характеризующей местную деформацию элемента, его сжимаемость в поперечном направлении [3]. Такая постановка задачи использовалась рядом авторов [4-6] и приводит к решению сингулярного интегрального уравнения со слабой особенностью, но не позволяет получить замкнутого решения.

Механизм поперечной деформации оболочек также можно моделировать сжатием тонкой полосы толщиной $h/2$, жестко соединенной с недеформируемым основанием. Причем чем тоньше упругая полоса, тем ближе его механические свойства к свойству упругого винклерского основания [7]. Используя решение для слоя при его малых относительных толщинах

$$W(x) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_a^b H(t) \sigma(\xi) d\xi, \quad t = \frac{2(x-\xi)}{h}$$

$$H(t) = \int_0^\infty \frac{\Phi(u)}{u} \cos ut du, \quad \Phi(u) = \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2u - 4u}{2\kappa \operatorname{ch} 2u + 4u^2 + \kappa^2 + 1}$$

$$\kappa = 3 - 4\nu$$

где E , ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона, получаем прогиб оболочки в результате поперечной деформации

$$W(x) = \pi k \int_a^b \sigma(\xi) d\xi \int_0^\infty \cos ut du = k\sigma(x), \quad k = \frac{(1-\nu^2) Ah}{E}$$

$$A = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Phi(u)}{u} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)^2}, \quad \delta(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos ut du$$

Таким образом, для тонких оболочек уравнение (1.1) переходит в интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varepsilon \sigma(x) + \int_a^b K(x, \xi) \sigma(\xi) d\xi = f(x), \quad x \in (a, b) \quad (1.3)$$

$$\varepsilon = k_1 + k_2, \quad K(x, \xi) = G_1(x, \xi) + G_2(x, \xi)$$

где k_i — коэффициенты, характеризующие обжатие оболочек, $G_r(x, \xi)$ — функции влияния, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$L_1 G_1(x, \xi) = L_3 \delta(x - \xi), \quad L_2 G_2(x, \xi) = L_4 \delta(x - \xi) \quad (1.4)$$

и соответствующим краевым условиям, L_1, L_2 — линейные дифференциальные операторы порядка m и n , L_3, L_4 — дифференциальные операторы порядка $m-2, n-2$ (модель С. П. Тимошенко) или порядка $m-4, n-4$ (модель Кирхгофа — Лява).

Принятие гипотезы недеформируемости нормали ($\varepsilon=0$) приводит к решению математически некорректной задачи. Некорректность проявляется в ряде противоречий: при гладкой форме объектов появляются разрывы на границе контакта в усилиях, моментах и напряжениях контакта; бесконечно малому приращению области контакта в нулевой зоне соответствует конечное приращение внешней силы; невозможность удовлетворить нулевому условию для напряжения на границе контакта для объекта,

не имеющего угловой точки; неограниченное возрастание прижимающей штампа силы, если область контакта занимает всю длину элемента и т. д.

Проведенное исследование [8—10] для плоских тонкостенных элементов показало, что получаемые контактные напряжения при учете обжатия объекта мало отличаются от соответствующих напряжений, вычисляемых по уравнениям теории упругости.

2. Сведение к краевой задаче. Согласно теории Фредгольма, решение уравнения (1.3) может быть записано в виде ряда Неймана, сходимость которого имеет место при областях контакта $(b-a)/h < (h/l)^3$, l — длина объекта. Такие малые области контакта не имеют никакого практического интереса. Поэтому дадим иной способ решения уравнения (1.3), справедливый при произвольных областях контакта и позволяющий записать решение в явном виде.

