

УДК 534.11

## ИССЛЕДОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА

КРЮКОВ Б. И., СЕРЕДОВИЧ Г. И.

Задача нахождения периодических решений нелинейных колеблющихся систем вследствие широты ее практических приложений являлась объектом многочисленных исследований. Однако многие аспекты поведения нелинейных систем остаются практически неизученными. Так, до настоящего времени вызывает дискуссии вопрос о возможности существования несимметричных гармонических колебаний в симметричных диссипативных колеблющихся системах. Отметим, что для недиссипативных систем положительный ответ на данный вопрос был получен в [1] чисто качественными методами.

Применение приближенных методов к исследованию нелинейных систем часто приводит не только к количественным, но и к качественным ошибкам. Так, на основе анализа приближенных решений некоторыми авторами был сделан неверный вывод о зависимости высшего порядка субгармонических решений и ультрагармонических резонансов от высшего показателя степени полиномиальной упругой характеристики [2-4].

Особенно большие трудности вызывает анализ существенно нелинейных колеблющихся систем, в которых нелинейные эффекты проявляются наиболее ярко. Определенное недоверие к надежности приближенных методов при анализе существенно нелинейных систем привело к тому, что основным инструментом их исследования стали АЭВМ и именно с их помощью в последние годы были получены наиболее интересные результаты [4-6]. В то же время известен ряд результатов, позволяющих устанавливать соответствие между приближенными и точными решениями и в этом смысле получать строгие суждения, относящиеся к поведению нелинейных систем [7-10].

В данной работе предлагается методика построения периодических решений систем с полиномиальными характеристиками. Рассмотрение проведено на примере гармонических решений широко известного уравнения Дуффинга. Основное внимание уделено исследованию особенностей проявления ультрагармонических резонансов различных порядков.

### 1. Рассмотрим систему, описываемую уравнением Дуффинга

$$x'' + \varepsilon x' + kx + \beta x^3 = F(t) \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon$ ,  $k$  и  $\beta$  — некоторые постоянные, а  $F(t)$  — периодическая с некоторым периодом  $T$  функция, удовлетворяющая условиям Дирихле. При  $\varepsilon > 0$  и  $\beta > 0$  из теоремы Карграйт [11] следует диссипативность уравнения (1.1) и существование у него по крайней мере одного гармонического (т. е.  $T$ -периодического) решения. При  $\varepsilon = 0$  данная система уже не является диссипативной, однако, используя теорему Массера [12], нетрудно показать, что и в этом случае существуют гармонические решения. Таким образом, при наложенных выше на уравнение Дуффинга ограничениях задача нахождения его гармонических решений является содержательной.

Уравнение (1.1) является частным случаем системы вида

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = g(t, x, y) \quad (1.2)$$

где функция  $g(t, x, y)$  является полиномом по  $x$  и  $y$  и  $T$ -периодична по переменной  $t$ .

Определение параметров гармонических решений целесообразно осуществлять в два этапа. На первом этапе производится грубое определение

параметров решений (стартовые аппроксимации). При этом метод должен давать возможность нахождения всего множества решений данной структуры. На втором этапе производится уточнение приближенных решений до такой стадии, когда оказываются выполненными условия, гарантирующие существование в некоторой достаточно малой окрестности каждого из них точного решения.

Если система (1.2) диссипативна, то ее периодические решения лежат в некоторой кольцевой области фазовой плоскости. В связи с этим представляется целесообразным введение замены переменных

$$x = x_0(t) + v, \quad y = x_0^*(t) + w = y_0(t) + w \quad (1.3)$$

принимая в качестве  $x_0(t)$  некоторое приближенное гармоническое решение исходной системы (1.2), найденное одним из традиционных методов.

Тогда систему (1.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= w, \quad \eta(t) = g(t, x_0, x_0^*) - x_0'' \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x_0} v + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y_0} w + G(t, v, w) + \eta(t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

где многочлен  $G(t, v, w)$  по переменным  $v, w$  содержит члены со степенями, начиная со второй.

Отметим, что в общем случае функция  $\eta(t)$  тождественно не равна нулю. Лишь в тех случаях, когда  $x_0(t)$  является высокоточным решением, можно упрощенно полагать  $\eta(t) \equiv 0$ .

