МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1981

УДК 539.3

ОДИН ВИД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ИДЕЛЬС Л. В., СОЛОВЬЕВ Ю. И.

Существенно упрощается модификация интегральных уравнений Д. И. Шермана[1], которая позволяет при вычислении напряжений обойтись без операции дифференцирования функции, найденной численным решением этого уравнения. Рассмотрены первая и вторая основные задачи для многосвязных областей, а также смешанная задача, когда на каждом из контуров заданы либо внешние силы, либо перемещения.

1. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для $(m+1)$-связной конечной области S, граница которой L состоит из гладких замкнутых контуров L_j $(j=1,2,\ldots,m,m+1)$, причем контур L_{m+1} охватывает остальные.

Пусть на контурах L_j $(j\in n_1)$ заданы внешние силы $(p_x,\ p_y)$, а на контурах L_j $(j\in n_2)$ — перемещения (u_0,v_0). Используя известные представления (см., например, [1]) напряжений и перемещений через две аналитические функции комплексного переменного $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, запишем для этих функций граничные условия в виде

$$\frac{d}{ds_0}[\lambda_k\varphi(t_0)+\overline{t_0\varphi'(t_0)}+\overline{\psi(t_0)}]=f_k(s_0) \qquad (1.1)$$

$$\lambda_k=1,\quad f_k(s_0)=i(p_x+ip_y),\quad \text{если}\quad k\in n_1$$

$$\lambda_k=-\varkappa,\ f_k(s_0)=-2G\frac{d}{ds_0}(u_0+iv_0),\ \text{если}\ k\in n_2$$

Здесь t_0 — аффикс текущей точки контура L_k $(k=1,2,\ldots,m,m+1)$, s_0 — длина дуги t_kt_0, t_k — фиксированная точка того же контура.

Для каждого из контуров L_k $(k\in n_2)$ необходимо выполнение дополнительного условия

$$\varkappa\varphi(t_k)-t_k\overline{\varphi'(t_k)}-\overline{\psi(t_k)}=2G(u_0+iv_0)\,|_{t_0=t_k} \qquad (1.2)$$

Здесь и далее G — модуль сдвига, $\varkappa=3-4\nu$ в случае плоской деформации и $\varkappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ в случае обобщенного плоского напряженного состояния, ν — коэффициент Пуассона.

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будем разыскивать в виде

$$\varphi(z)=\sum_{j=1}^{m+1}\int_{L_j}\mu(s)\ln(t-z)\,ds+C \qquad (1.3)$$

---

[1] См. *Идельс Л. В.* Об одной модификации интегральных уравнений Д. И. Шермана для первой и второй основных задач плоской теории упругости. Новосибирск, 1979.— 10 с. Деп. в ВИНИТИ 13.06.79; № 2148—79.

$$\psi(z) = -\sum_{j=1}^{m+1}\int_{L_j}\left[\lambda_j\overline{\mu(s)}\ln(t-z) - \frac{\bar{t}\mu(s)}{t-z}\right]ds + \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{b_j}{z-z_j} - \bar{a}_j\ln(z-z_j)\right]$$

$$b_j = (\varkappa+\lambda_j)\,\mathrm{Im}\int_{L_j} i\bar{t}\mu(s)\,ds, \qquad a_j = (\varkappa-\lambda_j)\int_{L_j}\mu(s)\,ds \tag{1.4}$$

где контуры L_j обходятся так, чтобы область S оставалась слева, C — некоторая константа, $\mu(s)$ — определяемая функция, z_j $(j=1,2,\ldots,m)$ — фиксированные точки областей S_j, ограниченных контурами L_j. Последнее из равенств (1.4) обеспечивает однозначность смещений.

Потребуем, чтобы функция $\mu(s)$ удовлетворяла интегральному уравнению

$$-2\pi i\lambda_k\mu(s_0) + \sum_{j=1}^{m+1}\int_{L_j}\left\{\mu(s)\left[\lambda_k\frac{\partial}{\partial s_0}\ln(t-t_0) - \lambda_j\frac{\partial}{\partial s_0}\ln(\bar{t}-\bar{t}_0)\right] + \overline{\mu(s)}\frac{\partial}{\partial s_0}\left(\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0}\right)\right\}ds - \frac{d\bar{t}_0}{ds_0}\sum_{j=1}^{m+1}\left[\frac{b_j}{(\bar{t}_0-\bar{z}_j)^2} + \frac{A_j}{\bar{t}_0-\bar{z}_j}\right] = f_k(s_0), \quad t_0 \in L_k \tag{1.5}$$

$$(k=1,2,\ldots,m,m+1)$$

где z_{m+1} — произвольно фиксированная точка области S.