Пусть первое уравнение (1.4) имеет m фундаментальных решений, линейно-независимых от n фундаментальных решений второго уравнения. Поставим следующие ограничения на операторы L_i и функцию $f(x)$: $L = L_1 L_2 = L_2 L_1$ является самосопряженным дифференциальным выражением, $Lf(x)$ существует

$$LL_0 = L_0L, \quad L_0 \delta(x - \xi) = L_0 \delta(\xi - x) \quad (2.1)$$

$$(L_0 = L_2 L_3 + L_1 L_4)$$

Воздействуя оператором L на интегральное уравнение (1.3), пользуясь свойством коммутации операторов и фильтрующим свойством дельта-функции, приходим к выводу, что искомая функция $\sigma(x)$ должна быть решением дифференциального уравнения

$$\varepsilon L \sigma(x) + L_0 \sigma(x) = Lf(x), \quad x \in (a, b) \quad (2.2)$$

Дифференциальное уравнение (2.2) имеет порядок $s = m + n$. Если же среди фундаментальных решений уравнений (1.4) имеется r совпадающих решений, то порядок оператора L можно понизить на r единиц. Решение интегрального уравнения (1.3) является одним из решений дифференциального уравнения (2.2). Для отбора необходимого решения уравнения (2.2) необходимо сформулировать для него краевые условия. Введем новую функцию $u(x)$, связанную с искомой дифференциальным соотношением

$$L_0 u(\xi) = f(\xi) - \varepsilon \sigma(\xi) \quad (2.3)$$

В силу произвола введенной функции, возникающего при интегрировании выражения (2.3), положим

$$\sigma(\xi) = Lu(\xi) \quad (2.4)$$

на основании которого и равенства (2.3) следует дифференциальное уравнение

$$\varepsilon Lu(x) + L_0 u(x) = f(x) \quad (2.5)$$

Подставляя (2.4) в интеграл (1.3), переставляя оператор L от функции $u(\xi)$ к $K(x, \xi)$ при помощи формулы Грина [11] и пользуясь свойствами (2.4), находим

$$\psi[u(\xi), K(x, \xi)] \Big|_{\xi=a}^{\xi=b} + L_0 \int_a^b u(\xi) \delta(x - \xi) d\xi = L_0 u(x), \quad x \in (a, b) \quad (2.6)$$

$$\psi[u(\xi), K(x, \xi)] = \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{s-i-1} (-1)^j u^{(i)}(\xi) [\alpha_{i+j+1}(\xi) K(x, \xi)]_{\xi}^{(j)},$$

$$L = \sum_{k=0}^s \alpha_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$$

Вследствие равенства

$$L_0 \int_a^b u(\xi) \delta(\xi-x) d\xi = \begin{cases} 0, & x \notin (a, b) \\ L_0 u(x), & x \in (a, b) \end{cases}$$

приводим (2.6) к виду

$$\psi[u(\xi), K(x, \xi)] \Big|_{\xi=a}^{\xi=b} = 0, \quad x \in (a, b) \quad (2.7)$$

Согласно теореме о взаимности перемещений и вследствие самосопряженности операторов L_1, L_2 , функций влияния $G_i(x, \xi)$ являются симметрическими относительно своих аргументов. Следовательно, их можно представить в следующей форме:

$$G_1(x, \xi) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m c_{ik} y_i(\xi) y_k(x), \quad c_{ik} = \lambda_{ik} \quad \text{при } x \leq \xi \quad (2.8)$$

$$G_2(x, \xi) = \sum_{i=m+1}^s \sum_{k=m+1}^s c_{ik} y_i(\xi) y_k(x), \quad c_{ik} = \lambda_{ki} \quad \text{при } x \geq \xi$$

Используя представление (2.8) и требуя выполнения условий контакта при любом $a < x < b$ в силу линейной независимости фундаментальных решений $y_k(x)$ операторов L_1, L_2 , получим s краевых условий

$$\sum_{j=0}^{s-1} B_{ji}(\xi) u^{(j)}(\xi) \Big|_{\xi=a}^{\xi=b} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, s) \quad (2.9)$$

$$B_{ji}(\xi) = \sum_{k=0}^{s-j-1} \sum_{r=1}^s (-1)^k c_{ri} [\alpha_{j+k+1}(\xi) y_r(\xi)]_{\xi}^{(k)}$$

