МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1981

УДК 539.376

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СТАРЕЮЩИХ ТЕЛ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

АРУТЮНЯН Н. Х., ШОЙХЕТ Б. А.

При определенных ограничениях на ядра релаксации и внешние воздействия доказывается, что решение краевой задачи теории ползучести неоднородно-стареющих тел с односторонними идеальными связями стремится с ростом времени к пределу, являющемуся решением некоторой задачи теории упругости с односторонними идеальными связями.

Под односторонними связями на границе понимается произвольная система жестких криволинейных штампов без трения; односторонние связи внутри тела являются системой бесконечно тонких разрезов (трещин), смещения берегов которых ограничены условием непроникания.

Асимптотическая устойчивость решения краевой задачи вязкоупругости для однородных тел без односторонних связей рассматривалась в [1], а разрешимость задачи вязкоупругости — в [2—5] [1].

1. Реологические уравнения для наследственных однородно-стареющих сред получены в [6]:

$$e_{ij}(t)=\frac{s_{ij}(t)}{2G(t)}-\int_0^t\frac{s_{ij}(\tau)}{2G(\tau)}K_1(t,\tau)\,d\tau$$

$$e(t)=\frac{\sigma(t)}{E^*(t)}-\int_0^t\frac{\sigma(\tau)}{E^*(\tau)}K_2(t,\tau)\,d\tau$$

$$e\equiv\varepsilon_{ii}/3,\quad \sigma\equiv\sigma_{ii}/3,\quad e_{ij}\equiv\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}e,\quad S_{ij}\equiv\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma$$

$$K_1(t,\tau)=G(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{G(\tau)}+\omega(t,\tau)\right] \tag{1.1}$$

$$K_2(t,\tau)=E^*(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E^*(\tau)}+C^*(t,\tau)\right]$$

Здесь $E^*(t)$, $C^*(t,\tau)$ — мгновенный модуль упругости и мера ползучести при всестороннем растяжении (сжатии), $G(t)$, $\omega(t,\tau)$ — мгновенный модуль сдвига и мера ползучести при чистом сдвиге, δ_{ij} — символ Кронекера.

В приложениях неоднородность обычно возникает по двум причинам: при рассмотрении ползучести тел, составленных из разных материалов (см., например, [7, 8]), тогда $E^*=E^*(t,\mathbf{x})$, $G=G(t,\mathbf{x})$, $\omega=\omega(t,\tau,\mathbf{x})$, $C^*=C^*(t,\tau,\mathbf{x})$, или в телах, различные элементы которых изготовлены в разные моменты времени; для этого случая в [9, 10] предложено обобщение закона (1.1) следующего вида. Вводится функция неоднородного ста-

[1] См. также *Орлов В. С.* О решении смешанной задачи нелинейной термовязкоупругости.— В кн.: Смешанные задачи механики деформируемого тела: Тез. докл. Всес. научн. конф. Ростовск. ун-т, 1977, ч. 1, с. 137.

рения $\varkappa(\mathbf{x})$, характеризующая закон изменения возраста материала в зависимости от координат $\mathbf{x}$, и уравнения (1.1) преобразуются к виду

$$e_{ij}(t,\mathbf{x})=\frac{s_{ij}(t,\mathbf{x})}{2G(t+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})}-\int_0^t\frac{s_{ij}(\tau,\mathbf{x})}{2G(\tau+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})}K_1(t+\varkappa(\mathbf{x}),\tau+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})\,d\tau$$

$$e(t,\mathbf{x})=\frac{\sigma(t,\mathbf{x})}{E^*(t+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})}-\int_0^t\frac{\sigma(\tau,\mathbf{x})}{E^*(\tau+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})}K_2(t+\varkappa(\mathbf{x}),\tau+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})\,d\tau \tag{1.2}$$

Ядра ползучести K_1, K_2 (а следовательно, и ядра сдвиговой и объемной релаксации R_1, R_2), как правило, при $t\to\tau$ имеют асимптотику $(t-\tau)^{-\alpha}$, $\alpha<1$.

Запишем закон, обратный (1.2):

$$\frac{s_{ij}(t,\mathbf{x})}{2G(t+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})}=e_{ij}(t,\mathbf{x})-\int_0^t R_1(t+\varkappa(\mathbf{x}),\tau+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})\,e_{ij}(\tau,\mathbf{x})\,d\tau$$

$$\frac{\sigma(t,\mathbf{x})}{E^*(t+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})}=e(t,\mathbf{x})-\int_0^t R_2(t+\varkappa(\mathbf{x}),\tau+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})\,e(\tau,\mathbf{x})\,d\tau \tag{1.3}$$

где ядра релаксации R_1, R_2 суть резольвенты ядер ползучести K_1, K_2.

Сформулируем следующие из механических соображений ограничения на закон ползучести, при которых имеет место асимптотическая устойчивость рассматриваемой задачи ползучести. Область, занятую телом, обозначим Ω.

1. Упругомгновенные модули $E^*(t,\mathbf{x})$, $G(t,\mathbf{x})$ непрерывны по t и не вырождаются при $t\in[0,\infty)$, т. е. существуют положительные константы E_1, E_2, G_1, G_2, такие, что

$$E_1\leqslant E^*(t,\mathbf{x})\leqslant E_2,\quad G_1\leqslant G(t,\mathbf{x})\leqslant G_2 \text{ при } t\in[0,\infty),\ x\in\Omega \tag{1.4}$$

и при росте t модули $E^*(t,\mathbf{x})$, $G(t,\mathbf{x})$ возрастают, равномерно по $x\in\Omega$ стремясь к конечным пределам $E_0^*(\mathbf{x})$, $G_0(\mathbf{x})$ — упругомгновенным модулям состарившегося материала.

2. Функция неоднородного старения $\varkappa(\mathbf{x})$ ограничена и кусочно-непрерывна по $\mathbf{x}$, т. е. рассматриваются тела, изготовленные как непрерывным наращиванием, так и составленные из нескольких частей, каждая из которых изготовлена мгновенно в некоторый момент времени.

3. Ядра релаксации представимы в виде

$$R_i(t,\tau,\mathbf{x})=r_i(t,\tau,\mathbf{x})(t-\tau)^{-\alpha}+r_i^*(t,\tau,\mathbf{x}),\quad \alpha<1 \quad (i=1,2) \tag{1.5}$$

где функции r_i, r_i^* ограничены и непрерывны по t, τ; первое слагаемое — сингулярная часть ядра релаксации, второе — его регулярная часть.

Отметим, что предел при $t\to\infty$ ядер R_i равен пределу их регулярных частей и для стареющих тел не может равняться нулю, что отражает основные характерные свойства явлений ползучести в стареющих телах и материалах [11].

4. Зафиксируем t, τ и обозначим максимумы значений ядер релаксации $R_1(t,\tau,\mathbf{x})$ и $R_2(t,\tau,\mathbf{x})$ по всем $\mathbf{x}\in\Omega$ через $q_1(t,\tau)$ и $q_2(t,\tau)$:

$$q_i(t,\tau)=\max_{\mathbf{x}\in\Omega}R_i(t,\tau,\mathbf{x})\quad (i=1,2) \tag{1.6}$$

Обозначим через $R(t, \tau)$ функцию, равную максимуму из q_1, q_2:

$$R(t, \tau) = \max\{q_1(t, \tau),\ q_2(t, \tau)\} \tag{1.7}$$

Наиболее существенное из принимаемых на закон ползучести ограничений формулируется так: при любых t справедливо неравенство (m — положительная константа)

$$\int_0^t R(t, \tau)\,d\tau \leqslant m, \qquad m<1 \tag{1.8}$$

Выясним смысл условия (1.8). Из механических соображений следует, что закон релаксации обладает следующим свойством (назовем его свойством A): при заданной единичной деформации объемного расширения (или сдвига) объемное напряжение (соответственно сдвиговое напряжение) остается положительным. (Например, ядра, предложенные в [6] для описания ползучести бетона, удовлетворяют указанному свойству.)

Очевидно, условие (1.8) гарантирует наличие свойства A при любом $x \in \Omega$. В самом деле, пусть (1.8) справедливо и задана чисто объемная деформация: $e=1$, $e_{ij}=0$ $(i, j=1, 2, 3)$; тогда из (1.3) — (1.8) получим

$$\frac{\sigma}{E^*} = 1 - \int_0^t R_2\,d\tau \geqslant 1 - \int_0^t R\,d\tau \geqslant 1 - m > 0$$

Аналогично, при $e_{ij}=1$ будем иметь $\frac{1}{2} s_{ij}/G \geqslant 1-m>0$.

Во многих практически важных случаях из свойства A следует условие (1.8), например для однородного тела, ядра сдвиговой и объемной деформации которого совпадают, или для тела, у которого одно из ядер R_1, R_2 при любых t, τ больше другого ядра, и т. д.

5. При любом $\Delta t>0$ справедливы неравенства

$$R_i(t, \tau, \mathbf{x}) \geqslant R_i(t+\Delta t, \tau+\Delta t, \mathbf{x}) \qquad (\forall \mathbf{x} \in \Omega) \quad (i=1, 2) \tag{1.9}$$

Действительно, пусть $\varkappa(\mathbf{x})=0$, зададим в (1.3) какую-либо компоненту деформации, например объемное расширение e, равной δ-функции, приложенной в момент времени τ; тогда $\sigma(t, \mathbf{x}) = -E^*(t, \mathbf{x}) R_2(t, \tau, \mathbf{x})$ — остаточное напряжение за промежуток времени $t-\tau$. Далее зададим деформацию e равной δ-функции, приложенной в момент времени $\tau+\Delta t$, тогда $\sigma(t+\Delta t, \mathbf{x}) = -E^*(t+\Delta t, \mathbf{x}) R_2(t+\Delta t, \tau+\Delta t, \mathbf{x})$ — остаточное напряжение за тот же промежуток времени от дельта-импульса деформации, приложенного в момент времени $\tau+\Delta t$, т. е. к более старому материалу, поэтому естественно считать, что $|\sigma(t, \mathbf{x})| \geqslant |\sigma(t+\Delta t, \mathbf{x})|$, отсюда с учетом роста модуля во времени тем более следует (1.9).

