

нагрузки неустойчивостью равновесного положения ротора и нелинейностью в магнитных системах. В силу малых зазоров между ротором и статором система управления должна обладать относительно высоким быстродействием.

С точки зрения оптимального использования магнитной системы для центрирования вала в радиальном направлении целесообразно применять общий магнитопровод. Это позволяет уменьшить габариты и массу подшипника, но приводит к необходимости учета взаимосвязи магнитных потоков в смежных каналах управления.

Работы по управляемому электромагнитному подвесу не снижают актуальности исследований подклюпающего своей простотой пассивного магнитного подшипника из высококоэрцитивных самарий-кобальтовых магнитов. Общий вид установки для испытаний таких подшипников представлен на фиг. 9. На этой фотографии показаны также самарий-кобальтовые кольца большого диаметра, технология изготовления которых представляет самостоятельный интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Б. Н., Шереметьевский Н. Н., Данилов-Нугусов Н. Н., Вейнберг Д. М. Электромеханическая система для ориентации и стабилизации автономных модулей и легких орбитальных станций.— В кн.: Системы управления. М.: Наука, 1978, с. 89—94.
2. Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 598 с.
3. Леонтьев В. Электромеханическая система стабилизации.— Авиация и космонавтика, 1977, № 4, с. 35.
4. Henrikson C., Liman J., Studer Ph. Magnetically suspended momentum wheels for spacecraft stabilization.— AIAA Paper, 1974, № 74—128, v. 128, p. 1—8.
5. Brunet M. A new technology for three-axis stabilized satellites: Active magnetic bearings. 27th Internat. Astronaut. Congr. Anaheim, Calif., 1976. Paper № 76—191, p. 1—4.
6. Braunbeck W. Freischwebende Körper im elektrischen und magnetischen Feld.— Z. Phys., 1939, В. 112, Н. 11/12. S. 753—763.
7. Backers F. T. A magnetic journal bearing.— Philips Techn. Rev., 1960/1961, v. 22, № 7, p. 232—238.
8. Альпер Н. Я., Терзьян А. А. Индукторные генераторы. М.: Энергия, 1970. 190 с.
9. Металин В. Б. Магнитные и магнитогидродинамические опоры. М.: Энергия, 1968. 190 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.IX.1979

УДК 534.13

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВАЛА

ЖБАНОВ Ю. К.

В работе [1] исследовано движение жесткого вала, вращающегося в упругих подшипниках, и сделан вывод о неустойчивости той формы движения, при которой центр масс вала лежит на оси вращения¹. Ниже показано, что этот вывод ошибочен.

1. Движение симметричного вала, вращающегося в упругих подшипниках (фиг. 1, а), без учета угловых движений оси вращения описывается системой уравнений

$$m\ddot{\xi} = F_{\xi}, \quad m\ddot{\eta} = F_{\eta}, \quad J\dot{\Omega} = M \quad (1.1)$$

где ξ , η — координаты центра масс вала в невращающейся системе координат, оси которой перпендикулярны оси вращения (фиг. 1, б).

Принимается, что центрирующие силы F_{ξ} , F_{η} , создаваемые подшипниками, не зависят от поворота вала. При отсутствии диссипации в подшипниках указанные силы имеют потенциальную функцию $P_0(\xi, \eta)$, в минимуме которой удобно поместить начало системы координат $\xi\eta$. Равновесное положение центра масс

$$\xi = 0, \quad \eta = 0 \quad (1.2)$$

¹ Работа представлена в Докл. АН СССР акад. Л. И. Седовым. (Прим. ред.)

устойчиво в силу теоремы Лагранжа — Дирихле о минимуме потенциальной энергии [2].

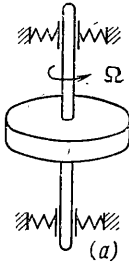
Третье уравнение системы (1.1) отделяется, так как в рассмотренном случае движение центра масс и вращение вала независимы.