Подставляя граничные значения функций (1.3) в равенство (1.1), нетрудно убедиться, что уравнение (1.5) примет вид

$$\frac{d}{ds_0}\left[\lambda_k\varphi(t_0) + t_0\overline{\varphi'(t_0)} + \overline{\psi(t_0)}\right] - \frac{d\bar{t}_0}{ds_0}\left[\frac{b_{m+1}}{(\bar{t}_0-\bar{z}_{m+1})^2} + \frac{A_{m+1}}{\bar{t}_0-\bar{z}_{m+1}} + \sum_{j=1}^{m}\frac{A_j-a_j}{\bar{t}_0-\bar{z}_j}\right] = f_k(s_0) \tag{1.6}$$

Таким образом равенство (1.5) будет следствием (1.1) при условиях

$$A_j = a_j, \qquad A_{m+1} = b_{m+1} = 0 \quad (j=1,\,2,\,\ldots,\,m) \tag{1.7}$$

Некоторые из этих условий выполняются автоматически за счет специального вида правой части, выполнение остальных должно быть обеспечено заранее.

В том случае, когда на внешнем контуре L_{m+1} заданы перемещения (т. е. $j=m+1 \in n_2$), будем полагать $b_{m+1}=0$ и для $j \in n_1$ примем

$$A_j = a_j = (\varkappa-1)\int_{L_j}\mu(s)\,ds = \frac{1-\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}(X_j+iY_j) \tag{1.8}$$

где (X_j, Y_j) — равнодействующая внешних сил, приложенных к контуру L_j. Остальные из условий (1.7) выполняются вследствие того, что

$$\int_{L_k} f_k(s_0)\,ds_0=-2G\int_{L_k}\frac{d}{ds_0}(u_0+iv_0)\,ds_0=0 \tag{1.9}$$

Для определения коэффициентов A_j при $j\in n_2$ и постоянной C используем равенства, вытекающие из (1.2):

$$\varkappa C+\sum_{j=1}^{m}A_j\ln(\bar{t}_k-\bar{z}_j)= \tag{1.10}$$

$$=\sum_{j=1}^{m+1}\int_{L_j}\left\{\overline{\mu(s)}\frac{t-t_k}{\bar{t}-\bar{t}_k}-[\varkappa\ln(t-t_k)+\lambda_j\ln(\bar{t}-\bar{t}_k)]\mu(s)\right\}ds+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j}{\bar{t}_k-\bar{z}_j}+2G(u_0+iv_0)\big|_{t_0=t_k}\qquad(k\in n_2)$$

Здесь $\ln(t-t_k)$ рассматривается как предельное значение функции $\ln(t-z)$ при $z\to t_k$ изнутри области S. Кроме того, положим

$$A_{m+1}=(\varkappa-1)\int_{L_{m+1}}\mu(s)\,ds \tag{1.11}$$

В случае $(j=m+1\in n_1)$ будем в (1.5) полагать $b_{m+1}=A_{m+1}=0$ и вместо (1.11) дополнительно вводить уравнение

$$\sum_{j=1}^{m}A_j-\sum_{j=1}^{m+1}(\varkappa-\lambda_j)\int_{L_j}\mu(s)\,ds=0 \tag{1.12}$$

Если на всех контурах заданы перемещения, то уравнение (1.10) записывается для всех контуров и используется (1.11). Если на всех контурах заданы внешние силы, то A_j при $j\neq m+1$ определяется формулами (1.8), а A_{m+1} формулой (1.11).

Коэффициент b_{m+1} примем равным

$$b_{m+1}=i\,\mathrm{Re}\int_{L_{m+1}}\frac{i\mu(s)\,ds}{t-z_{m+1}} \tag{1.13}$$

Равенства $A_{m+1}=b_{m+1}=0$ будут выполнены, если главный вектор и момент внешних сил равны нулю. Постоянная C остается неопределенной и ее можно задавать произвольно.

Отметим, что для случая задания внешних сил по всем контурам в [2] было предложено интегральное уравнение вида, аналогичного (1.5). Различия не имеют принципиального значения, однако уравнение (1.5) представляется несколько более простым. Отметим также, что для односвязной области решение уравнения (1.5) пропорционально производной по s от решения соответствующего интегрального уравнения Д. И. Шермана.

2. Пусть функция $f_k(s_0)$ и кривизна контуров L_k удовлетворяют условию Гельдера. Тогда ядро и решение интегрального уравнения (1.5) будут удовлетворять этому же условию.

Так как уравнение (1.5) принадлежит типу Фредгольма, то для доказательства его разрешимости достаточно показать, что соответствующее однородное уравнение не имеет иных решений, кроме тривиального.

Предположим противное. Пусть $\mu(s)$ — не равное тождественному нулю решение уравнения (1.5) при нулевой правой части. Соответствующие функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ дают решение смешанной задачи при отсутствии на границе внешних сил и перемещений. Поэтому $\varphi(z)=c=\text{const}$, $\psi(z)=\varkappa c$ для всех $z\in S$. Используя первое из равенств (1.3), получим

$$\varphi'(z)=-\sum_{j=1}^{m+1}\int_{L_j}\frac{\mu(s)\,ds}{t-z}=0 \tag{2.1}$$

Отсюда следует, что функция $\mu(s)\,(d\bar{t}/ds)$ — граничное значение некоторой функции, голоморфной в области $S_*=S_1+S_2+\ldots+S_m+S_{m+1}$, дополняющей S до полной плоскости. В силу теоремы Коши имеем

$$\int_{L_j}\mu(s)\,ds=\int_{L_j}\mu(s)\frac{d\bar{t}}{ds}\,dt=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m) \tag{2.2}$$

Таким образом, $A_j=a_j=0$. Равенство (2.2) распространяется и на значение $j=m+1$: если $j=m+1\in n_2$, то это следует из выражения (1.11) и равенства $A_{m+1}=0$, если же $j=m+1\in n_1$, то из уравнения (1.12).