6. При росте τ ядра релаксации стремятся к разностным ядрам релаксации $R_i^\circ(t-\tau, \mathbf{x})$ состарившегося материала в следующем смысле: функции $\psi_i(t, \xi)$, задаваемые формулой

$$\psi_i(t, \xi) = \int_\xi^t \max_{\mathbf{x} \in \Omega} [R_i(t, \tau, \mathbf{x}) - R_i^\circ(t-\tau, \mathbf{x})]\,d\tau \quad (i=1,2) \tag{1.10}$$

стремятся к нулю при $\xi \to \infty$ равномерно по $t \geqslant \xi$, т. е. при достаточно больших ξ релаксация от приложенной в момент ξ единичной деформации становится сколь угодно близкой к релаксации состарившегося материала.

7. Справедливы неравенства, обосновываемые так же, как и (1.9):

$$R_i(t, \tau, \mathbf{x}) \geqslant R_i^\circ(t-\tau, \mathbf{x}) \qquad (\forall t, \tau,\ \forall \mathbf{x} \in \Omega) \tag{1.11}$$

8. При каждом τ ядра $R_i(t, \tau, \mathbf{x})$ убывают с ростом t и стремятся при $t\to\infty$ к функциям $\mu_i(\tau, \mathbf{x})$:

$$R_i(t, \tau, \mathbf{x})\to\mu_i(\tau, \mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t\to\infty, \quad (\mathbf{x}\in\Omega) \quad {\scriptstyle (i=1,\,2)} \tag{1.12}$$

Убывание $R_i(t, \tau, \mathbf{x})$ по t означает уменьшение по абсолютной величине остаточного напряжения от дельта-импульса деформации, приложенного в момент времени τ, а смысл функции $-\mu_i(\tau, \mathbf{x})$ — предельное остаточное напряжение от данного дельта-импульса.

Предполагается, что сходимость в (1.12) равномерная по $x\in\Omega$ и при изменении τ в любом ограниченном интервале времени.

2. Сформулируем задачу ползучести с идеальными односторонними связями.

Пусть кусочно-гладкая [12] граница $\partial\Omega$ области Ω состоит из трех поверхностей: $\partial\Omega=S_u\cup S_0\cup S$. На S_u тело защемлено, на S_0 тело взаимодействует с жестким криволинейным штампом без трения; поверхность S является системой бесконечно тонких разрезов в теле Ω. Одну произвольно выбранную поверхность разрезов обозначим S^+, другую — S^-, поверхности S^+, S^- считаем геометрически совпадающими с S.

Система уравнений в этом случае имеет вид

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})=2^{-1}(u_{i,\,j}+u_{j,\,i}) \quad {\scriptstyle (i,\,j=1,\,2,\,3)} \tag{2.1}$$

$$\sigma_{ij,\,j}+f_i=0, \quad \sigma_{ij}=\sigma_{ji}, \quad \mathbf{x}\in\Omega \tag{2.2}$$

$$u_i=0 \text{ на } S_u, \quad u_n\leqslant 0 \text{ на } S_0, \quad \Delta u_n\leqslant 0 \text{ на } S \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau=0, \quad \sigma_n\leqslant 0, \quad \sigma_n u_n=0 \text{ на } S_0 \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau^+=\boldsymbol{\sigma}_\tau^-=0, \quad \sigma_n\equiv\sigma_n^+=\sigma_n^-\leqslant 0, \quad \sigma_n\Delta u_n=0 \text{ на } S, \quad \Delta u_n\equiv u_n^++u_n^- \tag{2.5}$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}=\{\varepsilon_{ij}\}$, $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_{ij}\}$ — декартовы компоненты тензоров деформаций и напряжений, $\mathbf{u}=\{u_i\}$ — поле перемещений, $\mathbf{f}=\{f_i\}$ — вектор объемных сил, $\mathbf{n}=\{n_i\}$ — вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$, $\mathbf{n}^+$, $\mathbf{n}^-$ — значения вектора внешней нормали $\mathbf{n}$ на поверхностях S^+, S^-, $\boldsymbol{\sigma}_n=\{\sigma_{ij}n_j\}$ — вектор напряжений на площадке с нормалью $\mathbf{n}$, $\sigma_n=\sigma_{ij}n_in_j$, $u_n=u_in_i$ — нормальные компоненты векторов напряжений и перемещений, $\boldsymbol{\sigma}_\tau=\boldsymbol{\sigma}_n-\sigma_n\mathbf{n}$ — вектор касательных напряжений, $\boldsymbol{\sigma}_n^\pm=\{\sigma_{ij}^\pm n_j^\pm\}$ — векторы напряжений на $S^\pm$, $\sigma_n^\pm$, $u_n^\pm$ — нормальные компоненты векторов напряжений и перемещений на $S^\pm$, $\boldsymbol{\sigma}_\tau^\pm$ — векторы касательных напряжений на $S^\pm$, Δu_n — взаимное нормальное смещение берегов разреза S.

Предположим, что кинематическое граничное условие $\mathbf{u}=0$ на S_u запрещает смещение тела как жесткого целого, т. е. если $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})=0$, то $\mathbf{u}=0$.

Совокупность уравнений (1.3), (2.1)—(2.5) назовем задачей в дифференциальной постановке.

Ввиду условий невырожденности (1.4) в рассматриваемой задаче естественно искать решение в классе полей перемещений $\mathbf{u}$, имеющих суммируемые с квадратом первые производные по пространственным координатам $\mathbf{x}$, что обеспечивает конечность упругомгновенной энергии деформации.

Далее, естественно допускать мгновенные приложения нагрузок, т. е. считать, что воздействия могут иметь разрывы по t. Поэтому будут использоваться следующие функциональные пространства.

Пространство $L_2(\Omega)$ (для краткости обозначим его буквой H) — пространство функций v, суммируемых с квадратом в области Ω; норма в H задается равенством

$$\|v\|_H=(v, v)_\Omega^{1/2}, \qquad (v, g)_\Omega=\int\limits_\Omega vg\,dx$$

Той же буквой H будем обозначать пространство вектор-функций $\mathbf{f}=\{f_i\}$ и тензорных полей второго ранга $\boldsymbol{\varepsilon}=\{\varepsilon_{ij}\}$, компоненты которых суммируемы с квадратом в области Ω; нормы в H зададим равенствами

$$\|\mathbf{f}\|_H=(\mathbf{f},\mathbf{f})_\Omega^{1/2},\quad (\mathbf{f},\mathbf{g})_\Omega=\int_\Omega(\mathbf{f},\mathbf{g})\,dx,\quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_H=(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon})_\Omega^{1/2},\quad (\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma})_\Omega=\int_\Omega(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma})\,dx$$

Пространство $(W_2^1(\Omega))^3$ — пространство С. Л. Соболева вектор-функций $\mathbf{u}=\{u_i\}$, компоненты которых заданы в Ω, суммируемы с квадратом и имеют первые производные, суммируемые с квадратом; для краткости обозначим это пространство буквой V; норма в V задается равенством

$$\|\mathbf{u}\|_V=\left(\|\mathbf{u}\|_H^2+\sum_{i,j=1}^{3}\|u_{i,j}\|_H^2\right)^{1/2}$$

Введем множество V кинематически допустимых полей перемещений, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям (2.3)

$$V_0=\{\mathbf{u}\,|\,\mathbf{u}=\{u_i\}\in V,\ \mathbf{u}=0 \text{ на } S_u,\ u_n\leqslant 0 \text{ на } S_0,\ \Delta u_n\leqslant 0 \text{ на } S\}$$

Пространство $L^\infty(0,T;B)$ — пространство отображений $v(t)$ отрезка $[0,T]$ в некоторое нормированное пространство B, таких, что при почти всех $t\in[0,T]$ нормы $\|v(t)\|_B$ ограничены одной и той же константой, т. е. конечна норма

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;B)}=\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{ess}\|v(t)\|_B \tag{2.6}$$

Заданные нагрузки $\mathbf{f}$ и искомые величины $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ — функции времени t и пространственных координат $\mathbf{x}$; очевидно, любую из этих величин, например нагрузку $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$, можно рассматривать как отображение, сопоставляющее каждому $t\in[0,\infty]$ вектор-функцию аргумента $\mathbf{x}$, т. е. элемент некоторого функционального пространства. Это отображение обозначим $\mathbf{f}(t)$, так что по определению $\mathbf{f}(t)$ — вектор-функция аргумента $\mathbf{x}$, такая, что $\mathbf{f}(t)(\mathbf{x})=\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$. Аналогично, отображения, порождаемые величинами $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t,\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\sigma}(t,\mathbf{x})$, будем обозначать $\mathbf{u}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, $\boldsymbol{\sigma}(t)$.

