**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1981**

УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОГО ОСНОВАНИЯ

ПАСКАЛЕНКО А. А., ПОПОВ Г. Я., ЦЕЛИКОВ Г. С.

Рассматриваются пространственные задачи об изгибе полубесконечной балки и растяжении полубесконечного стержня (в постановке [1]) на линейно-деформируемом основании. Задачи сводятся к решению интегродифференциального уравнения типа Винера — Хопфа. На основании результатов [2] построено точное решение задач в виде, удобном для численной реализации.

Вычислены нормальные контактные напряжения и изгибающие моменты для балки, а также контактные касательные напряжения и нормальные напряжения в стержне в случае действия сосредоточенной силы, приложенной к торцу, для основания в виде упругого однородного полупространства.

1. Рассмотрим пространственную задачу об изгибе балки высотой h, сцепленной по области $-a\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y<\infty$ с линейно-деформируемым основанием, матрица-ядро которого имеет представление [3]:

$$R_{jk}(x, y, \xi, \eta)=K_{jk}(x-\xi, y-\eta) \quad (j,k=1, 2, 3);$$

$$K_{jk}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} H_{jk}(\alpha,\beta)\, e^{-i\alpha x-i\beta y}d\alpha d\beta$$

Все величины, относящиеся к оси x, здесь помечены индексом 1, к оси y — индексом 2, к оси z — индексом 3. При таких обозначениях $K_{23}(x, y)$, например, будет означать смещение поверхностной точки (x, y) основания вдоль оси z от воздействия единичной силы вдоль оси y.

Плотность $H(\alpha, \beta)=H_{33}(\alpha, \beta)$ ядра основания [3] имеет асимптотику

$$\begin{aligned} &H(\alpha, \beta)=\alpha^{\gamma-1}[1+O(1)], \quad |\alpha|\to\infty \quad (0\leqslant\gamma<1)\\ &H(\alpha, \beta)=\beta^{\varepsilon-1}[1+O(1)], \quad |\beta|\to\infty \quad (0\leqslant\varepsilon<1)\end{aligned} \tag{1.1}$$

В случае упругого однородного изотропного полупространства $H(\alpha, \beta)=\theta(\alpha^2+\beta^2)^{-1/2}$, $\theta=2(1-\mu_0^2)E_0^{-1}$, где E_0 и μ_0 — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала полупространства.

Пусть к балке приложена нормальная $q_3(y)$ и сдвигающая вдоль оси балки $q_2(y)$ нагрузки. Будем пренебрегать касательными напряжениями $p_1(x, y)$.

Требуется определить контактные напряжения $p_3(x, y)$ и $p_2(x, y)$, прогибы $w(y)$ и продольные перемещения $u(y)$ балки.

Закон изменения контактных напряжений примем в виде

$$p_j(x, y)=h(x)p_j(y) \quad (j=2, 3) \tag{1.2}$$

где $h(x)$ — закон изменения контактных напряжений по ширине балки (выбирается заранее), а $p_j(y)$ подлежат определению.

Можно показать [3], что в этом случае задача приводится к системе

$$\int\limits_0^\infty K_{22}{}^*(y-\eta)p_2(\eta)d\eta+\int\limits_0^\infty K_{32}{}^*(y-\eta)p_3(\eta)d\eta=u(y)-\frac{h}{2}w'(y)$$

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^\infty K_{23}^*(y-\eta)p_2(\eta)\,d\eta+\int\limits_0^\infty K_{33}^*(y-\eta)p_3(\eta)\,d\eta=w(y)\\
D_6\frac{d^4w}{dy^4}=q_3(y)-p_3(y)-\frac{h}{2}\frac{d}{dy}\left[q_2(y)-p_2(y)\right]\\
D_0\frac{d^2u}{dy^2}=p_2(y)-q_2(y)\quad(0\leqslant y<\infty),\quad h_\alpha=\int\limits_{-a}^{a}h(x)e^{i\alpha x}dx\\
K_{jk}^*(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}H_{jk}^\circ(\beta)e^{-i\beta z}d\beta,\quad H_{jk}^\circ(\beta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}H_{jk}(\alpha,\beta)h_\alpha d\alpha
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

где D_6 — изгибная жесткость балки, D_0 — жесткость балки на растяжение.