Наряду с системой (1.4) будем рассматривать соответствующую ей линейную однородную систему. Через  $\Phi(t)$  обозначим ее фундаментальную матрицу, удовлетворяющую условию  $\Phi(0) = E$ , где  $E$  — единичная матрица. В принципе фундаментальная матрица может быть приближенно представлена в аналитическом виде (например, с этой целью может быть использовано представление решений в форме Уиттекера). Однако при таком подходе приходится учитывать номер соответствующей области неустойчивости, а это существенно усложняет дальнейший анализ получаемых решений. Поэтому представляется целесообразным идти по пути прямого численного интегрирования линейной однородной системы. В результате вычислений получим

$$\Phi(t) = \begin{vmatrix} v_{01} & v_{02} \\ w_{01} & w_{02} \end{vmatrix}, \quad w_{01} = \dot{v}_{01}, \quad w_{02} = \dot{v}_{02}$$

Отметим, что  $\det \Phi(t)$  является определителем Вронского и, следовательно, имеет место формула Лиувилля. Учитывая, что  $\Phi(0) = E$ , получим  $\det \Phi(t) = e^{-\alpha t}$ .

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (1.4) с произвольными начальными условиями ( $v(0) = V, w(0) = W$ ) может быть сведена к эквивалентной ей задаче нахождения решений системы нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа. Производя частичное интегрирование в получаемых соотношениях, придем к системе уравнений вида

$$\begin{aligned} v(t) &= \Psi_1(t) + v_{01}(t)V + v_{02}(t)W + \int_0^t e^{\alpha s} G(s, v(s), w(s)) \times \\ &\quad \times [v_{02}(s)v_{01}(t) - v_{01}(s)v_{02}(t)] ds \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$w(t) = \Psi_2(t) + w_{01}(t)V + w_{02}(t)W + \int_0^t e^{s\eta} G(s, v(s), w(s)) \times \\ \times [v_{02}(s)w_{01}(t) - v_{01}(s)w_{02}(t)] ds$$

$$\Psi_1(t) = \int_0^t e^{s\eta} \eta(s) [v_{01}(s)v_{02}(t) - v_{02}(s)v_{01}(t)] ds$$

$$\Psi_2(t) = \int_0^t e^{s\eta} \eta(s) [v_{01}(s)w_{02}(t) - v_{02}(s)w_{01}(t)] ds$$

Воспользуемся для решения системы интегральных уравнений (1.5) методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения примем

$$v_0(t) = \Psi_1(t) + v_{01}(t)V + v_{02}(t)W$$

$$w_0(t) = \Psi_2(t) + w_{01}(t)V + w_{02}(t)W$$

Тогда первое приближение решения будет определяться соотношениями

$$v_1(t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} q_{ij}(t) V^i W^j = Q(t, V, W),$$

$$w_1(t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} r_{ij}(t) V^i W^j = R(t, V, W)$$

(1.6)

где  $q_{ij}(t)$  и  $r_{ij}(t)$  — функции, определяемые в результате вычисления некоторых невыписываемых здесь интегралов. Степень многочленов, стоящих в правых частях соотношений (1.6), определяется степенью полиномиальных нелинейностей, входящих в исходное дифференциальное уравнение.

Соотношения (1.6) представляют собой приближенное общее решение системы (1.4) и, следовательно, приближенно определяют некоторое точечное отображение сдвига. Гармонические решения соответствуют неподвижным точкам рассматриваемого точечного отображения. Поэтому условиями определения величин  $V$  и  $W$ , соответствующих гармоническим решениям, являются

$$Q(T, V, W) = V; \quad R(T, V, W) = W \quad (1.7)$$

Решение данной системы алгебраических уравнений может быть осуществлено численными методами. Очевидно, что данная система уравнений может обладать несколькими действительными решениями, которым соответствуют различные гармонические колебания исходной системы. Естественно поэтому при выборе конкретной вычислительной процедуры стремиться к использованию таких методов, которые позволяют находить все действительные решения системы (1.7) [13].

