

УДК 621.031.539.334

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОМ
НАГРУЖЕНИИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

ЖЕЛЕЗНОВ Л. П., КАБАНОВ В. В.

Рассматривается задача нелинейного деформирования оболочек под действием неосесимметричной нагрузки. Задача решается методом конечных элементов в перемещениях. В качестве конечного элемента выбран кольцевой элемент. По длине конечного элемента перемещения аппроксимируются полиномами, в окружном направлении — тригонометрическими рядами. Система нелинейных алгебраических уравнений линеаризуется методом итераций в сочетании с шаговым методом по нагрузке. Система линейных уравнений решается методом квадратного корня. Получен рекуррентный алгоритм, позволяющий оценивать сходимость решения. Алгоритм определения напряженно-деформированного состояния и предельной нагрузки, реализованный программой для машины БЭСМ-6, позволяет стандартно решать задачи нелинейного деформирования оболочек при различных граничных условиях. В качестве примера исследована задача нелинейного деформирования оболочки, сжатой ступенчато изменяющимися по краевому контуру осевыми усилиями. Исследовано влияние неоднородности усилий на их предельные значения. Дано сравнение расчета с известным экспериментом.

1. Разобьем оболочку на m цилиндрических конечных элементов. Осевое u' , окружное v' перемещения и прогиб w' точек элемента представим в виде рядов произведений полиномов на тригонометрические функции

$$u = \sum_{n=0}^N U_n \cos n\varphi, \quad v = \sum_{n=0}^N V_n \sin n\varphi, \quad w = \sum_{n=0}^N W_n \cos n\varphi, \quad u = k_2 u', \quad k_2 = R^{-1} \quad (1.1)$$

$$U_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n \xi, \quad V_n = \alpha_3^n + \alpha_4^n \xi, \quad w = k_2 v'$$

$$W_n = \alpha_5^n + \alpha_6^n \xi + \alpha_7^n \xi^2 + \alpha_8^n \xi^3, \quad w = k_2 w', \quad \xi = k_2 x$$

где x, φ — продольная и угловая координаты. В матричной форме (1.1)

$$u^{\wedge} = \sum_0^N P \alpha^n \quad (1.2)$$

где $u^{\wedge T} = \{u, v, w\}$ — вектор перемещений точек элемента, $(\alpha^n)^T = \{\alpha_1^n, \alpha_2^n, \dots, \alpha_8^n\}$ — вектор неизвестных коэффициентов полиномов

$$P = \begin{vmatrix} c & \xi c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & \xi s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & \xi c & \xi^2 c & \xi^3 c \end{vmatrix} \begin{cases} c = \cos n\varphi \\ s = \sin n\varphi \end{cases} \quad (1.3)$$

Выразим неизвестные коэффициенты α^n через амплитуды узловых перемещений n -й гармоники. Из (1.2) имеем

$$u^{0n} = B \alpha^n, \quad (u^{0n})^T = \{U_i^n, V_i^n, W_i^n, W_{\xi i}^n, U_j^n, V_j^n, W_j^n, W_{\xi j}^n\} \quad (1.4)$$

где $(u^{0n})^T$ — вектор амплитуд узловых перемещений n -й гармоники, B — матрица связи восьмого порядка, вид элементов которой можно найти

в [1]. Тогда

$$\alpha^n = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}^{\circ n} \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в (1.2), находим

$$\mathbf{u}^{\circ} = \sum_0^N \mathbf{P}_1 \mathbf{u}^{\circ n}, \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{P} \mathbf{B}^{-1} \quad (1.6)$$

Запишем выражение потенциальной энергии деформации конечного элемента

$$W_i = \frac{1}{2} \iint_s \mathbf{T}^T \mathbf{e} \, ds \quad (1.7)$$

$$\mathbf{e}^T = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3\}, \quad \mathbf{T}^T = \{T_1, T_2, T_3, M_1, M_2, M_3\}$$

где \mathbf{T}^T — вектор внутренних усилий и моментов конечного элемента, \mathbf{e}^T — вектор деформаций конечного элемента. Кинематические и статические соотношения примем в виде

$$\mathbf{e} = \mathbf{A} \mathbf{u}^{\circ} = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{e}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{u}^{\circ}, \quad \mathbf{e}_n = \mathbf{A}_n \mathbf{u}^{\circ} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{D} \mathbf{e} = \mathbf{T}_i + \mathbf{T}_n, \quad \mathbf{T}_i = \mathbf{D} \mathbf{A}_i \mathbf{u}^{\circ}, \quad \mathbf{T}_n = \mathbf{D} \mathbf{A}_n \mathbf{u}^{\circ}$$