Решение системы (1.3) должно удовлетворять условиям свободного края: $w''(0)=0$, $w'''(0)=0$, $u'(0)=0$.

Точное решение системы (1.3) в общем случае получить нельзя. Как будет показано ниже, такое решение можно построить для двух предельных случаев: когда касательные напряжения отсутствуют и когда балка не работает на изгиб, т. е. становится накладкой [1]. В первом случае (изгиб полубесконечной балки без учета сил сцепления) следует в (1.3) положить $q_2(y)=0$, $p_2(y)=0$, $u(y)=0$ и система вырождается так:

$$
\int\limits_0^\infty K_{33}^*(y-\eta)p_3(\eta)\,d\eta=w(y),\quad D_6\frac{d^4w}{dy^4}=q_3(y)-h_0p_3(y)
\tag{1.4}
$$

Во втором случае (растяжение полубесконечной накладки сцепленной с линейно-деформируемым основанием) $p_3(y)=0$ и система вырождается в следующую:

$$
\int\limits_0^\infty K_{22}^*(y-\eta)p_2(\eta)\,d\eta=u(y),\quad D_0\frac{d^2w}{dy^2}=h_0p_2(y)-q_2(y)
\tag{1.5}
$$

Системы (1.4) и (1.5) при исключении $w(y)$ в первой и $u(y)$ во второй приводятся к интегродифференциальному уравнению

$$
\lambda\varphi(y)+(-1)^k\frac{d^{2k}}{dy^{2k}}\int\limits_0^\infty k(y-x)\varphi(x)\,dx=f(y)
\tag{1.6}
$$

где в первом случае $\varphi(y)=p(y)$, $k=2$, $k(z)=K_{33}^*(z)$, во втором $\varphi(y)=\tau(y)$, $k=1$, $k(z)=K_{22}^*(z)$.

Интегродифференциальное уравнение (1.6), как известно, допускает точное решение методом факторизации. Однако соответствующие формулы [4, 6] трудно довести до числа, поэтому были предложены приближенные методы факторизации [6, 7]. В [1] предложен способ решения интегродифференциального уравнения (1.6), приводящий к бесконечной системе алгебраических уравнений, зависящей от разности индексов, также допускающей точное решение.

Здесь, следуя схеме [2], где рассмотрен случай $k=0$, известные формулы факторизации преобразованы к виду, удобному для вычислений, и на этой основе дается численная реализация.

[1] По-видимому, впервые термин «накладка» введен В. М. Александровым.

Преобразование Фурье ядра уравнения (1.6)

$$K(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k(z)\,e^{itz}dz \tag{1.7}$$

согласно (1.1) имеет асимптотику

$$K(t)=t^{-1+\varepsilon}[1+O(1)],\quad t\to\infty\quad (0\leqslant\varepsilon<1) \tag{1.8}$$

Решение уравнения (1.6) может быть получено по формуле [2, 4]:

$$\varphi(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(-\zeta)\,\varphi_\zeta(y)\,d\zeta,\quad F(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\,e^{i\zeta y}dy \tag{1.9}$$

где $\varphi_\zeta(y)$ — решение интегродифференциального уравнения

$$\lambda\varphi_\zeta(y)+(-1)^k\frac{d^{2k}}{dy^{2k}}\int_0^{\infty}k(y-x)\,\varphi_\zeta(x)\,dx=e^{i\zeta y}\quad (y,\ \mathrm{Im}\,\zeta>0) \tag{1.10}$$