Пусть  $(V_*, W_*)$  является одним из решений системы (1.7). Тогда, подставляя значения  $V = V_*$  и  $W = W_*$  в соотношения (1.6), получим приближенное гармоническое решение системы дифференциальных уравнений (1.4). Искомое приближенное решение исходной системы дифференциальных уравнений (1.2) определяется соотношением

$$x_1(t, V_*, W_*) = x_0(t) + v_1(t, V_*, W_*)$$

Для дальнейшего анализа требуется произвести разложение каждого из полученных гармонических решений в ряд Фурье.

Устойчивость неподвижной точки  $(V_*, W_*)$  определяется значениями корней характеристического уравнения

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial Q(T, V_*, W_*)}{\partial V_*} - \lambda & \frac{\partial Q(T, V_*, W_*)}{\partial W_*} \\ \frac{\partial R(T, V_*, W_*)}{\partial V_*} & \frac{\partial R(T, V_*, W_*)}{\partial W_*} - \lambda \end{array} \right| = 0 \quad (1.8)$$

Если корни характеристического уравнения лежат внутри единичного круга, то неподвижная точка оказывается устойчивой. В том же случае, когда хотя бы один из корней уравнения (1.8) лежит вне единичного круга, неподвижная точка  $(V_*, W_*)$  неустойчива [14].

2. Полученные при таком подходе приближенные периодические решения рассматриваемой системы могут оказаться по своей точности неудовлетворительными с точки зрения получения обоснованных заключений о характере поведения точных решений. Поэтому возникает необходимость в их уточнении.

При дальнейших рассуждениях без ограничения общности можно полагать  $T=2\pi$ . С учетом конкретного вида первого из уравнений системы (1.2) приближенное гармоническое решение можно представлять в виде

$$x_m(t) = a_0 + \sum_{i=1}^m (a_{2i-1} \sin it + a_{2i} \cos it) \quad (2.1)$$

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^m (-ia_{2i} \sin it + ia_{2i-1} \cos it)$$

Для данного приближенного решения система уравнений балансов по отдельным гармоникам может быть записана следующим образом:

$$G_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(s, x_m(s), y_m(s)) ds = 0 \quad (2.2)$$

$$G_{2i-1}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(s, x_m(s), y_m(s)) \sin is ds + ia_{2i} = 0$$

$$G_{2i}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(s, x_m(s), y_m(s)) \cos is ds - ia_{2i-1} = 0,$$

$$\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_{2m}) \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

При  $m \rightarrow \infty$  получаемые решения (2.1) сходятся к точному гармоническому решению системы (1.2) [8].

Следуя [8, 9], воспользуемся для решения системы уравнений (2.2) модифицированным методом Ньютона. При этом вычислительная процедура сводится к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{v=0}^{2m} J_{uv}(\alpha^k) h_v^k + G_u(\alpha^k) = 0 \quad (u=0, 1, 2, \dots, 2m; k=0, 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

где  $\alpha^k = (a_0^k, a_1^k, \dots, a_{2m}^k)$  —  $k$ -е приближение решения системы (2.3),  $h_v^k = a_v^{k+1} - a_v^k$  и  $J_{uv}(\alpha)$  — элементы якобиана для системы (2.2).

В качестве стартовой аппроксимации  $\alpha^0$  принимались результаты решения, полученного методом точечных отображений.

Итерационный процесс сходится не при любых начальных условиях, что заставляет предъявлять очень высокие требования к качеству стартовой аппроксимации. Кроме того, возникает необходимость в обращении якобиана на каждом этапе вычислений. Все это заставляет прибегать в дальнейших исследованиях к использованию других быстроходящихся итерационных процессов, лишенных указанных недостатков (см., например, [15, 16]).

3. При проведении настоящих исследований приближенные гармонические решения уточнялись до тех пор, пока не оказывались выполненными условия, гарантирующие существование в некоторой их окрестности точного решения той же качественной структуры. Прежде чем привести формулировку данных условий, сделаем некоторые предварительные замечания.