Таким образом, чтобы отыскать контактное напряжение $\sigma(x)$, необходимо решить краевую задачу (2.5), (2.9). Нетрудно показать, что сформулированная краевая задача разрешима и имеет единственное решение. Составим определитель $\det |B_{ji}(\xi)|$ ($j=0, 1, \dots, s-1$; $i=1, 2, \dots, s$) и разложим его на сумму определителей, из которых выберем следующий: оставим в первой строке члены для $k=s-1$, во второй строке — $k=s-2$ и т. д. (для s строки $k=0$). В каждом столбце оставим члены с индексом r , соответствующим номеру столбца. Выбранный таким способом определитель с точностью до множителя будет равен $\det |y_i^{(j)}(\xi)|$ ($j=0, 1, \dots, s-1$; $i=1, 2, \dots, s$), который не может равняться нулю как определитель Вронского системы линейно-независимых решений. Это доказывает линейную независимость краевых условий. Однородная краевая задача при $f(x)=0$ имеет только тривиальное решение. Следовательно, краевая задача (2.5), (2.9) разрешима и имеет единственное решение.

Рассмотрим ряд следствий из полученного результата. При решении контактных задач теории оболочек с использованием гипотез Кирхгофа — Лива ($\varepsilon=0$) порядок дифференциального уравнения понижается на четыре единицы при прежних s краевых условиях (2.9). Краевая задача в классе непрерывных функций становится неразрешимой ввиду указанного выше несоответствия. Недостаток произвола в решении необходимо компенсировать введением обобщенных функций — четырех неизвестных величин $R_a \delta(x-a)$, $R_b \delta(x-b)$, $M_a \delta'(x-a)$, $M_b \delta'(x-b)$ на границе области

контакта. Использование уточненной теории типа С. П. Тимошенко² повышает порядок дифференциального оператора L_0 на две единицы. Поэтому для разрешимости краевой задачи в этом случае достаточно допустить в решении две сосредоточенные краевые силы. Если область контакта заранее неизвестна, то два дополнительных параметра, определяющих границу области контакта, позволяют решать краевую задачу при введении двух граничных сосредоточенных сил (с использованием гипотез Кирхгофа — Лява) или при отсутствии таковых (по уточненной теории с учетом поперечного сдвига), но в ущерб условию равенства нулю контактных напряжений на границе.

Предложенный способ решения может быть применен для решения двумерных контактных задач, если существует интегральное преобразование, приводящее двумерную проблему к одномерной, например двумерный контакт оболочек вращения с круговой областью. Кроме того, этот способ применим в контактных задачах, в которых контактные напряжения определяются на ряде конечных интервалов, входящих в область определения функций влияния. Такие задачи, например, возникают при одностороннем сцеплении элементов, если имеются зоны отрыва.

Проиллюстрируем описанный выше способ определения контактных напряжений в задаче взаимодействия цилиндрической оболочки с жестким телом.

3. Взаимодействие бесконечно длинной цилиндрической оболочки с жесткой втулкой. Пусть цилиндрическая оболочка запрессована с натягом d в жесткую втулку длиной $2a$. Искомое контактное напряжение удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\varepsilon_0 \sigma(x) + \int_{-a}^a G(x, \xi) \sigma(\xi) d\xi = -Dd, \quad |x| < a, \quad (\varepsilon_0 = \varepsilon D) \quad (3.1)$$

в котором ядро $G(x, \xi)$ является решением краевой задачи

$$G^{IV}(x, \xi) + 4\beta^4 G(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad 4\beta^4 = Eh/(R^2 D) \quad (3.2)$$

$$|x| \rightarrow \infty, \quad G^{(i)}(x, \xi) = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

(E, R, D — модуль упругости, радиус и изгибная жесткость цилиндрической оболочки) и имеет вид [23]:

$$G(x, \xi) = \frac{1}{8\beta^3} \exp(-\beta|x-\xi|) [\sin \beta|x-\xi| + \cos \beta(x-\xi)] \quad (3.3)$$

Интегральному уравнению (3.1) соответствует следующая краевая задача:

$$u^{IV}(x) + 4\omega^4 u(x) = -\frac{Dd}{\varepsilon_0}, \quad |x| < a \quad (3.4)$$

$$[u''(\xi)G(x, \xi) - u''(\xi)G'_\xi(x, \xi) + u'(\xi)G''_{\xi\xi}(x, \xi) - u(\xi)G'''_{\xi\xi\xi}(x, \xi)] \Big|_{\xi=-a}^{\xi=a} = 0 \quad (3.5)$$

$$u(x) = -Dd - \varepsilon_0 \sigma(x), \quad 4\omega^4 = 4\beta^4 + \varepsilon_0^{-1}$$