Определение. Обобщенным решением задачи ползучести (1.3), (2.1)—(2.5) называются величины $\mathbf{u}^*(t,x)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^*(t,x)$, $\boldsymbol{\sigma}^*(t,x)$, такие, что

$$\mathbf{u}^*\in L^\infty(0,\infty;V),\qquad \mathbf{u}^*(t)\in V_0 \text{ при } t\in[0,\infty) \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*\in L^\infty(0,\infty;H),\quad \boldsymbol{\sigma}^*\in L^\infty(0,\infty;H),\quad \boldsymbol{\varepsilon}^*(t)=\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*(t)),\quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\equiv\{\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\}$$

где σ_{ij}^*, ε_{ij}^* связаны законом ползучести (1.3) и при почти всех $t\in[0,\infty]$ напряжения $\boldsymbol{\sigma}^*(t)$ удовлетворяют вариационному неравенству

$$(\boldsymbol{\sigma}^*(t),\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})-\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*(t)))_\Omega-(\mathbf{f}(t),\mathbf{u}-\mathbf{u}^*(t))_\Omega\geqslant 0\quad (\forall\mathbf{u}\in V_0) \tag{2.8}$$

Нетрудно проверить следующее положение [5]: если компоненты σ_{ij}^* непрерывно дифференцируемы по координатам x_i, то из вариационного неравенства (2.8) следует, что σ_{ij}^* удовлетворяют уравнениям (2.2), (2.4) и (2.5); это означает, что понятие обобщенного решения задачи ползучести действительно является обобщением понятия решения задачи ползучести.

3. Сформулируем основные результаты работы.

Теорема. Пусть нагрузка $\mathbf{f}\in L^\infty(0,\infty;H)$, при $t\to\infty$ нагрузка $\mathbf{f}(t)$ стремится в метрике H к некоторой не зависящей от времени нагрузке $\mathbf{f}^\circ\in H$ и справедливы ограничения 1—8 на закон релаксации.

Тогда существует единственное обобщенное решение $\mathbf{u}^*$, $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, $\boldsymbol{\sigma}^*$ задачи ползучести, стремящееся при $t\to\infty$ к предельным полям перемещений, деформаций и напряжений $\mathbf{u}^\circ \in V_0$, $\boldsymbol{\varepsilon}^\circ \in H$, $\boldsymbol{\sigma}^\circ \in H$, т. е.

$$\|\mathbf{u}^*(t)-\mathbf{u}^\circ\|_V \to 0, \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)-\boldsymbol{\varepsilon}^\circ\|_H \to 0, \quad \|\boldsymbol{\sigma}^*(t)-\boldsymbol{\sigma}^\circ\|_H \to 0 \text{ при } t\to\infty \tag{3.1}$$

причем $\mathbf{u}^\circ$, $\boldsymbol{\varepsilon}^\circ$, $\boldsymbol{\sigma}^\circ$ — решение задачи упругости с идеальными односторонними связями [5] с предельной нагрузкой и реологическим законом

$$s_{ij}^\circ(\mathbf{x})/G_0(\mathbf{x}) = (1-R_1^\infty(\mathbf{x}))\,e_{ij}^\circ(\mathbf{x}) - e_{ij}^B(\mathbf{x})$$

$$\sigma^\circ(\mathbf{x})/E_0^*(\mathbf{x}) = (1-R_2^\infty(\mathbf{x}))\,e(\mathbf{x}) - e^B(\mathbf{x})$$

$$e_{ij}^B(\mathbf{x}) \equiv \int_0^\infty \mu_1(\tau,\mathbf{x})\,e_{ij}^*(\tau,\mathbf{x})\,d\tau, \qquad e^B(\mathbf{x}) \equiv \int_0^\infty \mu_2(\tau,\mathbf{x})\,e^*(\tau,\mathbf{x})\,d\tau \tag{3.2}$$

$$R_i^\infty(\mathbf{x}) \equiv \int_0^\infty R_i^0(\tau,\mathbf{x})\,d\tau, \qquad R_i^\infty(\mathbf{x}) \leqslant m < 1 \quad (i=1,2)$$

где величины $e_{ij}^B(\mathbf{x})$, $e^B(\mathbf{x})$ принадлежат пространству H.

Замечание 1. Величины e_{ij}^B, e^B зависят от истории нагружения. Поэтому предельное напряженно-деформированное состояние u°, ε°, σ° нельзя найти не проследив весь ход деформирования. Однако в частном случае, когда материал нестареющий (т. е. $R_i(t,\tau,\mathbf{x}) = R_i^\circ(t-\tau,\mathbf{x})$, $i=1,2$), функции $\mu_i(\tau,\mathbf{x})=0$ и, следовательно, $e_{ij}^B = e^B = 0$. Поэтому предельное состояние может быть найдено прямо из решения задачи упругости с идеальными односторонними связями.

Действительно, тогда из условия (1.12) следует монотонное убывание функции $R_i^\circ(t,x)$, а из условия (1.8) $R_i^\circ(t,\mathbf{x})\to 0$ при $t\to\infty$, откуда $\mu_i(\tau,\mathbf{x})=0$.

Далее, если регулярные части ядер релаксации равны нулю, то функции μ_1, μ_2 также равны нулю. Значит, как и для нестареющего материала, предельное напряженно-деформированное состояние не зависит от хода деформации; например, если предельная нагрузка $\mathbf{f}^\circ$ равна нулю, то предельное напряженно-деформированное состояние также равно нулю, что означает полную обратимость деформации ползучести. Отсюда следует, что такие ядра не отражают основных свойств упругоползучих стареющих тел.

Замечание 2. Теорема легко обобщается на случай других внешних воздействий — поверхностной нагрузки, заданных ненулевых перемещений на границе и вынужденных деформаций; полная формулировка и доказательство здесь не приводятся.

4. Доказательство теоремы разобьем на ряд лемм. Ниже используется следствие обобщенного неравенства Минковского [13], которое сформулируем в виде леммы.

Лемма 1. Пусть функция $\varphi(t,\mathbf{x})$ задана при $\mathbf{x}\in\Omega$ формулой

$$\varphi(t,\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t} K(t,\tau,\mathbf{x})\,f(\tau,\mathbf{x})\,d\tau \tag{4.1}$$

Тогда имеет место оценка

$$\|\varphi(t)\|_H \leqslant \int_{t_0}^{t} K^m(t,\tau)\,\|f(\tau)\|_H\,d\tau \leqslant \int_{t_0}^{t} K^m(t,\tau)\,d\tau \max_{t_0\leqslant\tau\leqslant t}\|f(\tau)\|_H \tag{4.2}$$

$$K^m(t,\tau) \equiv \max_{\mathbf{x}\in\Omega} |K(t,\tau,\mathbf{x})|$$

Доказательство. Из (4.1) и обобщенного неравенства Минковского следует

$$\|\varphi(t)\|_H = \left(\int_\Omega dx \left(\int_{t_0}^{t} K(t,\tau,\mathbf{x})\,f(\tau,\mathbf{x})\,d\tau\right)^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} d\tau \left(\int_{\Omega} |K(t,\tau,\mathbf{x}) f(\tau,\mathbf{x})|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} K^m(t,\tau) \left(\int_{\Omega} |f(\tau,\mathbf{x})|^2 dx \right)^{1/2} d\tau = \int_{t_0}^{t} K^m(t,\tau) \|f(\tau)\|_H \, d\tau$$

Пусть T — произвольный момент времени, рассмотрим интегральные члены в правой части (1.3) как оператор, переводящий элемент $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\} \in L^\infty(0, T; H)$ в элемент $\mathbf{b}(\varepsilon) \in L^\infty(0, T; H)$:

$$b_{ij}'(\varepsilon)(t,\mathbf{x}) = \int_0^t R_1(t,\tau,\mathbf{x}) e_{ij}(\tau,\mathbf{x}) d\tau, \quad b(\varepsilon) = \int_0^t R_2(t,\tau,\mathbf{x}) e(\tau,\mathbf{x}) d\tau$$

$$\mathbf{b}(\varepsilon) \equiv \{b_{ij}(\varepsilon)\}, \quad b(\varepsilon) = {}^1/_3 b_{ii}(\varepsilon), \quad b_{ij}'(\varepsilon) = b_{ij}(\varepsilon) - \delta_{ij} b(\varepsilon) \tag{4.3}$$

Лемма 2. Оператор $\mathbf{b}(\varepsilon)$ в (4.3) — непрерывный оператор $L^\infty(0, T; H) \to L^\infty(0, T; H)$ со свойствами

$$\|\mathbf{b}(\varepsilon)\|_{L^\infty(0,t;H)} \leqslant \frac{M}{\beta} t^\beta \|\varepsilon\|_{L^\infty(0,t;H)} \quad (\forall t \in [0, T]) \tag{4.4}$$

где M — положительная константа, $\beta \equiv 1 - \alpha$.

Доказательство. В силу условий 3 существует $M = \text{const}$, такое, что

$$|\mathbf{b}(\varepsilon)(t,\mathbf{x})| \leqslant \int_0^t M(t-\tau)^{-\alpha} |\varepsilon(\tau,\mathbf{x})| d\tau \tag{4.5}$$

Тогда по лемме 1

$$\|\mathbf{b}(\varepsilon)(t)\|_H \leqslant \int_0^t M(t-\tau)^{-\alpha} d\tau \max_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \|\varepsilon(\tau)\|_H = \frac{M}{\beta} t^\beta \|\varepsilon\|_{L^\infty(0,t;H)}$$

и лемма 2 доказана.

При каждых фиксированных t, $\mathbf{x}$ введем упругомгновенную удельную энергию деформации $A(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$:

$$A(t,\mathbf{x},\varepsilon) = {}^1/_2 [3E^*(t+\varkappa(\mathbf{x}), \mathbf{x}) e^2 + 2G(t+\varkappa(\mathbf{x}), \mathbf{x}) e_{ij} e_{ij}] \tag{4.6}$$
$$A_{ij} \equiv \partial A / \partial \varepsilon_{ij}, \quad \nabla A \equiv \{A_{ij}\}$$

Закон (3) с учетом обозначений (4.6), (4.3) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\sigma = \nabla A(\varepsilon - \mathbf{b}(\varepsilon)) \quad \text{или} \quad \sigma_{ij} = A_{ij}(\varepsilon - \mathbf{b}(\varepsilon)) \tag{4.7}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу, которую назовем задачей P.