2. Движение центра масс можно рассматривать во вращающейся системе координат xu , начало которой совпадает с началом системы $\xi\eta$, а угловая скорость вращения совпадает с угловой скоростью вала (фиг. 2). Уравнения движения в этом случае имеют вид

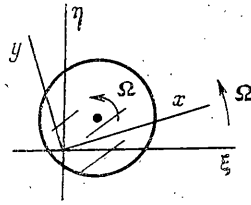
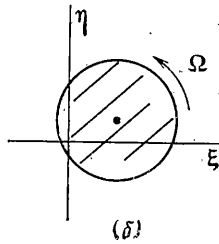
$$x^* = v_x + \Omega y, \quad y^* = v_y - \Omega x \quad (2.1)$$

$$mv_x^* = F_x + \Omega mv_y, \quad mv_y^* = F_y - \Omega mv_x, \quad J\Omega^* = M$$

Если подшипники осесимметричны, то вид потенциальной функции при переходе ко вращающейся системе координат сохраняется, поэтому центрирующие силы



Фиг. 1



Фиг. 2

F_x, F_y имеют тот же потенциал $P_0(x, y)$. Интеграл энергии $1/2 mv_x^2 + 1/2 mv_y^2 + P_0(x, y) = E_0$ доказывает устойчивость равновесного положения $x=0, y=0$ центра масс.

Системами (1.1) и (2.1) описывается также плоское движение ротора, вращающегося на упругом валу в жестких центрирующих подшипниках (фиг. 3).

При равновесном вале и при полном отсутствии диссипации движение центра масс и вращение ротора остаются независимыми и в этой схеме.

3. В работе [1] используются полярные координаты ρ, φ , связанные с введенными выше координатами ξ, η соотношениями: $\xi = \rho \cos \varphi, \eta = \rho \sin \varphi$.

С ссылкой на влияние сколь угодно малого эксцентриситета и экспериментальные данные записывается соотношение

$$\varphi^* = \Omega \quad (3.1)$$

в рамках которого проводится все дальнейшее исследование, послужившее основанием для утверждения о неустойчивости положения равновесия (1.2) механической системы, изображенной на фиг. 1. При анализе предполагается, что полный момент количества движения относительно центра полярной системы координат остается постоянным.

В действительности же сделанные предположения соответствуют наложению на систему дополнительной интегрируемой связи

$$\xi \eta^* - \eta \xi^* = \Omega (\xi^2 + \eta^2) \quad (3.2)$$

и приложению к валу момента, компенсирующего момент реакции наложенной связи

$$M = F_\xi \eta - F_\eta \xi \quad (3.3)$$

Практическая реализация условий (3.2), (3.3) в системе, соответствующей фиг. 1, выглядела бы весьма искусственной, но для ротора на деформируемом валу оба условия будут выполнены, если предположить, что в одном из направлений, например y , вал абсолютно жесткий и к валу не приложено сил, кроме реакций подшипников (фиг. 4).

Во вращающейся системе координат xu связь (3.2) и выражение для момента (3.3) принимают соответственно вид

$$y = 0 \quad (3.4)$$

$$M = -F_y x \quad (3.5)$$

С учетом соотношений (3.4), (3.5) система уравнений (2.1) приводится к виду

$$x^* = v_x, \quad mv_x^* = F_x + m\Omega^2 x \\ J\Omega^* = -[m(\Omega x)^* + m\Omega v_x]x$$

или

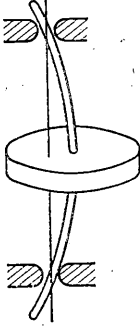
$$(J + mx^2)\Omega = J\Omega_0, \quad mx^{**} = F_x + mJ^2\Omega_0^2 x / (J + mx^2)^2$$

откуда действительно очевидна неустойчивость положения $x=0$ при достаточно больших Ω_0 , или при достаточно мягкой зависимости F_x от x .

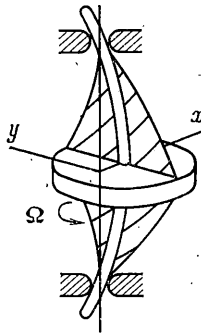
Этот результат и установлен в работе [1]. Полученная таким образом неустойчивость не устраняется никакими диссипативными силами, если только они не приводят к остановке вала. Однако, как было показано выше, эта неустойчивость не имеет никакого отношения к системе, изображенной на фиг. 1, в исследовании которой состояла первоначальная задача, а отнесенная к ней, как это сделано в [1], противоречит известным результатам [3-5].