Доопределив уравнение (1.10) на отрицательную полуось, после применения преобразования Фурье и использования теоремы о свертке получим следующее функциональное уравнение:

$$\Phi_\zeta^{\pm}(t)\,[\lambda+t^{2k}K(t)]=F^-(t)+i(\zeta+t)^{-1}$$
$$F^-(t)=\int_{-\infty}^{0}f^-(y)\,e^{ity}dy,\quad \Phi_\zeta^+(t)=\int_0^{\infty}\varphi_\zeta(y)\,e^{ity}dy \tag{1.11}$$

Функции $\Phi_\zeta^+(t)$ и $F^-(t)$ — регулярные соответственно в верхней и нижней полуплоскостях в силу известных свойств интеграла Фурье.

Решая уравнение (1.11) по схеме ([3], с. 36), получаем

$$\Phi_\zeta^+(t)=\left[p(t)+i\frac{K_+(\zeta)}{\zeta+t}\right]K_+(t) \tag{1.12}$$

где $p(t)$ — многочлен степени $k-1$, $K_\pm(t)$ — решение проблемы факторизации

$$[\lambda+t^{2k}K(t)]^{-1}=K_+(t)K_-(t) \tag{1.13}$$

Обращая преобразование Фурье (1.12), получим

$$\varphi_\zeta(y)=\varphi_\zeta^{(1)}(y)+\varphi_\zeta^{(2)}(y) \tag{1.14}$$

$$\varphi_\zeta^{(1)}(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}p(t)K_+(t)\,e^{-ity}dt;\quad \varphi_\zeta^{(2)}(y)=\frac{i}{2\pi}K_+(\zeta)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K_+(t)}{\zeta+t}e^{-ity}dt \tag{1.15}$$

На основании [2] решение проблемы факторизации (1.13), удобное для численной реализации, можно представить в виде

$$K_+(t)=(a+it)^{\omega-k}\sum_{n=0}^{\infty}g_n\left(\frac{t-ia}{t+ia}\right)^n,\quad g_0=e^{h_0}$$
$$g_{n+1}=\sum_{m=0}^{n}\frac{n-m+1}{n+1}h_{n-m+1}g_m\ \ (n=0,1,2,\ldots),\quad h_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\ln G\left(\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\right)d\theta \tag{1.16}$$

$$h_n=\frac{(-1)^n}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(n\theta)\ln G\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)d\theta,\quad G^{-1}(t)=\frac{1+a^{-2\omega}t^{2k}K(at)}{(1+t^2)^{k-\omega}}$$

$$\omega=(\varepsilon-1)/2,\quad a^{2k-\varepsilon+1}=\lambda$$

Выберем целую функцию $p(t)$ в виде

$$p(t)=\sum_{j=0}^{k-1}A_j(\zeta)(a-it)^{k-j-1} \tag{1.17}$$

Тогда, после подстановки (1.16) и (1.17) в $\varphi_\zeta^{(1)}(y)$ и использования формулы 7.414 (6) из [9] получим

$$\varphi_\zeta^{(1)}(y)=e^{-ay}\sum_{j=0}^{k-1}A_j(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g_n}{\mu_{nj}}y^{j+\omega}L_n^{j+\omega}(2ay),\quad \mu_{nj}=\frac{\Gamma(n+j+\omega+1)}{n!} \tag{1.18}$$

где $L_n^\varepsilon(y)$ — полиномы Лагерра.

Функцию $\varphi_\zeta^{(2)}(y)$ представим в виде ряда

$$\varphi_\zeta^{(2)}(y)=(ay)^\omega e^{-ay}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n^{(2)}(\zeta)}{\mu_{n0}}L_n^\omega(2ay) \tag{1.19}$$

коэффициенты $\varphi_n^{(2)}(\zeta)$ которого после выполнения преобразований [2] примут форму

$$\varphi_n^{(2)}(\zeta)=2^{1-k}a^{\omega-k}iK_+(\zeta)\sum_{\mu=0}^{n}\frac{(\zeta-ia)^{n-\mu}}{(\zeta+ia)^{n-\mu+1}}\sum_{s=0}^{\mu}g_{\mu-s}\frac{(-k)_s}{s!} \tag{1.20}$$