Пусть $\mathbf{b} = \{b_{ij}\} \in H$, $f = \{f_i\} \in H$ — произвольные поля, заданные в Ω; введем функционал энергии, заданный на полях перемещений $\mathbf{u} \in V$ и зависящий как от параметров от t, $\mathbf{b}$, $\mathbf{f}$:

$$J(\mathbf{u}, t, \mathbf{b}, \mathbf{f}) = \int_\Omega A(t, \mathbf{x}, \varepsilon(\mathbf{u}) - \mathbf{b}) dx - (\mathbf{f}, \mathbf{u})_\Omega$$

Задача P: при фиксированных t, $\mathbf{b}$, $\mathbf{f}$ найти минимум функционала J по $\mathbf{u} \in V_0$.

Обозначим решение задачи P через $\mathbf{u}^\circ = \{u_i^\circ\}$, деформации, порождаемые полем $\mathbf{u}^\circ$, через ε°, напряжения задачи P положим по определению равными

$$\sigma^\circ = \{\sigma_{ij}^\circ\}, \quad \sigma_{ij}^\circ \equiv A_{ij}(\varepsilon^\circ - \mathbf{b}), \quad \varepsilon^\circ \equiv \varepsilon(\mathbf{u}^\circ) \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{4.8}$$

Решение $\mathbf{u}^\circ$, $\boldsymbol{\varepsilon}^\circ$, $\boldsymbol{\sigma}^\circ$ задачи P зависит от t, $\mathbf{b}$, $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{u}^\circ=\mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{b}, \mathbf{f}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}^\circ=\boldsymbol{\varepsilon}^\circ(t, \mathbf{b}, \mathbf{f}), \quad \boldsymbol{\sigma}^\circ=\boldsymbol{\sigma}^\circ(t, \mathbf{b}, \mathbf{f}) \tag{4.9}$$

Формулы (4.9) будем рассматривать как операторы, сопоставляющие тройке значений $\{t, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$ решение $\{\mathbf{u}^\circ, \boldsymbol{\varepsilon}^\circ, \boldsymbol{\sigma}^\circ\}$ задачи P.

Лемма 3. Пусть $\mathbf{b}\in H$, $\mathbf{f}\in H$; существует единственное решение $\{\mathbf{u}^\circ, \boldsymbol{\varepsilon}^\circ, \boldsymbol{\sigma}^\circ\}$ задачи P, $\mathbf{u}^\circ\in V_0$, $\boldsymbol{\varepsilon}^\circ\in H$, $\boldsymbol{\sigma}^\circ\in H$, причем

$$\|\mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{b}, \mathbf{f})\|_V\leqslant c_1(\|\mathbf{b}\|_H+\|\mathbf{f}\|_H), \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}^\circ(t, \mathbf{b}, \mathbf{f})\|_H\leqslant c_1(\|\mathbf{b}\|_H+\|\mathbf{f}\|_H) \tag{4.10}$$

$$\|\mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{b}^2, \mathbf{f})-\mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{b}, \mathbf{f})\|_V\leqslant c_2\|\mathbf{b}^2-\mathbf{b}^1\|_H \tag{4.11}$$

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}^\circ(t, \mathbf{b}^2, \mathbf{f})-\boldsymbol{\varepsilon}^\circ(t, \mathbf{b}^1, \mathbf{f})\|_H\leqslant c_2\|\mathbf{b}^2-\mathbf{b}^1\|_H \tag{4.12}$$

Буквой c здесь и далее обозначаются различные константы.

Доказательство. Из (1.4) следует, что форма $A(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$ положительно определена

$$\frac{\gamma_1}{2}|\boldsymbol{\varepsilon}|^2\leqslant A(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})\leqslant\frac{\gamma_2}{2}|\boldsymbol{\varepsilon}|^2, \quad \gamma_1=\min\{2G_1, 3E_1\}, \quad \gamma_2=\max\{2G_2, 3E_2\} \tag{4.13}$$

Так как по условию кинематические граничные условия на S_u запрещают смещение тела как жесткого целого, то из [5] следует однозначная разрешимость задачи P, причем ее решение удовлетворяет интегральному тождеству

$$(\nabla A(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\circ)-\mathbf{b}),\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})-\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\circ))_\Omega-(\mathbf{f}, \mathbf{u}-\mathbf{u}^\circ)_\Omega\geqslant 0, \quad (\forall\mathbf{u}\in V_0) \tag{4.14}$$

Известно [14—16] неравенство Корна: для всякого поля $u\in V$, обращающегося в нуль на S_u, имеет место неравенство

$$\|\mathbf{u}\|_V\leqslant c^*\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_H \tag{4.15}$$

где константа c^* зависит от области Ω и S_u.

Подставим в (4.14) значение $u=0$. Тогда получим

$$\begin{gathered}(\nabla A(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\circ)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\circ))_\Omega\leqslant(\nabla A(\mathbf{b}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\circ))_\Omega+(\mathbf{f}, \mathbf{u}^\circ)_\Omega\leqslant\gamma_2\|\mathbf{b}\|_H\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\circ)\|_H+\\ +\|\mathbf{f}\|_H\cdot\|\mathbf{u}^\circ\|_V\end{gathered} \tag{4.16}$$

Оценивая левую часть в (4.16) снизу с использованием (4.13), а $\|\mathbf{u}^\circ\|_V$ в правой части сверху при помощи (4.15), получим

$$\gamma_1\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\circ)\|_H^2\leqslant\gamma_2\|\mathbf{b}\|_H\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\circ)\|_H+c^*\|\mathbf{f}\|_H\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\circ)\|_H \tag{4.17}$$

Сокращая обе части соотношения (4.17) на $\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\circ)\|_H$, получим вторую оценку в (4.10), из которой ввиду (4.15) немедленно следует первая в (4.10) оценка.

Пусть $\mathbf{u}^1=\mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{b}^1, \mathbf{f})$, $\mathbf{u}^2=\mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{b}^2, \mathbf{f})$; интегральные тождества (4.14), записанные для $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$ соответственно, принимают вид

$$\begin{gathered}(\nabla A(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^1)-\mathbf{b}^1),\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})-\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^1))_\Omega-(\mathbf{f}, \mathbf{u}-\mathbf{u}^1)_\Omega\geqslant 0, \quad (\forall\mathbf{u}\in V_0)\\ (\nabla A(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^2)-\mathbf{b}^2),\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})-\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^2))_\Omega-(\mathbf{f}, \mathbf{u}-\mathbf{u}^2)_\Omega\geqslant 0\end{gathered} \tag{4.18}$$

Положив в первом соотношении $\mathbf{u}=\mathbf{u}^2$, а во втором $\mathbf{u}=\mathbf{u}^1$ и сложив их, получим

$$(\nabla A(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^2)-\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^2)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^2)-\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^1))_\Omega\leqslant(\nabla A(\mathbf{b}^2-\mathbf{b}^1),\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^2)-\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^1))_\Omega \tag{4.19}$$

Из (4.19) и (4.13) следует оценка (4.12); оценка (4.11) следует из (4.12) и (4.15), лемма доказана.

Зафиксируем произвольное T и построим итерационный процесс, сходящийся к обобщенному решению задачи ползучести. Положим: $\mathbf{u}^1(t)= =u^\circ(t, 0, \mathbf{f}(t))$, $\boldsymbol{\varepsilon}^1(t)=\boldsymbol{\varepsilon}^\circ(t, 0, \mathbf{f}(t))$, $\boldsymbol{\sigma}(t)=\boldsymbol{\sigma}^\circ(t, 0, \mathbf{f}(t))$, $t\in[0, T]$.

Из оценок (4.10) следует $\mathbf{u}^1 \in L^\infty(0, T; V)$, $\varepsilon^1 \in L^\infty(0, T; H)$

$$\|\mathbf{u}^1\|_{L^\infty(0,T;V)} \leqslant c_1 \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;H)}, \qquad \|\varepsilon^1\|_{L^\infty(0,T;H)} \leqslant c_1 \|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;H)} \tag{4.20}$$

Положим $\mathbf{b}^1 = \mathbf{b}(\varepsilon^1)$. Последующие шаги задаются соотношениями

$$\begin{gathered} \mathbf{u}^k(t) = \mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{b}^{k-1}(t), \mathbf{f}(t)), \quad \varepsilon^k(t) = \varepsilon^\circ(t, \mathbf{b}^{k-1}(t), \mathbf{f}(t)) \\ \sigma^k(t) = \sigma^\circ(t, \mathbf{b}^{k-1}(t), \mathbf{f}(t)), \quad \mathbf{b}^k = \mathbf{b}(\varepsilon^k) \quad {\scriptstyle (k=2,\ 3,\ \ldots)} \end{gathered} \tag{4.21}$$

Лемма 4. Для $\forall t \in [0, T]$ справедливы оценки ($\beta \equiv 1-\alpha$)

$$\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|_{L^\infty(0,t;V)} \leqslant c^* c_4 \frac{(c_3 t^\beta)^k}{\Gamma(k\beta+1)}$$

$$c_3 \equiv c_2 M \Gamma(\beta), \qquad c_4 \equiv c_1 / (\Gamma(\beta)\beta) \tag{4.22}$$

$$\|\varepsilon^{k+1} - \varepsilon^k\|_{L^\infty(0,t;H)} \leqslant c_4 \frac{(c_3 t^\beta)^k}{\Gamma(k\beta+1)} F, \quad F \equiv \|f\|_{L^\infty(0,T;H)} \quad {\scriptstyle (k=2,3,\ldots)} \tag{4.23}$$

Здесь Γ — гамма-функция, а константы c_1, c_2 берутся из (4.10)—(4.12).