4. Влияние эксцентриситета вала целесообразно рассмотреть при наличии диссипативных сил, выделяющих стационарные движения, и с учетом работы двигателя, поддерживающего вращение вала.

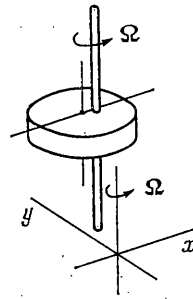
Будем считать, что жесткий эксцентричный вал (фиг. 5) вращается в упругих подшипниках, испытывая силу сопротивления, пропорциональную скорости центра масс и не создающую момента относительно этого центра.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Если ось x вращающейся системы координат направить вдоль линии эксцентриситета, то движение эксцентричного вала описывается системой уравнений (2.1) при следующих выражениях для сил и моментов, приложенных к валу:

$$F_x = -P_{ex}' - av_x, \quad F_y = -P_{ey}' - av_y \quad (4.1)$$

$$M = -P_{ey}'e + \mu(\Omega_0 - \Omega)$$

где e — эксцентриситет, $\mu(\Omega_0 - \Omega)$ — момент, развиваемый двигателем, P_{ex}' , P_{ey}' — частные производные от потенциальной функции

$$P_e(x, y) = P_0(x + e, y) \quad (4.2)$$

где P_0 — потенциал сил центрирующих подшипников, имеющий, как отмечалось выше, минимум при нулевых значениях аргументов, т. е. при $x + e = 0$, $y = 0$. Потенциал $P_e(x, y)$, согласно (4.2), имеет минимум в точке $x = -e$, $y = 0$.

Стационарные режимы определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} v_x^* + \Omega^* y^* &= 0, & v_y^* - \Omega^* x^* &= 0 \\ -P_{ex}'(x^*, y^*) + a\Omega^* y^* + m\Omega^{*2} x^* &= 0 \\ -P_{ey}'(x^*, y^*) - a\Omega^* x^* - m\Omega^{*2} y^* &= 0 \\ -P_{ey}'(x^*, y^*) e + \mu(\Omega_0 - \Omega^*) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Производные P_{ex}' , P_{ey}' обращаются в нуль в точке $x = -e$, $y = 0$, поэтому стационарные значения координат центра масс x^* , y^* в общем случае отличны от нуля.

Не рассматривая количество возможных стационарных режимов и условий существования каждого из них, отметим только, что при достаточно больших значениях Ω_0 всегда существует режим, для которого x^* , y^* , v_x^* , $v_y^* \rightarrow 0$; $\Omega^* \rightarrow \Omega_0$ при $e \rightarrow 0$. Именно этот режим следует считать аналогом равномерного вращения вала без эксцентриситета при неподвижном центре масс. Все дальнейшее рассмотрение ограничим только этим режимом.

Используя потенциальную функцию, определяемую равенством $P(x - x^*, y - y^*) = -P_e(x, y) - P_e(x^*, y^*) - (x - x^*)P_{ex}'(x^*, y^*) - (y - y^*)P_{ey}'(x^*, y^*)$ и сохраняя для отклонений переменных x , y , v_x , v_y от стационарных значений те же обозначения, которые использовались для самих переменных, систему уравнений, описывающую

возмущенное движение около стационарного положения, можно записать в виде

$$\begin{aligned}x^* &= v_x + \Omega y + \Delta \Omega y^*, & y^* &= v_y - \Omega x - \Delta \Omega x^* \\mv_x^* &= -P_x' - av_x + \Omega mv_y^* + \Delta \Omega mv_y^* \\mv_y^* &= -P_y' - av_y - \Omega mv_x - \Delta \Omega mv_x^* \\J\Delta \Omega^* &= -P_y'e - \mu \Delta \Omega, & \Omega \Delta &= \Omega - \Omega^*\end{aligned} \quad (4.4)$$

Потенциальная функция $P(x, y)$ имеет минимум, равный нулю, в точке $x=0, y=0$, если исходный потенциал P_0 удовлетворяет некоторым естественным условиям. Функция [6]

$$W_A = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}\mu J\Delta \Omega^2 + P(x, y) + \varepsilon [m(v_x x + v_y y) + \frac{1}{2}a(x^2 + y^2)]$$