Элементы матриц \mathbf{A} , \mathbf{A}_i , \mathbf{A}_n можно найти в [1]. С учетом (1.6) запишем

$$\mathbf{e}_i = \sum_0^N \mathbf{A}_i \mathbf{P}_1 \mathbf{u}^{\circ n}, \quad \mathbf{e}_n = \sum_0^N \mathbf{A}_n \mathbf{P}_1 \mathbf{u}^{\circ n}, \quad \mathbf{T}_i = \sum_0^N \mathbf{D} \mathbf{A}_i \mathbf{P}_1 \mathbf{u}^{\circ n}, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{T}_n = \sum_0^N \mathbf{D} \mathbf{A}_n \mathbf{P}_1 \mathbf{u}^{\circ n}$$

Векторы \mathbf{e}_n и \mathbf{T}_n удобно представить в виде

$$\mathbf{e}_n = 1/2 \mathbf{B}^{\circ} \mathbf{e}^{\circ}, \quad \mathbf{T}_n = 1/2 \mathbf{D}^* \mathbf{B}^{\circ} \mathbf{e}^{\circ}, \quad \mathbf{B}^{\circ T} = \begin{vmatrix} w_{\xi} & 0 & w_{\varphi} \\ 0 & w_{\varphi} & w_{\xi} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{e}^{\circ T} = \{w_{\xi}, w_{\varphi}\}, \quad (1.10)$$

$$\mathbf{D}^* = \begin{vmatrix} K_1 & K_2 & 0 \\ K_2 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} K_1 &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \\ K_2 &= \nu K_1 \\ K_3 &= \frac{1}{2} (1-\nu) K_1 \end{aligned}$$

Запишем \mathbf{e}° в матричной форме:

$$\mathbf{e}^{\circ} = \sum_0^N \mathbf{e}^{\circ n}, \quad \mathbf{e}^{\circ n} = \mathbf{P}^* \mathbf{u}^{\circ n}, \quad \mathbf{P}^* = \mathbf{P}^{\circ} \mathbf{B}^{-1} \quad (1.11)$$

$$\mathbf{P}^{\circ*} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2\xi c & 3\xi^2 c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -sn & -\xi sn & -\xi^2 sn & -\xi^3 sn \end{vmatrix}$$

Выражение для работы внешней нагрузки запишем так:

$$A_i = D_1 k_2^2 \iint_s \mathbf{q}^T \mathbf{u}^{\circ} \, ds + A_k, \quad D_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.12)$$

где $\mathbf{q}^T = \{q_1, q_2, q_3\}$ — вектор внешней поверхностной нагрузки, A_k — работа контурных сил, $q_i = q_i' / D_1 k_2^3$.

Полная потенциальная энергия оболочки имеет вид

$$\Pi = \sum_i \Pi_i = \sum_i (W_i - A_i) \quad (1.13)$$

Согласно принципа возможных перемещений, первая вариация энергии равна нулю $\delta\Pi=0$. Выполняя варьирование и используя равенство $\delta e_n = \mathbf{V}^\circ \delta e^\circ$, получим

$$\sum_i \left(\sum_n \left(\mathbf{K}_u \mathbf{u}^n + \sum_k (\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_1^T) \mathbf{u}^{ok} + \sum_h \sum_j \mathbf{K}_2 \mathbf{u}^{oj} - \mathbf{Q}^n \right) \right) = 0$$

$$\mathbf{K}_u = \iint_s \mathbf{P}_1^T \mathbf{A}_1^T \mathbf{D}^\circ \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_1 ds, \quad \mathbf{D}^\circ = \frac{\mathbf{D}}{D_1 k_2^2} \quad (1.14)$$

$$\mathbf{K}_1 = \frac{1}{2} \iint_s \mathbf{P}_1^T \mathbf{A}_1^{\circ T} \mathbf{D}^{\circ*} \mathbf{V}^\circ \mathbf{P}^* ds, \quad \mathbf{D}^{\circ*} = \frac{\mathbf{D}^*}{D_1 k_2^2}, \quad \mathbf{K}_2 = \frac{1}{2} \iint_s \mathbf{P}^{*T} \mathbf{V}^{\circ T} \mathbf{D}^{\circ*} \mathbf{V}^\circ \mathbf{P}^* ds$$

$$\mathbf{Q}^n = \iint_s \mathbf{q}^T \mathbf{P}_1 ds + \mathbf{Q}_k^n, \quad \mathbf{A}_{lij} = \mathbf{A}_{lij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

где \mathbf{Q}_k^n — вектор контурных сил n -й гармоники, \mathbf{Q}^n — вектор обобщенных узловых сил n -й гармоники.