Известно, что задача нахождения гармонических решений системы вида

$$du/dt = A(t)u + \varphi(t, u) \quad (3.1)$$

где  $A(t)$  — непрерывная  $2\pi$ -периодическая матрица и  $\varphi(t)$  — непрерывная вектор-функция, периодическая по  $t$  с тем же периодом, может быть сведена к решению системы интегральных уравнений типа Гаммерштейна [17]:

$$u(t) = \int_0^{2\pi} u(t, s) \varphi(s, u(s)) ds \quad (3.2)$$

$$H(t, s) = \Phi(t) [E - \Phi(2\pi)]^{-1} \Phi^{-1}(s) \quad \text{при } 0 \leq s \leq t \leq 2\pi$$

$$H(t, s) = \Phi(t) [E - \Phi(2\pi)]^{-1} \Phi(2\pi) \Phi^{-1}(s) \quad \text{при } 0 \leq t < s < 2\pi$$

где  $\Phi(t)$  — фундаментальная матрица системы  $du/dt = A(t)u$  с отличными от единицы мультипликаторами, удовлетворяющая условию  $\Phi(0) = E$ . Соотношение (3.2) будем называть  $H$ -преобразованием, соответствующим матрице  $A(t)$ .

Ниже, наряду с евклидовой нормой будем использовать применительно к непрерывным  $2\pi$ -периодическим вектор-функциям нормы вида  $\|f\|_n = \max_t \|f(t)\|$ .

Если воспользоваться неравенством Буняковского — Шварца, то нетрудно получить оценку для нормы  $H$ -преобразования

$$\|H\|_n \leq [2\pi \max_t \sum_{k,l} H_{kl}^2(t, s) ds]^{1/2}$$

где  $H_{kl}(t, s)$  — элементы матрицы  $H(t, s)$ .

Из теоремы Урабе [8, 9] следует, что если известно некоторое приближенное  $2\pi$ -периодическое решение  $u_{np}(t)$  системы (3.1) и имеются положительная постоянная  $\delta$  и неотрицательная постоянная  $d < 1$ , удовлетворяющие следующим условиям: матрица  $\Psi(t, u)$  якобиана правой части системы (3.1) по отношению к  $u$  удовлетворяет неравенству (для всех  $t$ )

$$\|\Psi(t, u) - \Psi(t, u_{np}(t))\| \leq d/M \quad u \in \Omega_\delta$$

$$\Omega_\delta = \{u \mid \|u - u_{np}(t)\| \leq \delta\}$$

и для  $H$ -преобразования, соответствующего матрице  $\Psi(t, u_{np}(t))$  норма  $\|H\|_n \leq M$ ; все мультипликаторы линейной однородной системы  $du/dt = \Psi(t, u_{np}(t))t$  отличны от единицы и  $Mr/(1-d) \leq \delta$ , где  $r$  — неотрицательная постоянная

$$\left\| \frac{du_{np}(t)}{dt} - A(t)u_{np}(t) - \varphi(t, u_{np}(t)) \right\| \leq r$$

то система (3.1) имеет в  $\Omega_\delta$  единственное точное периодическое решение  $u = u_T(t)$ , причем  $\|u_T(t) - u_{np}(t)\| \leq Mr / (1-d)$ .

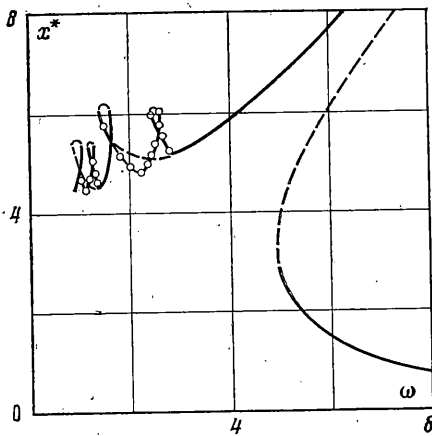
Заметим, что при выполнении условий теоремы Урабе приближенное и точное решения системы (3.1), лежащие в  $\Omega_\delta$ , будут одновременно либо устойчивыми, либо неустойчивыми по первому приближению в смысле Ляпунова.

4. В качестве конкретного объекта исследований было принято следующее уравнение Дуффинга:

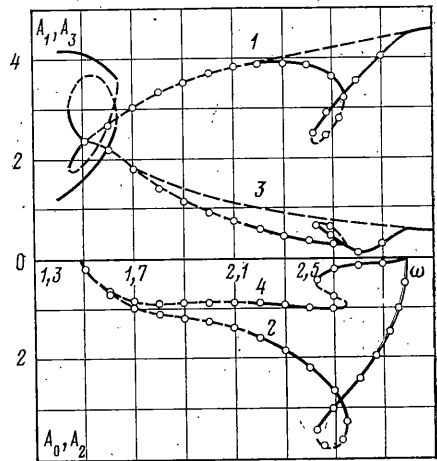
$$x'' + 0,2x' + x + x^3 = 50 \cos \omega t \tag{4.1}$$

Уравнение с такими значениями параметров было исследовано методами аналогового моделирования в [6], что создавало условия для сопоставления данных, полученных различными методами.