В силу четности искомой функции соотношение (3.5) можно представить в виде суммы и разности функции влияния и ее производных, которые выражаются через две независимые функции

$$\Phi_1(\beta x) = \operatorname{ch} \beta x \cos \beta x, \quad \Phi_2(\beta x) = \operatorname{sh} \beta x \sin \beta x$$

² Решению одномерных контактных задач теории оболочек типа С. П. Тимошенко посвящены работы [9, 12–22].

Требую выполнения (3.5) для любого $|x| < a$, приравняем нулю коэффициенты при линейно-независимых функциях

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{4\beta^3} u'''(a) + \frac{\sin \alpha}{2\beta^2} u''(a) + \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{2\beta} u'(a) - u(a) \cos \alpha &= 0 \\ \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{4\beta^3} u'''(a) - \frac{\cos \alpha}{2\beta^2} u''(a) - \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2\beta} u'(a) - u(a) \sin \alpha &= 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$(\alpha = \beta a)$$

Решая уравнения (3.4) при условиях (3.6), получим

$$u(x) = C_1 \Phi_1(\omega x) + C_2 \Phi_2(\omega x) + A$$

$$C_1 = \frac{2A}{\Delta} [q^2(\Phi_4 - \Phi_3) - 2q\Phi_1 - \Phi_3 - \Phi_4] \quad (3.7)$$

$$C_2 = -\frac{2A}{\Delta} [q^2(\Phi_4 + \Phi_3) + 2q\Phi_2 - \Phi_3 + \Phi_4]$$

$$\Delta = (\text{sh } 2\omega a + \sin 2\omega a) q^4 + 2(\text{ch } 2\omega a - \cos 2\omega a) q^3 +$$

$$+ 2(\text{sh } 2\omega a - \sin 2\omega a) q^2 + 2(\text{ch } 2\omega a + \cos 2\omega a) q + \text{sh } 2\omega a + \sin 2\omega a$$

$$\Phi_3(x) = \text{sh } x \cos x, \quad \Phi_4(x) = \text{ch } x \sin x, \quad \Phi_i = \Phi_i(\omega a) \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

$$A = -Dd/(4\varepsilon_0 \omega^4), \quad q = \omega/\beta \sim \sqrt{R/h}$$

При областях контакта $a > 5h$ для тонких оболочек формулу (3.7) можно упростить, пренебрегая членами порядка q^{-2} по сравнению с единицей

$$\sigma(x) = \frac{d}{\varepsilon q^2} \left\{ \exp[-\omega(a-x)] \left[\frac{\sin \omega(a-x)}{1+2q^{-1}} - \cos \omega(a-x) \right] - q^{-2} \right\} \quad (x \geq 0) \quad (3.8)$$

Приведенные формулы (3.7), (3.8) справедливы при безотрывном контакте (предполагается, что оболочка приклеена ко втулке). Расчеты показывают, что безотрывный контакт ($\sigma(x) < 0$) в неприклеенной оболочке невозможен. При малых областях контакта $a \sim 2h$ середина оболочки отходит от втулки. Средняя часть оболочки загружается небольшим контактным давлением лишь при увеличении длины втулки до $a > 5h$, а зона отрыва смещается к краю соединения. Эти выводы полностью согласуются с результатами исследований [24, 25].

Из формулы (3.8) путем предельного перехода несложно получить напряжения контакта в рамках гипотез Кирхгофа — Лява ($\varepsilon \rightarrow 0$).