Учитывая условия совместности перемещений в узлах конечных элементов

$$\mathbf{u}_j^{\circ(i-1)} = \mathbf{u}_i^{\circ i}, \quad \mathbf{u}_j^{\circ(i-1)T} = \{U_j^{i-1}, V_j^{i-1}, W_j^{i-1}, W_{ij}^{i-1}\} \quad (1.15)$$

где $\mathbf{u}_j^{\circ(i-1)}$ — вектор амплитуд n -й гармоники узловых перемещений j -го узла, $(i-1)$ -го элемента, преобразуем (1.14) к виду

$$\sum_n (\mathbf{K}_u \tilde{\mathbf{u}}^n + \sum_k (\mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{u}}^k + 2\mathbf{K}_1^T \tilde{\mathbf{u}}^k) + \sum_k \sum_j \mathbf{K}_2 \tilde{\mathbf{u}}^j - \mathbf{Q}^n) = 0 \quad (1.16)$$

Здесь для n -й гармоники рядов (1.1) $\mathbf{K}_u \tilde{\mathbf{u}}^n$ — матрица жесткости оболочки, \mathbf{Q}^n — вектор обобщенных узловых сил оболочки, $(\mathbf{u}^n)^T = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m+1}\}$ — вектор амплитуд n -й гармоники узловых перемещений.

Матрицы $\mathbf{K}_u \tilde{\mathbf{u}}^n$, $\mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{u}}^k$, $\mathbf{K}_2 \tilde{\mathbf{u}}^j$ имеют трехленточное блочно-диагональное строение, структура их аналогична структуре матрицы \mathbf{K}_b° в [1]. Систему (1.16) необходимо преобразовать с учетом граничных условий. Для этого элементы строк матриц $\mathbf{K}_u \tilde{\mathbf{u}}^n$, $\mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{u}}^k$, $\mathbf{K}_2 \tilde{\mathbf{u}}^j$, соответствующие заданному перемещению, полагаются равными нулю. На место диагонального элемента заносится большое число. Элементы вектора \mathbf{Q}^n , соответствующие заданному перемещению, полагаются равными нулю.

2. Для решения системы (1.16) задается небольшое значение уровня нагрузки. За нулевое приближение принимается решение линейной задачи. Выполняется итерационный процесс. Далее нагрузка увеличивается. Решение, полученное на предыдущем уровне нагрузки, берется за нулевое приближение; выполняется итерационный процесс, в котором нелинейные слагаемые берутся с предыдущего шага итераций. На каждой итерации система линейных алгебраических уравнений решается методом квадратного корня по схеме Холецкого. Схему итерационного процесса запишем в виде (r — номер итерации):

$$\sum_n \mathbf{K}_u \tilde{\mathbf{u}}_r^n = \sum_n (\mathbf{Q}^n - \sum_k (\mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{u}}_r^k + 2\mathbf{K}_1^T \tilde{\mathbf{u}}_r^k) - \sum_k \sum_j \mathbf{K}_2 \tilde{\mathbf{u}}_r^j) \quad (2.1)$$

Представляя матрицу K_u в виде произведения

$$K_u = GG^T \quad (2.2)$$

получаем решение этой системы

$$u_r^n = G^{-1}z, \quad z = (G^{-1})^T Q' \quad (2.3)$$

$$Q' = Q^{\sim n} - \sum_k (K_1^{\sim} + 2K_1^{\sim T}) u_{r-1}^k - \sum_k \sum_j K_2^{\sim} u_{r-1}^j$$

Элементы матрицы G вычисляются по рекуррентным формулам (H — максимальная ширина ленты)

$$G_{11} = \sqrt{h_{11}}, \quad G_{1j} = k_{1j}/G_{11} \quad (j=2, \dots, H) \quad (2.4)$$

$$G_{ii} = \left[k_{ii} - \sum_{n=i-1} G_{ni}^2 \right]^{1/2} \quad (i>1), \quad G_{ij} = \left(k_{ij} - \sum_{n=i-1} G_{ni} G_{nj} \right) G_{ii}^{-1} \quad (i, j>1)$$

Предельная нагрузка соответствует точке на кривой «нагрузка — прогиб», вблизи которой начинается интенсивный рост перемещений и их производных.