определенно-положительная при $0 < m\varepsilon < a$, производная которой в силу уравнений (4.4) имеет вид

$$\begin{aligned}W_A^* &= W_{A1}^* + W_{A2}^* + W_{A3}^* \\W_{A1}^* &= -(a - \varepsilon m)(v_x^2 + v_y^2) - \mu^2 \Delta \Omega^2 - \varepsilon(P_x' x + P_y' y) \\W_{A2}^* &= (P_x' y - P_y' x)\Omega, & W_{A3}^* &= m\Delta \Omega(v_x v_y^* - v_y v_x^*) - \\& - \mu \varepsilon \Delta \Omega P_y' + \Delta \Omega(P_x' y^* - P_y' x^*) + \varepsilon m \Delta \Omega(v_x y^* - v_y x^*) + \\& + \varepsilon m \Delta \Omega(x v_y^* - y v_x^*) + \varepsilon a \Delta \Omega(x y^* - y x^*)\end{aligned}$$

может быть использована при анализе устойчивости рассматриваемого стационарного режима.

При осесимметричных подшипниках потенциал центрирующих сил может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}P_e(x^* + x, y^* + y) &= \Pi(\rho), & \rho &= [(x^* + x + e)^2 + (y^* + y)^2]^{1/2} \\P(x, y) &= \Pi(\rho) - \Pi(\rho^*) - \Pi'(\rho^*) \frac{x^* + e}{\rho^*} x - \Pi'(\rho^*) \frac{y^*}{\rho^*} y\end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\rho^* = [(x^* + e)^2 + y^{*2}]^{1/2}$$

Согласно (4.5), имеем

$$\begin{aligned}P_x'(x, y) &= \Pi'(\rho) \frac{x^* + x + e}{\rho} - \Pi'(\rho^*) \frac{x^* + e}{\rho^*} \\P_y'(x, y) &= \Pi'(\rho) \frac{y^* + y}{\rho} - \Pi'(\rho^*) \frac{y^*}{\rho^*}\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}P_x'(x, y) &= \left[\Pi''(\rho^*) - \frac{1}{\rho^*} \Pi'(\rho^*) \right] \frac{x^* + e}{\rho^*} \times \\& \times \left(\frac{x^* + e}{\rho^*} x + \frac{y^*}{\rho^*} y \right) + \frac{1}{\rho^*} \Pi'(\rho^*) x + O(x, y)\end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}P_y'(x, y) &= \left[\Pi''(\rho^*) - \frac{1}{\rho^*} \Pi'(\rho^*) \right] \frac{y^*}{\rho^*} \left(\frac{x^* + e}{\rho^*} x + \frac{y^*}{\rho^*} y \right) + \\& + \frac{1}{\rho^*} \Pi'(\rho^*) y + O(x, y)\end{aligned}$$

Выражение, стоящее в первой скобке правой части обоих равенств (4.6), стремится к нулю при $\rho^* \rightarrow 0$ ($e \rightarrow 0$), если вошедшие в это выражение производные существуют, поэтому

$$\lim_{e \rightarrow 0} P_x'(x, y) = \Pi''(0)x + O(x, y), \quad \lim_{e \rightarrow 0} P_y'(x, y) = \Pi''(0)y + O(x, y)$$

Если $\Pi''(0) \neq 0$, что соответствует наличию отличной от нуля линейной составляющей центрирующих сил, то при достаточно малом эксцентриситете производная W_A^* становится определительно-отрицательной, так как коэффициенты всех квадратичных членов функций W_{A2}^* и W_{A3}^* стремятся к нулю при $e \rightarrow 0$, а функция W_{A1}^* содержит квадраты всех переменных с отрицательными и не стремящимися к нулю коэффициентами, что и доказывает устойчивость стационарного положения.