Введем следующие дельтаобразные последовательности:

$$\delta(x-a) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2\lambda \exp[-\lambda(a-x)] \left[\frac{\sin \lambda(a-x)}{\cos \lambda(a-x)} \right] \quad (3.9)$$

$$\delta_x'(x-a) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2\lambda^2 \exp[-\lambda(a-x)] [\cos \lambda(a-x) - \sin \lambda(a-x)] \quad (3.10)$$

Пользуясь (3.9), получаем

$$\sigma(x) = -\frac{Ehd}{R^2} \left[\frac{Rh}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \delta_x'(x-a) + 1 \right] \quad (x \geq 0)$$

4. Сжатие по дуге цилиндрической оболочки двумя штампами силой P (плоская деформация). Составим интегральное уравнение сопряжения кривизн цилиндрической оболочки после деформации с кривизной штам-

на $1/R_1$:

$$\varepsilon L_\varphi \sigma(\varphi) - R^3 \int_0^\alpha G(\varphi, \xi) \sigma(\xi) d\xi = R^2 H \quad (0 \leq \varphi \leq \alpha) \quad (4.1)$$

$$H = 1/R - 1/R_1, \quad L_\varphi = d^2/d\varphi^2 + 1$$

где α — половина угла контакта.

Функция влияния $G(\varphi, \xi)$ имеет смысл изменения кривизны оболочки при действии самоуравновешенной системы четырех единичных сил и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d\varphi} L_\varphi G(\varphi, \xi) = -\frac{R}{D} \frac{d}{d\varphi} \delta(\varphi - \xi) \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.2)$$

Фундаментальное решение уравнения (4.2) имеет вид [26]:

$$G(\varphi, \xi) = \frac{R}{D} \begin{cases} 2/\pi - \sin \xi \cos \varphi, & \varphi \leq \xi \\ 2/\pi - \cos \xi \sin \varphi, & \varphi \geq \xi \end{cases} \quad (4.3)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $G(\varphi, \xi)$ является симметричной относительно своих аргументов и удовлетворяет само-сопряженному оператору L_φ

$$L_\varphi G(\varphi, \xi) = L_\xi G(\varphi, \xi) = \frac{2R}{\pi D} - \frac{R}{D} \delta(\varphi - \xi) \quad (4.4)$$

Интегральное уравнение (4.1) разрешимо при условии

$$2R \int_0^\alpha \sigma(\xi) \cos \xi d\xi + P = 0, \quad \sigma(\alpha) = 0 \quad (4.5)$$

Найдем точное решение интегрального уравнения (4.1) путем перехода к краевой задаче. Воздействуя на (3.1) оператором L_φ и пользуясь (4.4), приведем его к виду

$$L_\varphi^2 \sigma(\varphi) + 4\lambda^4 \sigma(\varphi) = 4\lambda^4 C_3, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha \quad (4.6)$$

$$(4\lambda^4 = R^2/(\varepsilon D) \sim R^2/h^4)$$

Здесь C_3 — постоянная, подлежащая определению. Следуя процедуре п. 1, подставим значение $\sigma(\xi) = C_3^{-1/4} L_\xi^2 \sigma(\varphi) / \lambda^4$ в интегральное уравнение (4.1) и путем интегрирования по частям найдем

$$C_3 \int_0^\alpha G(\varphi, \xi) d\xi - \frac{2\varepsilon}{\pi R^3} \int_0^\alpha L_\xi \sigma(\xi) d\xi + \frac{H}{R} + \frac{1}{4\lambda^4} [G_\xi'(\varphi, \alpha) L_\xi \sigma(\alpha) - G(\varphi, \alpha) L_\xi \sigma_\xi'(\alpha)] = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \alpha) \quad (4.7)$$

Вследствие того, что функция $\sigma(\xi)$ при дифференцировании увеличивается пропорционально отношению R/h , вычисление второго интеграла в (4.7) упрощается, если пренебречь самой функцией по сравнению с ее

второй производной

$$\int_0^{\alpha} L_{\xi} \sigma(\xi) d\xi \approx \sigma_{\xi}'(\alpha) \quad (4.8)$$

Принимая во внимание (4.8) и требуя выполнения (4.7) для произвольного угла φ интервала $(0, \alpha)$, получим следующие краевые условия для дифференциального уравнения (4.6):

$$(L_{\xi} + 1) \sigma'(\alpha) + 4\lambda^4 C_3 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \frac{\pi R^2 H}{2\varepsilon} = 0 \quad (4.9)$$

$$L_{\xi} [\operatorname{tg} \alpha \sigma'(\alpha) - \sigma(\alpha)] + 4\lambda^4 C_3 = 0$$