Полученный алгоритм реализован программой для машины БЭСМ-6 и позволяет стандартно решать задачи нелинейного деформирования оболочек при различных нагрузках и граничных условиях.

3. В качестве примера исследуется задача нелинейного деформирования свободно опертой круговой цилиндрической оболочки, нагруженной погонными краевыми усилиями сжатия N_0 по p площадкам размером $\gamma = \pi/p$. Площадки расположены с периодом 2γ . На одном из краев осевое смещение полагалось равным нулю. Разлагая усилия сжатия в ряд Фурье, получаем контурные усилия в виде функции угла

$$N_1 = N_0 \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi\varphi}{\gamma} \right) \quad (3.1)$$

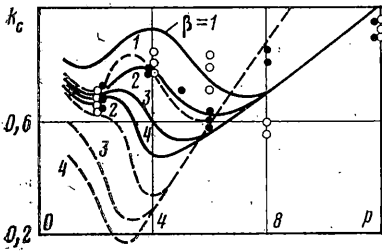
Результаты расчетов оболочек с $R/h=100$ показаны на фиг. 1—6, где сплошные линии соответствуют свободно опертым оболочкам, пунктирные — оболочкам со свободным краем. На фиг. 2—4 результаты получены при $\beta = k_2 L = 2$, а на фиг. 5, 6 при $\beta = 3$ и $\beta = 1$ соответственно.

На фиг. 1 показаны зависимости безразмерного параметра $k_c = N_0^*/T_*$ (N_0^* — предельное значение N_0 , T_* — верхнее критическое усилие однородного сжатия) от числа площадок p для оболочек различной длины. Светлыми и темными точками нанесены экспериментальные значения k_c [2] соответственно при $\beta = 1, 2$.

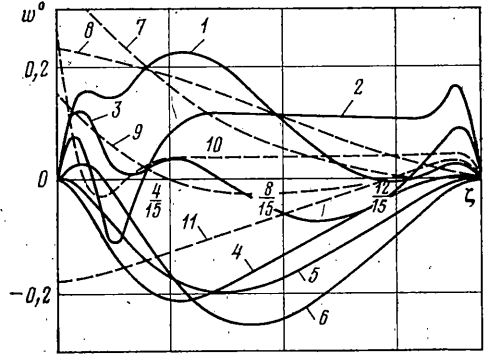
На фиг. 2, 6 при различных значениях p и $k_p = N_0/T_*$ на развертке части оболочки, равной длине площадки нагружения, показаны значения наибольших по длине оболочки относительных окружных усилий и прогибов $w^0 = w/h$; кривые 1—6 на фиг. 2 соответствуют следующим сочетаниям параметров p и k_p : 5, 0,6; 7, 0,6; 2, 0,8; 3, 0,7; 1, 0,6; 2, 0,3, а на фиг. 6 параметры p и k_p равны: 1, 0,7; 2, 0,7; 3, 0,7; 5, 0,3; 7, 0,3; 4, 0,7.

На фиг. 3—5 показано изменение по длине оболочки наибольших прогибов w^0 , относительных осевых и окружных усилий. Кривые 1—11 на фиг. 3 соответствуют следующим значениям параметров p и k_p : 2, 0,6; 14, 1,3; 1, 0,65; 6, 0,2; 4, 0,2; 3, 0,4; 4, 0,1; 2, 0,2; 6, 0,1; 14, 1,0; 1, 0,5; на фиг. 4 кривые 1—8 построены для p и k_p равных: 1, 0,6; 3, 0,7; 5, 0,6; 2, 0,6; 7, 0,6; 2, 0,6; 6, 0,6; 4, 0,3; кривые 1—4 на фиг. 5 соответствуют следующим сочетаниям p и k_p : 4, 0,5; 8, 0,7; 4, 0,3; 8, 0,8.