При вычислениях в качестве  $x_0(t)$  принималось некоторое приближенное гармоническое решение, которое определялось либо на основе метода



Фиг. 1



Фиг. 2

Бубнова — Галеркина с учетом одной-двух первых гармоник решения, либо непосредственно прямым численным интегрированием, начиная с произвольных начальных условий. С помощью принятого варианта метода точечных отображений приближенно определялось множество гармонических решений. Отметим, что в данном конкретном случае система (1.7) представляла собой систему двух алгебраических уравнений третьей степени. После получения решений первого приближения производилось их уточнение до тех пор, пока не оказывались выполненными условия теоремы Урабе.

Матрица  $\Psi(t, x, y)$  в случае уравнения (1.1) имеет вид

$$\Psi(t, x, y) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -k - 3\beta x^2 & -\varepsilon \end{vmatrix}$$

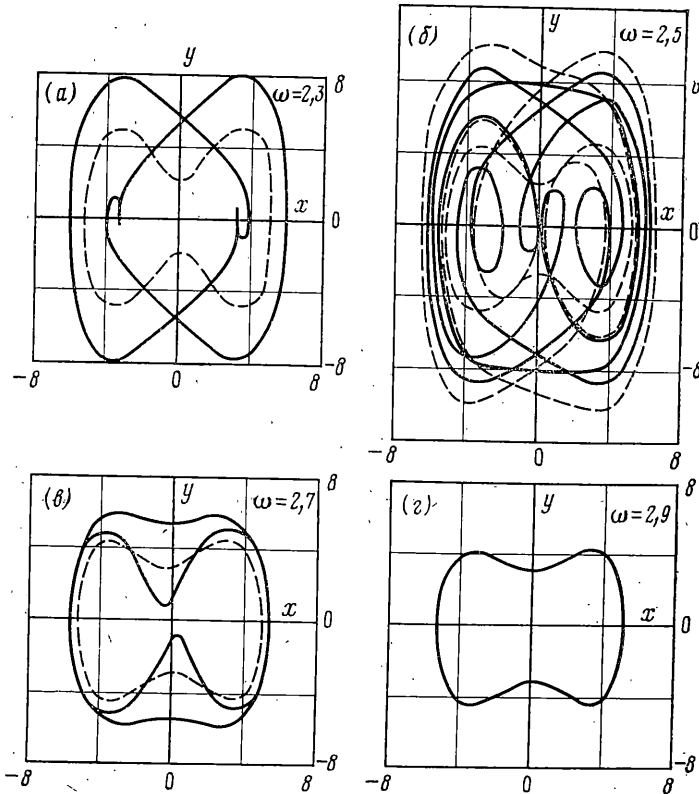
и в области  $\Omega_\delta$  справедлива оценка

$$\|\Psi(t, x, y) - \Psi(t, x_m, y_m)\| \leq 3\beta |x^2 - x_m^2(t)| \leq 3\beta\delta (\delta + 2|x_m(t)|) \leq 3\beta\delta (\delta + 2c) \\ c \geq |x_m(t)| \quad t \in [0, 2\pi]$$

Тогда из теоремы Урабе следует, что если система неравенств

$$Mr/(1-d) \leq \delta, \quad 3\beta\delta(\delta+2c) \leq d/M \quad (4.2)$$

разрешима с неотрицательным  $d < 1$ , то тем самым устанавливается факт существования точного изолированного периодического решения в обла-



Фиг. 3

сти  $\Omega_0$  и дается оценка точности полученного приближенного решения  $x_m(t)$ .