Подставляя (1.18) и (1.19) в (1.14), а затем в (1.9), получим решение интегродифференциального уравнения (1.6)

$$\varphi(y)=e^{-ay}\left[\sum_{j=0}^{k-1}B_jy^{j+\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g_n}{\mu_{nj}}L_n^{j+\omega}(2ay)+(ay)^\omega\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y_n}{\mu_{n0}}L_n^\omega(2ay)\right] \tag{1.21}$$

$$B_j=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(-\zeta)A_j(\zeta)d\zeta,\quad y_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(-\zeta)\varphi_n^{(2)}(\zeta)d\zeta$$

Наиболее важный случай нагрузки — сосредоточенная сила: $f(y)=\lambda\delta(y-b)$, где $\delta(y)$ — дельта-функция Дирака.

В результате использования фильтрующего свойства дельта-функции, а также формулы (1.20) после несложных преобразований получим

$$y_n=2^{1-k}a^{k+\omega+1}b^{k+\omega}e^{-ab}\sum_{j=0}^{n}\sum_{s=0}^{j}g_{j-s}\frac{(-k)_s}{s!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{g_m}{\mu_{n+m-j,k}}L_{n+m-j}^{k-\omega}(2ab) \tag{1.22}$$

2. Полагая в (1.6) $k=2$ и $h(x)=\pi^{-1}(a^2-x^2)^{-1/2}$, приходим к интегро-дифференциальному уравнению относительно искомых нормальных напряжений $p(y)$ в задаче изгиба свободно лежащей на упругом полупро-

странстве полубесконечной балки. При этом

$$k(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{y^2+s^2}}$$

$$\lambda=\frac{a^4}{D_0\theta},\quad \theta=2\frac{1-\mu_0^2}{E_0},\quad \varepsilon=0\quad \left(\omega=-\frac{1}{2}\right)$$

где E_0 — модуль упругости, μ_0 — коэффициент Пуассона материала полупространства.

В случае сосредоточенной силы (сила приложена в точке $y=b$) формулы (1.21) и (1.22) дают

$$p(y)=e^{-ay}\left[\sum_{j=0}^{1}B_j y^{j-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g_n}{\mu_{nj}}L_n^{j-1/2}(2ay)+(ay)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y_n}{\mu_{n0}}L_n^{-1/2}(2ay)\right]$$

$$y_n=\frac{1}{2}a^{5/2}b^{3/2}e^{-ab}\sum_{j=0}^{n}\sum_{s=0}^{j}g_{j-s}\frac{(-2)^s}{s!}\sum_{m=0}^{\infty}g_m\frac{(n+m-j)!}{\Gamma(n+m-j+1/2)}L_{n+m-j}^{1/2}(2ab)$$

Поперечная сила и изгибающий момент вычисляются по формулам

$$Q(y)=-\int_0^y p(t)\,dt \text{ при } y<b,\quad Q(y)=\int_y^\infty p(t)\,dt \text{ при } y>b$$

$$M(y)=\int_0^y (y-t)p(t)\,dt \text{ при } y<b;\quad M(y)=\int_y^\infty (t-y)p(t)\,dt \text{ при } y>b$$

Для определения произвольных постоянных B_0 и B_1 используются следующие свойства поперечной силы и изгибающего момента:

$$Q(y)\,|_{y=b+0}-Q(y)\,|_{y=b-0}=P,\quad M(y)\,|_{y=b+0}-M(y)\,|_{y=b-0}=0 \tag{2.1}$$