С большой точностью решение уравнения (4.6) можно записать в виде

$$\sigma^*(\varphi) = C_1 \Phi_1(\varphi) + C_2 \Phi_2(\varphi) + C_3^*, \quad \sigma^*(\varphi) = \frac{\sigma R^2}{\pi H D}, \quad C_3^* = \frac{C_3 R^2}{\pi H D} \quad (4.10)$$

Три произвольные постоянные этого решения и угол контакта α находим из краевых условий (4.9) и условий (4.5). Решая полученную при этом систему уравнений и пренебрегая членами порядка h^2/R^2 по сравнению с единицей, будем иметь

$$C_1 = - \frac{P^* [\lambda (\pi - 2\alpha) \Phi_2 + \Phi_4 - \Phi_3] + \Phi_4 - \Phi_3}{(\pi/2 - \alpha) (\operatorname{sh} \theta - \sin \theta)}$$

$$C_2 = \frac{P^* [\lambda (\pi - 2\alpha) \Phi_1 + \Phi_4 + \Phi_3] - \Phi_3 - \Phi_4}{(\pi/2 - \alpha) (\operatorname{sh} \theta - \sin \theta)} \quad (4.11)$$

$$C_3^* = (1 - P^*) / (\pi - 2\alpha), \quad \Phi_i = \Phi_i(\theta/2), \quad \theta = 2\lambda\alpha$$

$$P^* = \left\{ 1 + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \left[\frac{\operatorname{ch} \theta + \cos \theta}{\lambda (\operatorname{sh} \theta - \sin \theta)} - \operatorname{tg} \alpha \right] \right\}^{-1}, \quad P^* = \frac{PR \cos \alpha}{\pi H D}$$

Для больших значений аргумента θ формулы (4.11) можно упростить, полагая $\operatorname{sh} \theta \approx \operatorname{ch} \theta \approx 0,5e^{\theta}$, $\theta > 5$, тогда зависимость главного вектора контактных напряжений от угла α будет иметь вид $P^* = [1 + (\pi/2 - \alpha) (1/\lambda - \operatorname{tg} \alpha)]^{-1}$, а распределение напряжений под штампом

$$\sigma^*(y) = \frac{1 - P^*}{\pi - 2\alpha} [1 + e^{-y} (\sin y - \cos y)] + P^* \lambda e^{-y} \sin y$$

$$y = (1/2)\theta(1 - \varphi/\alpha), \quad \varphi \geq 0 \quad (4.12)$$

Неограниченно увеличивая λ , придем к решению, использующему гипотезы Кирхгофа — Лява. В этом случае реакция штампа будет состоять из равномерно распределенной нагрузки и сосредоточенных сил на границе контакта. Согласно предельным выражениям (3.9), классическое решение при $\varphi \geq 0$ равно

$$\sigma^*(\varphi) = - \frac{P^* - 1}{\pi - 2\alpha} - \frac{P^*}{2} \delta(\varphi - \alpha), \quad P^* \left[1 - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \operatorname{tg} \alpha \right] = 1 \quad (4.13)$$

В задаче для штампов, имеющих кривизну, равную кривизне оболочки, необходимо положить $H = 0$ и считать угол α заданным. Контактные

напряжения в этой задаче выражаются формулой

$$\sigma^0 = \frac{2\lambda^2}{\text{sh } \theta + \sin \theta} \left\{ \left[(\Phi_3 - \Phi_4)\Omega - \frac{\Phi_1}{\lambda} \right] \Phi_1(\varphi) + \right. \\ \left. + \left[(\Phi_3 + \Phi_4)\Omega - \frac{\Phi_2}{\lambda} \right] \Phi_2(\varphi) \right\} - \frac{1}{\pi - 2\alpha} \quad (4.14)$$

$$\sigma^0 = \sigma R / (P \cos \alpha), \quad \Omega = \text{tg } \alpha - 1 / (1/2\pi - \alpha)$$