Доказательство. Из (4.4), (4.20) будем иметь

$$\|\mathbf{b}^1(t)\|_H \leqslant c_1 M t^\beta F / \beta \tag{4.24}$$

Из оценки (4.11) и определения (4.21) перемещений $\mathbf{u}^k(t)$ следует

$$\|\mathbf{u}^{k+1}(t) - \mathbf{u}^k(t)\|_V \leqslant c_2 \|\mathbf{b}^k(t) - \mathbf{b}^{k-1}(t)\|_H \quad {\scriptstyle (k=2,\ 3,\ \ldots)} \tag{4.25}$$

Для разности $\mathbf{u}^2(t) - \mathbf{u}^1(t)$ из (4.21), (4.11) и (4.24) найдем

$$\begin{gathered} \|\mathbf{u}^2(t) - \mathbf{u}^1(t)\|_V = \|\mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{b}^1(t), \mathbf{f}(t)) - \mathbf{u}^\circ(t, 0, \mathbf{f}(t))\|_V \leqslant \\ \leqslant c_2 \|\mathbf{b}^1(t)\|_H \leqslant \frac{c_2 c_1 M}{\beta} t^\beta F = I t^\beta, \quad I \equiv \frac{c_2 c_1 M}{\beta} F \end{gathered} \tag{4.26}$$

Очевидно, $\|\varepsilon(\mathbf{u})\|_H \leqslant \|\mathbf{u}\|_V$, поэтому из (4.25), (4.26) получим

$$\|\varepsilon^{k+1}(t) - \varepsilon^k(t)\|_H \leqslant c_2 \|\mathbf{b}^k(t) - \mathbf{b}^{k-1}(t)\|_H, \quad \|\varepsilon^2(t) - \varepsilon^1(t)\|_H \leqslant I t^\beta \tag{4.27}$$

Из (4.5) с учетом (4.21) следует

$$|\mathbf{b}^{k+1}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{b}^k(t, \mathbf{x})| \leqslant \int_0^t M(t-\tau)^{-\alpha} |\varepsilon^{k+1}(\tau, \mathbf{x}) - \varepsilon^k(\tau, \mathbf{x})| \, d\tau \tag{4.28}$$

Применяя к (4.28) лемму 1, придем к оценке

$$\|\mathbf{b}^{k+1}(t) - \mathbf{b}^k(t)\|_H \leqslant \int_0^t M(t-\tau)^{-\alpha} \|\varepsilon^{k+1}(\tau) - \varepsilon^k(\tau)\|_H d\tau \tag{4.29}$$

Подставив в правую часть (4.30) неравенство (4.29), получим основное соотношение для доказательства леммы

$$\|\varepsilon^{k+1}(t) - \varepsilon^k(t)\|_H \leqslant c_2 M \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \|\varepsilon^k(\tau) - \varepsilon^{k-1}(\tau)\|_H \, d\tau \tag{4.30}$$

Введем интеграл

$$I_k(t)\equiv\int_0^t\tau^{k\beta}(t-\tau)^{-\alpha}\,d\tau=D_kt^{(k+1)\beta}$$
$$D_k=[\Gamma(\beta)\Gamma(k\beta+1)]/[\Gamma((k+1)\beta+1)] \tag{4.31}$$

Применяя соотношение (4.30) при $k=2$, с учетом (4.27) будем иметь

$$\|\varepsilon^3(t)-\varepsilon^2(t)\|_H\leqslant Ic_2M\int_0^t\tau^{\beta}(t-\tau)^{-\alpha}\,d\tau=Ic_2MD_1t^{2\beta} \tag{4.32}$$

Последовательно применяя соотношения (4.30) для $k=3,\ldots$, получим

$$\|\varepsilon^{k+1}(t)-\varepsilon^k(t)\|_H\leqslant I(c_2M)^{k-1}\prod_{i=1}^{k-1}D_it^{k\beta}=I\frac{(c_2M\Gamma(\beta))^{k-1}}{\Gamma(k\beta+1)}t^{k\beta}=c_4\frac{(c_3t^\beta)^k}{\Gamma(k\beta+1)}F$$

т. е. утверждение (4.23) доказано. Оценка (4.22) следует из (4.23), (4.15).

Лемма 5. Введем ряд с общим членом

$$a_k(t)=(Lt^\beta)^k/\Gamma(k\beta+1) \tag{4.33}$$

Этот ряд сходится при любых L, t.

Доказательство. Достаточно доказать, что $a_{k+1}/a_k\to0$ при $k\to\infty$. Обозначая $x=k\beta+1$ и применив формулу Стирлинга, получим

$$\frac{a_{k+1}(t)}{a_k(t)}=\frac{Lt^\beta\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta)}=\frac{Lt^\beta e^{-x}x^{x-1/2}e^{\theta/(12x)}}{e^{-x-\beta}(x+\beta)^{x+\beta-1/2}e^{\theta/(12(x+\beta))}}$$
$$\sim c\frac{1}{(x+\beta)^\beta}\to0\quad\text{при}\quad x\to\infty$$

Из лемм 4, 5 и полноты пространств $L^\infty(0,T;V)$, $L^\infty(0,T;H)$ следует, что существуют $\mathbf{u}^*$, $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, $\boldsymbol{\sigma}^*$, такие, что $\mathbf{u}^k$ стремятся к $\mathbf{u}^*$ в норме $L^\infty(0,T;V)$, а $\boldsymbol{\varepsilon}^k$, $\boldsymbol{\sigma}^k$ стремятся соответственно к $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, $\boldsymbol{\sigma}^*$ в норме $L^\infty(0,T;H)$, причем справедливы оценки

$$\|\mathbf{u}^*\|_{L^\infty(0,T;V)}\leqslant c_5(T)F,\qquad\|\boldsymbol{\varepsilon}^*\|_{L^\infty(0,T;H)}\leqslant c_5(T)F,$$
$$\|\boldsymbol{\sigma}^*\|_{L^\infty(0,T;H)}\leqslant c_6(T)F,\qquad F\equiv\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,T;H)} \tag{4.34}$$

Зависящие от T константы $c_5(T)$, $c_6(T)$ определяются через суммы рядов вида (4.33), общие члены которых входят в правые части оценок (4.22), (4.28).

В силу построения последовательности $\mathbf{u}^k$, $\boldsymbol{\varepsilon}^k$, $\boldsymbol{\sigma}^k$ очевидно, что при любом t предел $\mathbf{u}^*(t)\in V_0$ деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ выражаются через $\mathbf{u}^*$ из (2.1) и $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, $\boldsymbol{\sigma}^*$ связаны законом ползучести (1.3). Для доказательства неравенства (2.8) запишем (4.14) для приближения $\mathbf{u}^k$:

$$(\boldsymbol{\sigma}^k(t),\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})-\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^k(t)))_\Omega-(\mathbf{f},\mathbf{u}-\mathbf{u}^k(t))_\Omega\geqslant0\qquad(\forall\mathbf{u}\in V_0) \tag{4.35}$$

Зафиксировав u, перейдем к пределу в (4.35) при $k\to\infty$, тогда в силу непрерывности, при почти всех t получим (2.8).

Итак, доказано существование обобщенного решения задачи ползучести на произвольном отрезке времени $[0, T]$, а следовательно, и на всем временно́м интервале $[0, \infty]$.

Лемма 6. Обобщенное решение задачи ползучести единственно.

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}^+$, $\boldsymbol{\varepsilon}^+$, $\boldsymbol{\sigma}^+$ — другое решение задачи. Положим $\mathbf{b}^+=\mathbf{b}(\boldsymbol{\varepsilon}^+)$. Тогда, очевидно, $\mathbf{u}^+(t)=\mathbf{u}^\circ(t,\mathbf{b}^+(t),\mathbf{f}(t))$, $\boldsymbol{\varepsilon}^+(t)=\boldsymbol{\varepsilon}^\circ(t,\mathbf{b}^+(t),\mathbf{f}(t))$, $\boldsymbol{\sigma}^+(t)=\boldsymbol{\sigma}^\circ(t,\mathbf{b}^+(t),\mathbf{f}(t))$.

Так же, как была получена оценка (4.30), выводится неравенство

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}^+(t)-\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)\|_H\leqslant c_2M\int\limits_0^t(t-\tau)^{-\alpha}\|\boldsymbol{\varepsilon}^+(\tau)-\boldsymbol{\varepsilon}^*(\tau)\|_H\,d\tau \tag{4.36}$$

Полагая $\varphi(t)\equiv\|\boldsymbol{\varepsilon}^+(t)-\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)\|_H$, перепишем (4.36) в виде

$$\varphi(t)\leqslant c\int\limits_0^t(t-\tau)^{-\alpha}\varphi(\tau)\,d\tau,\qquad c\equiv c_2M \tag{4.37}$$

Докажем, что $\varphi(t)=0$ при $t\in[0,T]$. По условию, $\alpha<1$; пусть $p>1$ таково, что $m=\alpha p<1$, тогда функция $\psi(\tau)=(t-\tau)^{-\alpha}$ суммируема со степенью p на $[0,t]$. Обозначим через q показатель, сопряженный с p (т. е. $q^{-1}+p^{-1}=1$). Оценивая правую часть соотношения (4.37) по неравенству Гёльдера, получим

$$\varphi(t)\leqslant c\left(\int\limits_0^t(t-\tau)^{-m}d\tau\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^t\varphi^q(\tau)\,d\tau\right)^{1/q}=c\left(\frac{t^{1-m}}{1-m}\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^t\varphi^q(\tau)\,d\tau\right)^{1/q} \tag{4.38}$$

Возведя обе части (4.33) в степень q, получим

$$\varphi^q(t)\leqslant L\int\limits_0^t\varphi^q(\tau)\,d\tau,\qquad L\equiv c^q\left(\frac{T^{1-m}}{1-m}\right)^{q/p}$$

Из последнего неравенства по лемме Гронуолла $\varphi^q(t)=0$, т. е. $\boldsymbol{\varepsilon}^+(t)=\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)$, отсюда $\mathbf{b}^+(t)=\mathbf{b}^*(t)$ и, следовательно, $\mathbf{u}^+(t)=\mathbf{u}^*(t)$; $\boldsymbol{\sigma}^+(t)=\boldsymbol{\sigma}^*(t)$. Лемма доказана.