Если сила приложена в точке $y=0$, то

$$p(y)=e^{-y}\sum_{j=0}^{1}B_j y^{j-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g_n}{\mu_{nj}}L_n^{j-1/2}(2y),\quad Q(y)=\sum_{j=0}^{1}B_j\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g_n}{\mu_{nj}}I_n^{j-1/2}(y) \tag{2.2}$$

$$M(y)=\sum_{j=0}^{1}B_j\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g_n}{\mu_{nj}}J_n^{j-1/2}(y),\quad I_0^\beta(y)=\Gamma(\beta+1,y)$$

$$I_n^\beta(y)=-\frac{2}{n}e^{-y}y^{1+\beta}L_{n-1}^{1+\beta}(2y)-\frac{n+\beta}{n}I_{n-1}^\beta(y)\quad (n=1,2,3,\ldots)$$

$$J_0^\beta(y)=(\beta+1-y)\Gamma(\beta+1,y)+e^{-y}y^{\beta+1}$$

$$J_n^\beta(y)=-\frac{2}{n}I_{n-1}^\beta(y)-\frac{n+\beta}{n}J_{n-1}^\beta(y)\quad (n=1,2,3,\ldots)$$

где $\Gamma(\alpha,y)$ — неполная гамма-функция.

Постоянные B_0 и B_1 находим из граничных условий (2.1)

$$\sum_{j=0}^{1}B_j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n g_n=1,\quad \sum_{j=0}^{1}B_j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n g_n\left(2n+j+\frac{1}{2}\right)=0$$

Таблица 1

y	$\lambda=0,5$	$\lambda=0,5$	$\lambda=1,0$	$\lambda=1,0$	$\lambda=2,0$	$\lambda=2,0$
	1	2	3	4	5	6
0,2	1,215	1,233	1,259	−0,128	−0,125	−0,124
0,4	0,771	0,736	0,741	−0,202	−0,195	−0,191
0,6	0,549	0,499	0,489	−0,244	−0,235	−0,228
0,8	0,397	0,351	0,332	−0,264	−0,254	−0,246
1,0	0,280	0,247	0,225	−0,268	−0,259	−0,249
1,5	0,092	0,088	0,071	−0,237	−0,235	−0,225
2,0	−0,003	0,008	0,002	−0,180	−0,188	−0,182
3,0	−0,052	−0,040	−0,034	−0,077	−0,094	−0,098
5,0	−0,015	−0,017	−0,015	−0,002	−0,009	−0,018

По полученным формулам (2.2) в случае действия единичной силы были вычислены на ЭВМ БЭСМ-4М значения приведенных нормальных напряжений $p(y)$ и изгибающих моментов $M(y)$ для различных значений λ. Для обеспечения точности порядка 10^{-3} достаточно удержать в (2.2) по 20 членов ряда (пять верных знаков после запятой достигается при удержании 90 членов ряда). Коэффициенты h_n вычислялись по методу Файлона [9]. Результаты расчетов представлены в табл. 1 (для $p(y)$ и $M(y)$ соответственно).

Истинные значения контактных напряжений $p^*(y)$, поперечных сил $Q^*(y)$ и изгибающих моментов $M^*(y)$ можно найти по формулам

$$p^*(y)=p\left(\frac{\lambda y}{a}\right),\quad Q^*(y)=\frac{a}{\lambda}Q\left(\frac{\lambda y}{a}\right),\quad M^*(y)=\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 M\left(\frac{\lambda y}{a}\right)$$

3. Полагая в (1.6) $k=1$, $h(x)=\pi^{-1}(a^2-x^2)^{-1/2}$, приходим к интегродифференциальному уравнению относительно искомых касательных напряжений $\tau(y)$ в задаче о растяжении накладки, впервые поставленной в [1], сцепленной с упругим однородным полупространством.

При этом

$$k(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{y^2+\eta^2}}+\frac{\mu_0}{1-\mu_0}\frac{y^2}{(y^2+\eta^2)^{3/2}}\right]d\eta$$

$$\lambda=\pi a^2E_0/[2D_0(1-\mu_0^2)] \tag{3.1}$$

На основании изложенного способа решения уравнения (1.6) неизвестные контактные (приведенные) напряжения вдоль оси накладки будут иметь вид

$$\tau^*(y)=y^{-1/2}e^{-y}\left[B_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g_n}{\mu_{n0}}L_n^{-1/2}(2y)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y_n}{\mu_{n0}}L_n^{-1/2}(2y)\right] \tag{3.2}$$

Произвольная постоянная B_0 определяется из условия $u'(0)=0$.