5. Для анализа устойчивости в случае $\Pi''(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, предполагая, что $\Pi'''(\rho) > 0$ в некоторой окрестности нуля, используем определенно-положительную функцию

$$W_B = 1/2 m (v_x^2 + v_y^2) + 1/2 \mu J \Delta \Omega^2 + \varepsilon [m (v_x x + v_y y) + 1/2 a (x^2 + y^2)]$$

производную от которой в силу уравнений (4.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} W_B^* &= W_{B1}' + W_{B2}' + W_{B3}' \\ W_{B1}' &= -(a - \varepsilon m) (v_x^2 + v_y^2) - \mu^2 \Delta \Omega^2 + m (v_y^* + \varepsilon y^*) \Delta \Omega v_x - \\ &\quad - m (v_x^* + \varepsilon x^*) \Delta \Omega v_y - P_x' v_x - P_y' v_y - \mu \Delta \Omega \varepsilon P_y' + \\ &\quad + \varepsilon (a y^* + m v_y) \Delta \Omega x - \varepsilon (a x^* + m v_x^*) \Delta \Omega y - v_1^2 (P_x'^2 + P_y'^2) - \\ &\quad - v_2^2 \varepsilon^2 [(a y^* + m v_y^*)^2 x^2 + (a x^* + m v_x^*)^2 y^2] \\ W_{B2}' &= v_1^2 (P_x'^2 + P_y'^2) - 1/2 \varepsilon (P_x' x + P_y' y) \\ W_{B3}' &= v_2^2 \varepsilon^2 [(a y^* + m v_y^*)^2 x^2 + (a x^* + m v_x^*)^2 y^2] - 1/2 \varepsilon (P_x' x + P_y' y) \end{aligned}$$

Можно показать, что в области $\Pi'''(\rho) > 0$ справедливы соотношения

$$P_x'(x, y) x + P_y'(x, y) y \geq 1/2 \left[\frac{1}{\rho} \Pi'(\rho) + \frac{1}{\rho^*} \Pi'(\rho^*) \right] (x^2 + y^2) \quad (5.1)$$

$$P_x'^2(x, y) + P_y'^2(x, y) \leq \frac{1}{\rho} \Pi'(\rho) \frac{1}{\rho^*} \Pi'(\rho^*) (x^2 + y^2) + \Pi''(\rho') (\rho - \rho^*)^2 \quad \rho' \in [\rho \rho^*] \quad (5.2)$$

Определенная отрицательность функции W_{B1}' обеспечивается выбором v_1, v_2 . В силу равенства (5.1) при всех достаточно малых эксцентриситетах, функция W_{B3}' становится определенно-отрицательной, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(a y^* + m v_y^*)^2 + (a x^* + m v_x^*)^2] (\Pi'(\rho^*) / \rho^*)^{-1} = 0 \quad (5.3)$$

Определенная отрицательность функции W_{B2}' при достаточно малых эксцентриситетах и малых отклонениях ρ от ρ^* (т. е. при малых x, y) следует из равенств (5.1), (5.2) при условии, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \Pi''(\rho) (\Pi'(\rho) / \rho)^{-1} = 0 \quad (5.4)$$

Таким образом, для достаточно малых эксцентриситетов функция W_B^* определенно-отрицательная и исследуемый стационарный режим устойчив, если выполнены условия (5.3), (5.4).

Для случая $\Pi'(\rho) = \alpha \rho^{3/2}$, например, эти условия выполнены.

Проведенное выше исследование показывает, что наличие малого эксцентриситета вала в рассматриваемой постановке не приводит к качественному изменению свойств стационарного режима движения.

Стационарное движение вала, близкое к вращению вокруг центра масс, при наличии сил внешней диссипации остается устойчивым, если выполнены определенные условия, и в том случае, когда восстанавливающая сила упругих центрирующих подшипников не имеет линейной составляющей.

Ошибочный вывод работы [1] о неустойчивости рассматриваемого режима явился следствием неправомерного распространения соотношения (3.1), справедливого при наличии эксцентриситета для стационарного режима, на произвольные переходные режимы движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельзон А. А. Устойчивость движения жесткого вала, вращающегося в подшипниках качения. — Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 2, с. 310—313.
2. Лагранж Ж. Л. Аналитическая механика. Т. 1. М.—Л.: Гостехиздат, 1950. 594 с.
3. Николаи Е. Л. Труды по механике. М.: Гостехиздат, 1955. 584 с.
4. Дименцберг Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 347 с.
5. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956, 600 с.
6. Кошляков В. Н. Об устойчивости вращающейся консоли. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6, с. 17—20.

Москва

Поступила в редакцию
22.XII.1980