5. До сих пор речь шла только об однозначной разрешимости задачи ползучести и из всех ограничений 1—8 были использованы лишь 1—3. Перейдем к изучению асимптотики решения при $t\to\infty$.

Прежде всего запишем ограничения 1, 6, 8 в следующем формальном виде. Из первого следует, что функция $\delta_0(t)$ стремится к нулю с ростом t:

$$\delta_0(t)\to0\quad\text{при}\quad t\to\infty$$
$$\delta_0(t)\equiv\max_{\tau\geqslant t}\{\max_{x\in\Omega}(E_0^*(x)-E^*(\tau,x)),\ \max_{x\in\Omega}(G_0(x)-G(\tau,x))\} \tag{5.1}$$

Из ограничения 6 находим, что функции $\delta_1(\xi)$, $\delta_2(\xi)$ стремятся к нулю с ростом ξ:

$$\delta_i(\xi)\to0\quad\text{при}\quad\xi\to\infty\quad(i=1,\,2)$$

$$\delta_i(\xi)\equiv\max_{t\geqslant\xi}\psi_i(t,\xi)=\max_{t\geqslant\xi}\int\limits_\xi^t[\max_{\mathbf{x}\in\Omega}(R_i(t,\tau,\mathbf{x})-R_i^\circ(t-\tau,\mathbf{x}))]\,d\tau \tag{5.2}$$

Из ограничения 8 следует, что функция $\delta_3(t,T)$ при любом фиксированном T стремится к нулю при $t\to\infty$:

$$\delta_3(t,T)\to0\quad\text{при}\quad t\to\infty\ \text{и любом}\ T,\quad t\geqslant T \tag{5.3}$$

$$\delta_3(t,T)\equiv\max_{i=1,2}\max_{0\leqslant\tau\leqslant T}\max_{\mathbf{x}\in\Omega}[\mu_i(\tau,\mathbf{x})-R_i(t,\tau,\mathbf{x})] \tag{5.4}$$

Не умаляя общности, будем считать, что $\varkappa(\mathbf{x})\geqslant 0$, тогда из (1.9), (1.7) имеем

$$R_i(t+\varkappa(\mathbf{x}),\tau+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})\leqslant R(t,\tau)\quad (i=1,2) \tag{5.5}$$

Подставим в (2.8) перемещение $u=0$, получим

$$(\boldsymbol{\sigma}^*(t),\boldsymbol{\varepsilon}^*(t))_\Omega\leqslant(\mathbf{f}(t),\mathbf{u}^*(t))_\Omega \tag{5.6}$$

Выразим $\boldsymbol{\sigma}^*$ из закона релаксации (1.3) и оценим левую часть в (5.6) снизу

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{\sigma}^*(t),\boldsymbol{\varepsilon}^*(t))_\Omega=\int_\Omega[2G(t+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})e_{ij}^*(t,\mathbf{x})e_{ij}^*(t,\mathbf{x})+\\ +3E^*(t+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})(e^*(t,\mathbf{x}))^2]dx-\int_\Omega dx\int_0^t[R_1(t+\varkappa(\mathbf{x}),\tau+\\ +\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})2G(t+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})e_{ij}^*(\tau,\mathbf{x})e_{ij}(t,\mathbf{x})+R_2(t+\varkappa(\mathbf{x}),\tau+\\ -\varkappa(\mathbf{x})\mathbf{x})3E^*(t+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})e^*(\tau,\mathbf{x})e^*(t,\mathbf{x})]d\tau\geqslant\int_\Omega[2G_0(x)e_{ij}^*(t,\mathbf{x})e_{ij}^*(t,\mathbf{x})+\\ +3E_0^*(\mathbf{x})(e^*(t,\mathbf{x}))^2]dx+\int_\Omega[(2G(t+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})-2G_0(\mathbf{x}))e_{ij}^*(t,\mathbf{x})e_{ij}^*(t,\mathbf{x})+\\ +(3E^*(t+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})-3E_0^*(\mathbf{x}))(e^*(t,\mathbf{x}))^2]dx-\\ -\int_0 d\tau R(t,\tau)\int_\Omega[2G_0(\mathbf{x})|e_{ij}^*(\tau,\mathbf{x})e_{ij}^*(t,\mathbf{x})|+3E_0^*(\mathbf{x})|e^*(\tau,\mathbf{x})e^*(t,\mathbf{x})|]dx\end{gathered} \tag{5.7}$$

Здесь использованы (5.5) и условие 1. Обозначая

$$|\boldsymbol{\varepsilon}(t)|_\Omega\equiv\left(\int_\Omega[2G_0(\mathbf{x})e_{ij}(t,\mathbf{x})e_{ij}(t,\mathbf{x})+3E_0^*(\mathbf{x})(e(t,\mathbf{x}))^2]dx\right)^{1/2} \tag{5.8}$$

и воспользовавшись определением (5.1) и очевидной эквивалентностью $|\boldsymbol{\varepsilon}(t)|_\Omega\sim\|\boldsymbol{\varepsilon}(t)\|_H$, преобразуем (5.7) к виду

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{\sigma}^*(t),\boldsymbol{\varepsilon}^*(t))_\Omega\geqslant(|\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)|_\Omega)^2-c\delta_0(t)(|\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)|_\Omega)^2-\\ -\int_0^t R(t,\tau)|\boldsymbol{\varepsilon}^*(\tau)|_\Omega|\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)|_\Omega d\tau\end{gathered} \tag{5.9}$$

Подставим (5.9) в (5.6) и оценим правую часть в (5.6) через неравенство Коши и неравенство Корна (4.15); тогда получим

$$(1-c\delta_0(t))(|\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)|_\Omega)^2-\int_0^t R(t,\tau)|\boldsymbol{\varepsilon}^*(\tau)|_\Omega d\tau|\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)|_\Omega\leqslant c\|\mathbf{f}(t)\|_H|\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)|_\Omega \tag{5.10}$$

Сокращая обе части (5.10) на $|\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)|_\Omega$, придем к неравенству

$$(1-c\delta_0(t))|\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)|_\Omega\leqslant\int_0^t R(t,\tau)|\boldsymbol{\varepsilon}^*(\tau)|_\Omega d\tau+c\|\mathbf{f}(t)\|_H \tag{5.11}$$

По условию (5.1), найдется такое t^*, что при $t>t^*$ будет выполняться

$$1-c\delta_0(t)\geqslant m^*>m, \qquad m^*=\text{const}>0$$

Тогда при $t>t^*$ неравенство (5.11) преобразуется к виду

$$m^*|\varepsilon^*(t)|_\Omega\leqslant\int\limits_{t^*}^{t} R(t,\tau)|\varepsilon^*(\tau)|_\Omega d\tau+\int\limits_{0}^{t^*} R(t,\tau)|\varepsilon^*(\tau)|_\Omega d\tau+c\|\mathbf{f}(t)\|_H \quad (5.12)$$

Из (4.34), (1.8) сумма двух последних членов в (5.12) оценивается через $c(t^*)\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,\,t;\,H)}$ с константой $c(t^*)$, зависящей, вообще говоря, от t^*:

$$m^*|\varepsilon^*(t)|_\Omega\leqslant\int\limits_{t^*}^{t} R(t,\tau)|\varepsilon^*(\tau)|_\Omega d\tau+c(t^*)\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,t;H)} \quad (5.13)$$

Из (1.8), (5.13) получим

$$m^*|\varepsilon^*(t)|_\Omega\leqslant m\max_{t^*\leqslant\tau\leqslant t}|\varepsilon^*(\tau)|_\Omega+c(t^*)\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,t;H)} \quad (5.14)$$

Поэтому

$$\max_{t^*\leqslant\tau\leqslant t}|\varepsilon^*(\tau)|_\Omega\leqslant\frac{c(t^*)}{m^*-m}\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,t;H)}$$

Тем самым доказана ограниченность решения задачи ползучести при любой ограниченной в метрике $L^\infty(0,\infty;H)$ правой части:

$$\|\varepsilon^*\|_{L^\infty(0,\,\infty;\,H)}\leqslant c\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,\,\infty;\,H)} \quad (5.15)$$

Из условия 8 и неравенства (1.8) следует, что функция

$$\mu(\tau)=\max\{\max_{\mathbf{x}\in\Omega}\mu_1(\tau,\mathbf{x}),\ \max_{\mathbf{x}\in\Omega}\mu_2(\tau,\mathbf{x})\} \quad (5.16)$$

суммируема на $[0,\infty)$. Действительно, $\mu(\tau)\leqslant R(t,\tau)$, поэтому

$$\int\limits_0^t\mu(\tau)d\tau\leqslant\int\limits_0^t R(t,\tau)d\tau\leqslant m \text{ при } \forall t \quad (5.17)$$

Тогда величины $e_{ij}^B(\mathbf{x})$, $e^B(\mathbf{x})$ корректно определены формулами из (3.2) и суммируемы с квадратом. Действительно, из леммы 1 следует

$$\|e^B\|_H\leqslant\int\limits_0^\infty\mu(\tau)d\tau\|e^*\|_{L^\infty(0,\infty;H)}\leqslant m\|e^*\|_{L^\infty(0,\infty;H)}$$

Такие же выкладки справедливы для e_{ij}^B. Напомним, что решение задачи упругости с идеальными односторонними связями при нагрузке $\mathbf{f}^\circ$ и законе (3.2) обозначено через $\mathbf{u}^\circ$, ε°, σ°.