На каждом из контуров L_j введем функции

$$\mu_j(s_0)=\int_0^{s_0}\mu(s)\,ds \tag{2.3}$$

которые вследствие условий (2.2) будут непрерывными. Полагая в (1.3) $\mu(s)=\mu_j'(s)$ и интегрируя по частям, имеем

$$\varphi(z)=-\sum_{j=1}^{m+1}\int_{L_j}\frac{\mu_j(s)\,dt}{t-z}+C=c$$

$$\psi(z)=\sum_{j=1}^{m+1}\int_{L_j}\left[\lambda_j\overline{\mu_j(s)}+\bar{t}\frac{d}{dt}\mu_j(s)\right]\frac{dt}{t-z}+\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j}{z-z_j}=\varkappa c \tag{2.4}$$

В дальнейшем рассуждения строятся так же, как и при доказательстве разрешимости интегральных уравнений Д. И. Шермана. В результате получим $\mu_j(s)=\text{const}$ и $\mu(s)\equiv 0$.

Рассуждения не изменятся, если по всем контурам заданы перемещения. Если на всех контурах заданы внешние силы, то доказательство аналогично приведенному в [2].

Если область S бесконечна и представляет собой плоскость с отверстиями, то контур L_{m+1} отсутствует и во всех предыдущих формулах следует отбросить слагаемые, относящиеся к $j=m+1$. Если при этом хотя бы на одном из контуров L_j заданы перемещения, то систему (1.5), (1.8), (1.10) необходимо дополнить уравнением

$$\sum_{j=1}^{m}A_j=\frac{1-\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}(X+iY)$$

где (X, Y) — равнодействующая сил, приложенных ко всем контурам L_j, которая должна быть заданной.

Приведем формулы перемещений и напряжений для внутренних точек области

$$2G(u+iv)=\sum_{j=1}^{m+1}\int_{L_j}\left\{[\varkappa\ln(t-z)+\lambda_j\ln(\bar{t}-\bar{z})]\mu(s)-\frac{t-z}{\bar{t}-\bar{z}}\overline{\mu(s)}\right\}ds-$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{b_j}{\bar{z}-\bar{z}_j}-a_j\ln(\bar{z}-\bar{z}_j)\right]+\varkappa C$$

$$\sigma_x+\sigma_y=-4\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{m+1}\int_{L_j}\frac{\mu(s)\,ds}{t-z}$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2\sum_{j=1}^{m+1}\int_{L_j}\left[\frac{\lambda_j\overline{\mu(s)}}{t-z}+\frac{\bar{t}-\bar{z}}{(t-z)^2}\mu(s)\right]ds-$$

$$-2\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{b_j}{(z-z_j)^2}+\frac{\bar{a}_j}{z-z_j}\right]$$

Первая из этих формул пригодна и для граничных точек $z=t_0\in L$. В выражениях для напряжений достаточно заменить интегралы их предельными значениями при $z\to t_0$ по формулам Сохоцкого — Племеля.

3. В качестве примера рассматривалась задача о равномерном растяжении вдоль оси Ox плоскости, ослабленной отверстием, близким к квадратному. Уравнение контура отверстия имеет вид $t=t(\theta)=0{,}6a(e^{-i\theta}-{}^1/_6e^{-3i\theta})$, где θ $(0\leqslant\theta<2\pi)$ — параметр, a — сторона квадрата. При этом $\sigma_x=1$, $\sigma_y=\tau_{xy}=0$ на бесконечности.

Контур был разбит на 32 участка с шагом по параметру $\Delta\theta=H=\pi/32$. На каждом участке вещественная и мнимая части функции $\mu(s)$ заменялись квадратичными интерполяционными полиномами. Из условия совпадения левой и правой частей уравнения (1.5) в точках интерполяции была получена система 128 алгебраических уравнений.

θ/H	0	1	2	3	4	5	6	7	8	16
σ_*	−0,810	−0,815	−0,831	−0,850	−0,855	−0,782	−0,431	0,761	3,000	1,476
σ	−0,819	−0,810	−0,829	−0,855	−0,856	−0,776	−0,433	0,763	3,030	1,463

В таблице приведены найденные значения величины $\sigma=\sigma_x+\sigma_y$, а также значения σ_*, соответствующие точному решению, полученному в [3]. Наибольшая относительная ошибка составляет 1%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шерман Д. И.* Статические плоские задачи теории упругости.— Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1937, т. 2, с. 163—225.
2. *Хацревич И. Х.* Применение метода Вейля к решению плоской статической задачи теории упругости.— ПММ, 1942, т. 6, вып. 3, с. 197—202.
3. *Савин Г. Н.* Концентрация напряжений около отверстий. М.— Л.: Гостехиздат, 1951. 496 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию 20.IX.1979