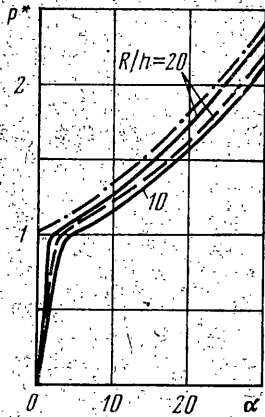
которая при больших значениях θ принимает вид

$$\sigma^0 = \lambda^2 e^{-\nu} [\Omega (\cos y - \sin y) - \lambda^{-1} \cos y] - (\pi - 2\alpha)^{-1}$$

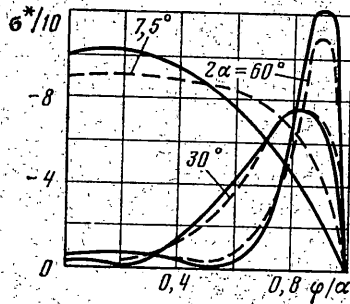
Классическое решение получим с помощью предельного перехода (2.9), (2.10).

$$\sigma^0 = \frac{1}{2} \left[\Omega \delta_{\varphi'}(\varphi - \alpha) - \delta(\varphi - \alpha) - \frac{1}{\pi/2 - \alpha} \right] \quad (\varphi \geq 0) \quad (4.15)$$

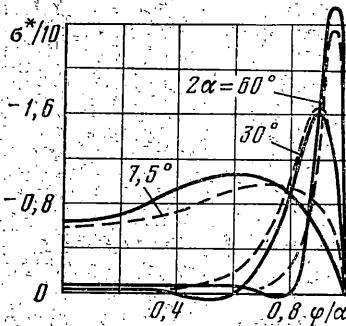
На фиг. 1—4 показаны зависимости $P^*(\alpha)$, $\sigma^*(\varphi)$, ($R \neq R_1$, $R/h = 10, 20$); $\sigma^0(\varphi)$ ($R = R_1$, $R/h = 20$), полученные с помощью формул (4.10), (4.11),



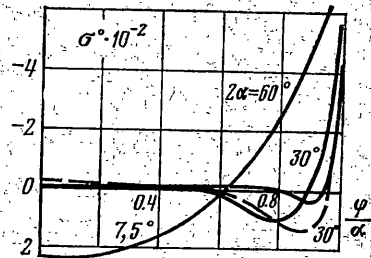
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

(4.14) (штрихпунктирная кривая на фиг. 1 соответствует решению по теории Кирхгофа — Лява). Для сравнения на этих же фигурах пунктиром нанесены кривые из [27], полученные на основе уравнений теории упругости. Из сопоставления двух решений следует вывод о том, что используемая модель тонкостенного объекта, учитывающая его сминаемость по

нормали, позволяет хорошо описывать контактное взаимодействие не только плоских тонких элементов, но и сильно искривленных, какими являются тонкие оболочки.

Следует отметить, что полученные простые формулы дают верное решение как для больших, так и для малых областей контакта. Отличие строгого решения контактной задачи теории упругости и приведенного здесь решения наблюдается в задаче для штампа, имеющего угловые точки. Теория упругости дает на краю области контакта корневую особенность значения напряжений. Предлагаемое решение имеет возрастающую, но конечную ветвь. Классическое решение $P^*(\alpha)$ при нулевой области контакта представляет собой отрезок абсциссы, возрастающий от 0 до 1. В точках $\alpha \neq 0$ зависимость $P^*(\alpha)$ не зависит от относительной толщины оболочки и для тонких оболочек хорошо согласуется со строгими решениями теории упругости.

Контактные напряжения, выраженные формулами (4.13), (4.15) классической теории оболочек, близки к действительным лишь внутри области контакта при размерах области контакта, превышающих 10 толщин оболочек. В краевой зоне, где контактные напряжения имеют максимальные значения, классическая теория дает неудовлетворительные результаты и не может служить для прочностного расчета соединения.