По лемме 3 это решение существует, единственно и удовлетворяет оценкам

$$\|\mathbf{u}^\circ\|_V\leqslant c(\|\mathbf{e}^B\|_H+\|\mathbf{f}^\circ\|_H),\quad \|\varepsilon^\circ\|_H\leqslant c(\|\varepsilon^B\|_H+\|\mathbf{f}^\circ\|_H)$$
$$\varepsilon^B=\{\varepsilon_{ij}^B\},\quad \varepsilon_{ij}^B\equiv e_{ij}^B+\delta_{ij}e^B \quad (i,j=1,2,3) \quad (5.18)$$

Напряжения σ° удовлетворяют вариационному неравенству

$$(\sigma^\circ,\varepsilon(\mathbf{u})-\varepsilon^\circ)_\Omega-(\mathbf{f}^\circ,\mathbf{u}-\mathbf{u}^\circ)_\Omega\geqslant0 \quad (5.19)$$

Подставим в (5.19) перемещение $\mathbf{u}=\mathbf{u}^*(t)$, а в (2.8) $\mathbf{u}=\mathbf{u}^\circ$ и сложим их. В результате будем иметь

$$(\boldsymbol{\sigma}^\circ-\boldsymbol{\sigma}^*(t),\ \boldsymbol{\varepsilon}^\circ-\boldsymbol{\varepsilon}^*(t))_\Omega\leqslant(\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}^\circ,\ \mathbf{u}^\circ-\mathbf{u}^*(t))_\Omega \tag{5.20}$$

Введем функцию

$$R^\circ(t)\equiv\max\{\max_{\mathbf{x}\in\Omega}R_1^\circ(t,\mathbf{x}),\ \max_{\mathbf{x}\in\Omega}R_2^\circ(t,\mathbf{x})\} \tag{5.21}$$

Из (1.11), (1.7) следует, что

$$R(t,\tau)\geqslant R^\circ(t-\tau) \tag{5.22}$$

Поэтому из (1.8) получим

$$R^\infty\equiv\int_0^\infty R^\circ(\tau)\,d\tau\leqslant m<1 \tag{5.23}$$

Обозначим через $\boldsymbol{\sigma}^1(t,\mathbf{x})$ напряжения, вычисляемые на основе (1.3) при замене в (1.3) модулей G, E^* на их предельные значения G_0, E_0^*; покажем, что

$$\|\boldsymbol{\sigma}^1(t)-\boldsymbol{\sigma}^*(t)\|_H\leqslant c\delta_0(t)\,\|\boldsymbol{\varepsilon}^*\|_{L^\infty(0,\ t;\ H)} \tag{5.24}$$

Действительно, из (5.1), (5.5) следует

$$|s_{ij}^1(t,\mathbf{x})-s_{ij}^*(t,\mathbf{x})|=2|G_0(\mathbf{x})-G(t+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})|. \tag{5.25}$$

$$\cdot\left|e_{ij}^*(t,\mathbf{x})-\int_0^t R_1(t+\varkappa(\mathbf{x}),\tau+\varkappa(\mathbf{x}),\mathbf{x})\,e_{ij}^*(\tau,\mathbf{x})\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant2\delta_0(t)\left[|e_{ij}^*(t,\mathbf{x})|+\int_0^t R(t,\tau)\,|e_{ij}^*(\tau,\mathbf{x})|\,d\tau\right]$$

$$|\sigma^1(t,\mathbf{x})-\sigma^*(t,\mathbf{x})|\leqslant3\delta_0(t)\left[|e^*(t,\mathbf{x})|+\int_0^t R(t,\tau)\,|e^*(\tau,\mathbf{x})|\,d\tau\right]$$

Применяя к (5.20) оценку (4.2) и условие (1.8), получим (5.24). Преобразуем (5.20). С учетом неравенства Корна, (5.24) и (5.15) имеем

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{\sigma}^\circ-\boldsymbol{\sigma}^1(t),\ \boldsymbol{\varepsilon}^\circ-\boldsymbol{\varepsilon}^1(t))_\Omega\leqslant(\boldsymbol{\sigma}^*(t)-\boldsymbol{\sigma}^1(t),\ \boldsymbol{\varepsilon}^\circ-\boldsymbol{\varepsilon}^*(t))_\Omega+\\+c\|\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}^\circ\|_H\cdot\|\boldsymbol{\varepsilon}^\circ-\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)\|_H\leqslant c\delta(t)\,|\boldsymbol{\varepsilon}^\circ-\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)|_\Omega\end{gathered} \tag{5.26}$$

Здесь и далее через $\delta(t)$ обозначаются различные функции, стремящиеся к нулю при $t\to\infty$.

Покажем, что если левая часть в (5.26) может быть оценена снизу следующим образом (напомним, что $R^\circ(t)$ задается формулой (5.21)):

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{\sigma}^\circ-\boldsymbol{\sigma}^1(t),\ \boldsymbol{\varepsilon}^\circ-\boldsymbol{\varepsilon}^1(t))_\Omega\geqslant(|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(t)|_\Omega)^2-\\-\int_0^t R^\circ(t-\tau)\,|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)|_\Omega\,d\tau\cdot|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(t)|_\Omega-c\delta(t)\,|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(t)|_\Omega\end{gathered} \tag{5.27}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(t,x)\equiv\boldsymbol{\varepsilon}^\circ(x)-\boldsymbol{\varepsilon}^*(t,x)$$

то $|\varepsilon^\circ-\varepsilon^*(t)|_\Omega\to 0$ при $t\to\infty$ и тем самым теорема будет доказана, поскольку отсюда будет следовать $\|\boldsymbol{\sigma}^*(t)-\boldsymbol{\sigma}^\circ\|_H\to 0$, $\|\mathbf{u}^*(t)-\mathbf{u}^\circ\|_V\to 0$. Действительно, подставляя (5.27) в (5.26) и сокращая обе части на $|\Delta\varepsilon(t)|_\Omega$, получим

$$|\Delta\varepsilon(t)|_\Omega\leqslant\int_0^t R^\circ(t-\tau)|\Delta\varepsilon(\tau)|_\Omega\,d\tau+c\delta(t) \tag{5.28}$$

Введем обозначение

$$\varphi(t)\equiv|\Delta\varepsilon(t)|_\Omega,\quad \varphi^m(t)=\sup_{\tau\geqslant t}\varphi(\tau) \tag{5.29}$$

Определение $\varphi^m(t)$ корректно ввиду доказанной ограниченности $\boldsymbol{\varepsilon}^\circ$, $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ (см. (5.15), (5.18)).

Усилим (5.28), заменив $\varphi(\tau)$ под знаком интеграла на $\varphi^m(\tau)$:

$$\varphi(t)\leqslant\int_0^t R^\circ(t-\tau)\varphi^m(\tau)\,d\tau+c\delta(t) \tag{5.30}$$

Функция $\varphi^m(t)$ монотонно убывающая; обозначим через φ^∞ предел $\varphi^m(t)$ при $t\to\infty$. Из (5.23) следует, что

$$\int_0^t R^\circ(t-\tau)\varphi^m(\tau)\,d\tau\to R^\infty\varphi^\infty \text{ при } t\to\infty \tag{5.31}$$

Тогда $\varphi(t)\leqslant R^\infty\varphi^\infty+c\delta(t)$, откуда $\varphi^\infty\leqslant R^\infty\varphi^\infty$, и поскольку из (5.23) следует $R^\infty<1$, то последнее неравенство означает, что $\varphi^\infty=0$, т. е. $\varphi(t)\equiv\equiv|\varepsilon^\circ-\varepsilon^*(t)|_\Omega\to 0$ с ростом t.

Итак, для завершения доказательства необходимо получить оценку (5.27). Пусть $\Delta\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^\circ-\boldsymbol{\sigma}^t$, шаровую часть $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ обозначим $\Delta\sigma$, а компоненты девиатора — Δs_{ij}. Из (1.3), (3.2) получим (аргументы для краткости опущены):

$$\Delta\sigma=E_0^*\left[\Delta e-R_2^\infty e^\circ-e^B+\int_0^t R_2e^*\,d\tau\right]=$$

$$=E_0^*\left[\Delta e-\int_0^t R_2^\circ\Delta e\,d\tau+\int_0^t R_2^\circ\Delta e\,d\tau-R_2^\infty e^\circ-e^B+\right.$$

$$\left.+\int_0^t R_2e^*\,d\tau\right]=E_0^*\left[\Delta e-\int_0^t R_2^\circ\Delta e\,d\tau+q\right]$$

$$q=\int_0^t R_2^\circ\Delta e\,d\tau-R_2^\infty e^\circ-e^B+\int_0^t R_2e^*\,d\tau$$

Аналогичное преобразование сделаем для Δs_{ij}:

$$\Delta s_{ij}=2G_0\left[\Delta e_{ij}-\int_0^t R_1^\circ\Delta e_{ij}\,d\tau+q_{ij}\right]$$

$$q_{ij}=\int_0^t R_1^\circ\Delta e_{ij}\,d\tau-R_1^\infty e_{ij}^\circ-e_{ij}^B+\int_0^t R_1e_{ij}^*\,d\tau$$