Если к накладке приложена горизонтальная сосредоточенная единичная сила в точке $y=b$, то, согласно (1.22), имеем ($g_{-1}=0$):

$$y_n=\lambda^{3/2}b^{1/2}e^{-\lambda b}\sum_{j=0}^{n}(g_j-g_{j-1})\sum_{m=0}^{\infty}\frac{g_m}{\mu_{n+m-j,1}}L_{n+m-j}^{1/2}(2\lambda b) \tag{3.3}$$

Таблица 2

y	$\lambda=1$	$\lambda=5$	$\lambda=10$	$\lambda=1$	$\lambda=5$	$\lambda=10$
0,2	0,846	0,855	0,857	0,566	0,564	0,564
0,4	0,468	0,470	0,471	0,442	0,438	0,438
0,6	0,318	0,312	0,314	0,365	0,362	0,361
0,8	0,237	0,225	0,227	0,310	0,309	0,308
1,0	0,188	0,172	0,173	0,268	0,270	0,268
1,5	0,188	0,100	0,100	0,193	0,204	0,202
2,0	0,080	0,066	0,065	0,145	0,164	0,162
3,0	0,041	0,035	0,034	0,086	0,116	0,115
5,0	0,014	0,015	0,014	0,037	0,070	0,072

Нормальные (приведенные) напряжения в поперечном сечении накладки определяются по формулам

$$F\sigma^*(y)=\int_y^\infty \tau^*(s)\,ds \quad (y>b),\quad F\sigma^*(y)=-\int_0^y \tau^*(s)\,ds \quad (y<b) \tag{3.4}$$

где F — площадь поперечного сечения накладки.

Постоянная B_0 может быть найдена из условия

$$\sigma^*(y)\,|_{y=b+0}-\sigma^*(y)\,|_{y=b-0}=P/F \tag{3.5}$$

Если сила P приложена к торцу накладки, то для приведенных касательных и нормальных напряжений получим

$$\tau^*(y)=B_0y^{-1/2}e^{-y}\sum_{n=0}^\infty \frac{g_n}{\mu_{n0}}L_n^{-1/2}(2y),\quad F\sigma^*(y)=B_0\sum_{n=0}^\infty \frac{g_n}{\mu_{n0}}I_n^{-1/2}(y),$$

$$B_0=2\lambda P\left[\sum_{n=0}^\infty (-1)^n g_n\right]^{-1} \tag{3.6}$$

По формулам (3.6) в случае единичной силы вычислены значения приведенных касательных $\tau^*(y)$ и нормальных напряжений $F\sigma^*(y)$ в накладке при различных значениях параметра λ. Результаты вычислений приведены в табл. 2 (для $\tau^*(y)$ и $F\sigma^*(y)$ соответственно). Как показали вычисления, для получения трех точных значащих цифр в (3.6) достаточно взять $n=20$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 5, с. 770.
2. *Попов Г. Я.* К решению задач теории упругости методом факторизации.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 1, с. 178.
3. Развитие контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
4. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов.— Успехи матем. наук, 1958, т. 13, вып. 5, с. 3.
5. *Бабешко В. А.* Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающих в теории упругости и математической физике.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 1, с. 88.
6. *Черский Ю. И.* Две теоремы об оценке погрешности и некоторые их приложения.— Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 2, с. 271.
7. *Александров В. М.* Контактные задачи для упругого клина.— Изв. АН СССР. МТТ, 1967, № 2, с. 120.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1108 с.
9. *Трантер К.* Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гостехиздат, 1956. 196 с.

Одесса

Поступила в редакцию
5.VI.1979