Автор благодарит С. В. Митину за проведенные вычисления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г. Я. О контактных задачах для оболочек и пластин.— Тр. X Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Т. 1. Тбилиси: Мецниереба, 1975, с. 244—250.
2. Попов Г. Я. Об интегральных уравнениях контактных задач для тонкостенных элементов.— ПММ, т. 40, 1976, вып. 4, с. 662—673.
3. Тимошенко С. П., Гудьер Д. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
4. Божкова Л. В. Распределение давлений в области контакта цилиндрической трубы с жестким цилиндрическим основанием.— Тр. Моск. инж.-строит. ин-та, 1969, № 63, с. 90—95.
5. Косов М. Г. Некоторые контактные задачи теории упругости применительно к телам повышенной изгибной податливости. Волновые передачи: Сб. статей. М.: Станкин, 1970, с. 212—229.
6. Ковнеристов Г. В. Взаимодействие штампа и балочной плиты.— Сопротивление материалов и теория сооружений: Респ. межвед. научно-техн. сб., Киев, 1975, вып. 25, с. 165—171.
7. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений.— ПММ, т. 26, 1962, вып. 5, с. 934—943.
8. Григolloк Э. И., Толкачев В. М. Цилиндрический изгиб пластины жесткими штампами.— ПММ, т. 39, 1975, вып. 5, с. 876—883.
9. Карасев С. Н., Артюхин Ю. П. Влияние поперечного сдвига и обжатия на распределение контактных напряжений.— Исследования по теории пластин и оболочек: Сб. статей. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1976, вып. 12, с. 68—76.
10. Блох М. В. К выбору модели в задачах о контакте тонкостенных тел.— Прикл. механика, т. 13, вып. 5, 1977, с. 34—42.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961. 703 с.
12. Филоненко-Бородич М. М. Изгиб тонкого стержня по заданной кривой.— Тр. Моск. электромех. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1949, вып. 58, с. 3—10.
13. Розенберг Л. А. О давлении твердого тела на пластинку.— Инж. сб., 1955, т. 21, с. 151—155.
14. Essenburg F. On a class of nonlinear axisymmetric plate problems.— Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E, 1960, v. 27, № 4, p. 677—680.
15. Essenburg F. On surface constraints in plate problems.— Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E, 1962, v. 29, № 2, p. 340—344.
16. Essenburg F., Gulati S. T. On the contact of two axisymmetric plates.— Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E, 1966, v. 33, № 2, p. 91—97.
17. Пелех В. Л., Сысак Р. Д. О контактных задачах для балок и пластинок с низкой сдвиговой жесткостью.— Механика полимеров, 1970, вып. 4, с. 715—720.
18. Пелех В. Л., Сысак Р. Д. Об одном классе контактных задач для тонких анизотропных пластинок из армированных пластиков.— Механика полимеров, 1972, вып. 2, с. 346—350.

19. Аргюхин Ю. П., Карасев С. Н. Действие жесткого штампа на пологую сферическую оболочку и пластинку.— Исследования по теории пластин и оболочек: Сб. статей. Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та, 1972, вып. 9, с. 211—219.
20. Аргюхин Ю. П., Карасев С. Н. Некоторые контактные задачи теории тонких пластин.— Исследования по теории пластин и оболочек: Сб. статей. Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та, 1973, вып. 10, с. 159—166.
21. Пелех Б. Л., Сухорольский М. А. Взаимодействие системы жестких гладких штампов с упругими цилиндрическими оболочками из армированных пластиков.— Прикл. механика, т. 10, 1974, вып. 4, с. 26—30.
22. Пелех Б. Л., Сухорольский М. А. К решению задач об упругом контакте цилиндрических оболочек.— Прикл. механика, т. 10, 1974, вып. 8, с. 26—30.
23. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1948. 460 с.
24. Дегинко Ф. М., Фастовский В. М. Посадка короткой втулки на цилиндрическую оболочку.— Вестн. машиностроения, 1967, № 7, с. 42—45.
25. Блох М. В., Цукров С. Я. О влиянии изменения толщины стенки на осесимметричный контакт тонких цилиндрических оболочек.— Прикл. механика, 1974, т. 10, вып. 4, с. 31—37.
26. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник. Т. 1. М.: Машиностроение, 1968. 831 с.
27. Карасев С. Н. К одной контактной задаче для полого цилиндра, находящегося в условиях плоской деформации.— Исследования по теории пластин и оболочек: Сб. статей. Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та, 1975, вып. 11, с. 185—192.

Казань

Поступила в редакцию
26.XI.1979