Тогда левая часть преобразуется к виду

$$
\begin{gathered}
(\Delta\sigma(t), \Delta\varepsilon(t))_\Omega = (|\Delta\varepsilon(t)|_\Omega)^2 - \\
-\int_\Omega dx \int_0^t [R_1^\circ(t-\tau, \mathbf{x})\, 2G_0(\mathbf{x})\, \Delta e_{ij}(\tau, \mathbf{x})\, \Delta e_{ij}(t, \mathbf{x}) + \\
+ R_2^\circ(t-\tau, \mathbf{x})\, 3E_0^*(\mathbf{x})\, \Delta e(\tau, \mathbf{x})\, \Delta e(t, \mathbf{x})]\, d\tau + \\
+ (2G_0 q_{ij}(t), \Delta e_{ij}(t))_\Omega + (3E_0^* q(t), \Delta e(t))_\Omega \geqslant \\
\geqslant (|\Delta\varepsilon(t)|_\Omega)^2 - \int_0 d\tau R^\circ(t-\tau) \int_\Omega [2G_0(\mathbf{x})\, \Delta e_{ij}(\tau, \mathbf{x})\, \Delta e_{ij}(t, \mathbf{x}) + \\
+ 3E_0^*(\mathbf{x})\, \Delta e(\tau, \mathbf{x})\, \Delta e(t, \mathbf{x})]\, dx - 2\|G_0 q_{ij}(t)\|_H \|\Delta e_{ij}(t)\|_H - \\
- 3\|E_0^* q(t)\|_H \|\Delta e(t)\|_H \geqslant (|\Delta\varepsilon(t)|_\Omega)^2 - \\
- \int_0^t R^\circ(t-\tau)\, |\Delta\varepsilon(\tau)|_\Omega\, d\tau\, |\Delta\varepsilon(t)|_\Omega - c\Big(\|q(t)\|_H + \sum_{i,j=1}^{3} \|q_{ij}(t)\|_H\Big) |\Delta\varepsilon(t)|_\Omega
\end{gathered}
\tag{5.32}
$$

Сравнивая (5.32) с (5.27), видим, что осталось доказать

$$
\Big(\|q(t)\|_H + \sum_{i,j=1}^{3} \|q_{ij}(t)\|_H\Big) \to 0 \quad \text{при } t\to\infty \tag{5.33}
$$

Докажем лишь, что $\|q(t)\|_H \to 0$ (соответствующее доказательство для $\|q_{ij}(t)\|_H$ совершенно аналогично):

$$
\begin{gathered}
q(t, \mathbf{x}) = \int_0^t R_2^\circ(t-\tau, \mathbf{x})\, e^\circ(\mathbf{x})\, d\tau - \int_0^t R_2^\circ(t-\tau, \mathbf{x})\, e^*(\tau, \mathbf{x})\, d\tau - \\
- R_2^\infty(\mathbf{x})\, e^\circ(\mathbf{x}) - e^B(\mathbf{x}) + \int_0^t R_2(t+\varkappa(\mathbf{x}), \tau+\varkappa(\mathbf{x}), \mathbf{x})\, e^*(\tau, \mathbf{x})\, d\tau
\end{gathered}
\tag{5.34}
$$

Изучим отдельно сумму первого и третьего слагаемых в (5.34)

$$
\begin{gathered}
P(t, \mathbf{x}) \equiv \int_0^t R_2^\circ(t-\tau, \mathbf{x})\, e^\circ(\mathbf{x})\, d\tau - R_2^\infty(\mathbf{x})\, e^\circ(\mathbf{x}) = \\
= \Big(\int_0^t R_2^\circ(\tau, \mathbf{x})\, d\tau - \int_0^\infty R_2^\circ(\tau, \mathbf{x})\, d\tau\Big) e^\circ(\mathbf{x}) = -\int_t^\infty R_2^\circ(\tau, \mathbf{x})\, d\tau\, e^\circ(\mathbf{x})
\end{gathered}
$$

Из (5.21), (5.23) следует

$$
|P(t, \mathbf{x})| \leqslant \int_t^\infty R^\circ(\tau)\, d\tau\, |e^\circ(\mathbf{x})|
$$

Отсюда будем иметь

$$
\|P(t)\|_H \leqslant \int_t^\infty R^\circ(\tau)\, d\tau\, \|e^\circ\|_H \to 0 \quad \text{при } t\to\infty \tag{5.35}
$$

Сумму трех оставшихся в (5.34) слагаемых обозначим $s(t, \mathbf{x})$ и преобразуем так:

$$s(t,\mathbf{x}) = \int_{t^*}^{t} (R_2(t+\varkappa(\mathbf{x}), \tau+\varkappa(\mathbf{x}), \mathbf{x}) - R_2^\circ(t-\tau, \mathbf{x}))\, e^*(\tau, \mathbf{x})\, d\tau -$$

$$- \int_0^{t^*} R_2^\circ(t-\tau, \mathbf{x})\, e^*(\tau, \mathbf{x})\, d\tau + \int_0^{t^*} (R_2(t+\varkappa(\mathbf{x}), \tau+\varkappa(\mathbf{x}), \mathbf{x}) - \tag{5.36}$$

$$-\mu_2(\tau, \mathbf{x}))\, e^*(\tau, \mathbf{x})\, d\tau - \int_{t^*}^{\infty} \mu_2(\tau, \mathbf{x})\, e^*(\tau, \mathbf{x})\, d\tau = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

где t^* пока произвольно и использовано определение (3.2) для функции e^B.

Оценим I_1. Из леммы 1 найдем

$$\|I_1(t)\|_H \leqslant \int_{t^*}^{t} \max_{x\in\Omega} (R_2(t+\varkappa(\mathbf{x}), \tau+\varkappa(\mathbf{x}), \mathbf{x}) - R_2^\circ(t-\tau, \mathbf{x}))\, d\tau \|e^*\|_{L^\infty(t^*, t; H)} \tag{5.37}$$

Учитывая соотношения (5.2), (5.5), (5.1), (5.15), будем иметь

$$\|I_1(t)\|_H \leqslant c\delta_2(t^*) \tag{5.38}$$

Из леммы 1 и условий (5.16), (5.17), (5.15) следует

$$\|I_4(t)\|_H \leqslant \int_{t^*}^{\infty} \mu(\tau)\, d\tau \|e^*\|_{L^\infty(t^*, \infty; H)} = \delta(t^*) \tag{5.39}$$

Из леммы 1 и условий (5.21), (5.23), (5.15) получим

$$\|I_2(t)\|_H \leqslant \int_0^{t^*} R^\circ(t-\tau)\, d\tau \|e^*\|_{L^\infty(0, t^*; H)} = \int_{t-t^*}^{t} R^\circ(\tau)\, d\tau \|e^*\|_{L^\infty(0, t^*; H)} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t-t^*}^{\infty} R^\circ(\tau)\, d\tau \|e^*\|_{L^\infty(0, t^*; H)} = \delta(t-t^*) \tag{5.40}$$

Для оценки I_3 воспользуемся условием (5.4):

$$\|I_3(t)\|_H \leqslant \delta_3(t, t^*) \int_0^{t^*} \|e^*(\tau)\|_H\, d\tau \leqslant \delta_3(t, t^*)\, t^* \|e^*\|_{L^\infty(0, t^*; H)} \tag{5.41}$$

Собирая вместе оценки (5.38) — (5.41), найдем

$$\|s(t)\|_H \leqslant \delta(t^*) + \delta(t-t^*) + c\delta_3(t, t^*)\, t^*$$

Пусть $\lambda > 0$ произвольно, выберем t^* так, чтобы $\delta(t^*) < \lambda/3$, далее, при этом t^* выберем t так, чтобы $\delta(t-t^*) < \lambda/3$, $c\delta_3(t, t^*)\, t^* < \lambda/3$, это можно сделать ввиду условия (5.3), тогда $\|s(t)\|_H < \lambda$, т. е. $\|s(t)\|_H \to 0$ при $t \to \infty$.

Таким образом, условие (5.33) доказано, а значит, и доказана теорема.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденгершель Э. И.* О принципе предельного модуля для первой краевой задачи линейной вязкоупругости.— Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 3, с. 544—547.
2. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
3. *Brun L.* Méthodes énergétiques dans les systèmes évolutifs linéaires. I. Separation des énergies. II. Theoremes d'unicité.— J. Mecanique, 1969, v. 8, Nr. 1, p. 125—166; Nr. 2, p. 167—192.
4. *Duvaut G.* Le problème de Signorini en viscoélasticité linéaire.— C.R. Acad. Sci. Paris, 1969, t. 268, Nr. 18, p. A1044—A1046.
5. *Duvaut G., Lions J. L.* Les inéquations en mécanique et en physique. Paris: Dunod, 1972. 387 p.
6. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.— Л.: Гостехтеориздат, 1952. 324 с.
7. *Арутюнян Н. Х., Чобанян К. С.* О кручении призматических стержней, составленных из различных материалов с учетом ползучести.— Докл. АН Арм. ССР, 1955, т. 21, № 1, с. 3—9.
8. *Арутюнян Н. Х., Чобанян К. С.* Изгиб призматических стержней, составленных из различных материалов с учетом ползучести.— Изв. АН Арм. ССР, Сер. физ.-матем. н., 1957, т. 10, № 5, с. 59—72.
9. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел.— Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3, с. 153—164.
10. *Арутюнян Н. Х.* Об уравнениях состояния в нелинейной теории ползучести неоднородно-стареющих тел.— Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 3, с. 559—562.
11. *Арутюнян Н. Х.* Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона.— В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. М.: Наука, 1972, с. 155—202.
12. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
13. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
14. *Friedrichs K. O.* On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality.— Ann. Math., 1947, v. 48, № 2, p. 441—455.
15. *Gobert J.* Une inégalité fondamentale de la théorie de l'élasticité.— Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1962, v. 31, № 3—4, p. 182—191.
16. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Доказательство неравенства Корна.— Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 1, с. 36—39.

Москва, Ленинград

Поступила в редакцию
29.IX.1980