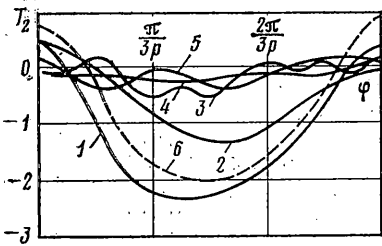
При $p < 12$ величина k_c меньше единицы. Это объясняется влиянием моментности и нелинейности напряженно-деформированного состояния оболочек. Минимальные k_c соответствуют нагружению с числом площадок p , равным числу волн p^* потери устойчивости оболочки при однородном осевом сжатии. В этом случае неоднородность нагрузки и вызванные ею прогибы находятся в «резонансе» с собственной формой потери устойчивости оболочки. В оболочке возникают большие окружные усилия T_2 , способствующие потере несущей способности оболочки (фиг. 2, $p=5$, $k_p=0,6$, кривая 1). Оболочка деформируется по длине с образованием одной полу-волны, как при потере устойчивости от внешнего давления (фиг. 3; $p=6$, $k_p=0,2$, кривая 4).



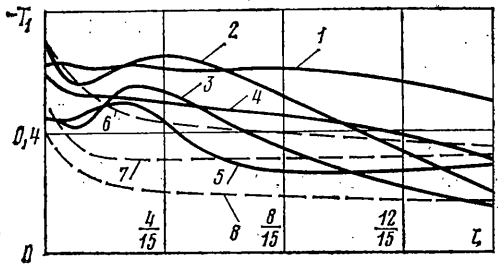
Фиг. 1



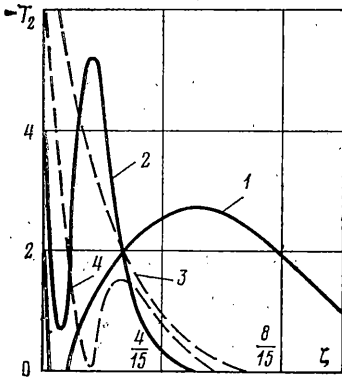
Фиг. 3



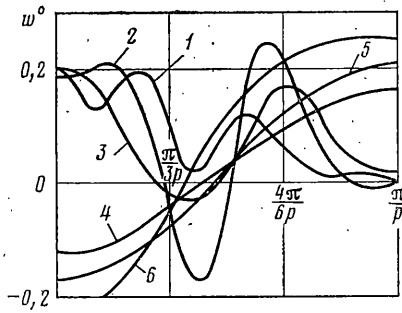
Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

При $p \geq 8$ величина k_c не зависит от длины оболочки и монотонно возрастает с увеличением параметра p . Это связано с тем, что при больших p возникающие в оболочке осевые усилия быстро выравниваются у нагруженного края, большая часть оболочки находится в условиях однородного сжатия (фиг. 4; $p=6$, $k_p=0,6$, кривая 7) и возникающие в середине оболочки усилия T_2 падают (фиг. 2; $p=7$, $k_p=0,6$, кривая 2). Оболочка в этом случае деформируется по длине по форме, близкой к осесимметричной, с максимальными прогибами у ненагруженного края (фиг. 3; $p=14$, $k_p=1,3$, кривая 2).

При $1 \leq p \leq p^*/2$ величина k_c с увеличением p возрастает и тем значительнее, чем короче оболочка. Это связано с тем, что при увеличении параметра p в указанном диапазоне влияние моментности падает: усилия T_2 уменьшаются (фиг. 2; $p=1, 2, 3$, кривые 3, 4, 5). При этом качественно меняется форма предельного деформирования. Если при $p < p^*/2$ прогибы и окружные усилия T_2 изменяются по окружности с числом волн p^* , то при $p \geq p^*/2$ по окружности оболочка деформируется с числом волн p , а окружные усилия T_2 изменяются с числом волн $2p$ (фиг. 2, 6).

При $p \leq 7$ предельное усилие оболочки со свободным краем меньше предельного усилия оболочки с опертым краем. Это объясняется тем, что в оболочке со свободным краем из-за большой ее податливости возникают большие усилия T_2 (фиг. 5; $p=4$, кривая 3). При $p > 7$ в оболочке со свободным краем влияние окружных усилий T_2 падает быстрее (фиг. 5; $p=8$, кривая 4). Предельное усилие в этом случае меньше у оболочки с опертыми краями. Наблюдается относительно хорошее совпадение расчета с экспериментом.

Все результаты получены при числе конечных элементов $m=308$. При этом обеспечивается сходимость решения с погрешностью не более 5%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кабанов В. В., Железнов Л. П. Исследование устойчивости цилиндрических оболочек при неоднородном напряженном состоянии методом конечных элементов.— Прикл. механика, 1978, т. 14, № 3, с. 45.
2. Бинкевич Е. В., Красовский В. Л. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек при неоднородном сжатии.— Тр. VIII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1973, с. 246.

Новосибирск

Поступила в редакцию
26.III.1979