Практически для удовлетворения неравенств (4.2) приходилось в приближенном гармоническом решении определять от 15 до 45 первых гармоник решения. При этом величина

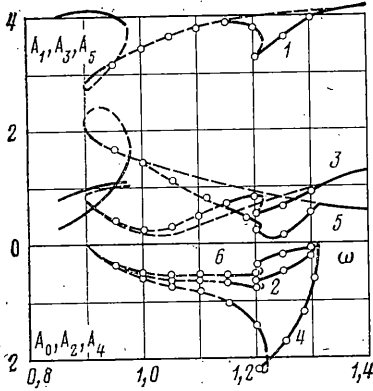
$$r > |50 \cos \omega t - x_m^{**}(t) - 0,2x_m^*(t) - x_m(t) - x_m^3(t)|$$

имела порядок  $10^{-7} - 10^{-9}$ , а величина  $\delta$ , определяющая размеры области  $\Omega_0$ , — порядок  $10^{-4}$ .

В случае необходимости вся процедура повторялась, начиная с одного из уточненных решений, принимаемого в качестве  $x_0(t)$ .

В результате проведенных вычислений были получены решения, соответствующие различным значениям частоты внешнего возмущения  $\omega$ . Полученные результаты показали, что характер поведения решений даже такой сравнительно простой нелинейной системы, как уравнение Дуффинга, оказывается весьма сложным. Прежде всего отметим, что в исследованной системе ярко проявлялись все ультрагармонические резонансы как нечетных, так и четных порядков (при исследованиях были изучены резонансы до девятого порядка включительно).

На фиг. 1 представлены амплитудо-частотные характеристики, построенные для полуразмахов колебаний. При этом оказалось, что рассматриваемая система (4.1) с симметричной упругой характеристикой в широких частотных диапазонах обладает несимметричными гармоническими решениями (отмечены светлыми точками), появление которых связано с эффектами ультрагармонических резонансов четных порядков ( $x^* = \frac{1}{2}(x_{\max} - x_{\min})$ ).



Фиг. 4

Дальнейший анализ особенностей проявления ультрагармонических резонансов целесообразно производить на основе спектральных представлений решений. На фиг. 2 представлены амплитудо-частотные характеристики системы в области второго и третьего ультрагармонических резонансов (кривые 1-4 соответствуют  $A_1, A_2, A_3, A_0$ ). При частотах  $\omega > 2,8$  уравнение Дuffинга обладает единственным гармоническим решением. Это решение симметрично и устойчиво. При уменьшении частоты происходит бифуркация, при которой симметричное решение становится неустойчивым и появляются два устойчивых несимметричных решения.

Отметим, что вследствие симметрии уравнения (4.1) наряду с решением  $x(t)$  возникает решение  $-x(t - \pi/\omega)$ . Таким образом, несимметричные решения появляются только парами. При дальнейшем уменьшении частоты в системе появляется семь гармонических решений: одно неустойчивое симметричное, четыре устойчивые и два неустойчивых несимметричных. В данной конкретной системе амплитуда второй (резонирующей) гармоники даже превышает амплитуду основного тона. В частотном диапазоне  $2,12 < \omega < 2,42$  имеется три гармонических решения: неустойчивое симметричное и устойчивые несимметричные. Некоторое представление о характере гармонических решений в описанных выше областях дают их изображения на фазовой плоскости, приведенные на фиг. 3.

Таким образом, в частотном диапазоне ( $2,12 < \omega < 2,8$ ) физически реализуемыми оказываются только несимметричные гармонические решения. Это явление интересно с точки зрения возможных практических приложений и, в частности, может быть использовано при создании конструкций резонансных вибромашии технологического назначения.

При частоте  $\omega \approx 2,12$  имеет место еще одна бифуркация решений и в системе наряду с тремя неустойчивыми гармоническими решениями появляются гетероклиническая структура и субгармонические решения, соответствующие субультрагармоническому резонансу порядка  $7/3$ . Гетероклинические структуры проявляются в частотном диапазоне  $1,5 < \omega < 2,12$ . Отметим, что нижнее значение частоты соответствует уже области ультрагармонического резонанса третьего порядка. При частоте  $\omega = 1,63$  появляются три симметричных гармонических решения, из которых только одно устойчиво. Таким образом, при  $1,63 < \omega < 2,12$  в системе вообще отсутствуют устойчивые и, следовательно, физически реализуемые гармонические решения. В этом случае любое решение системы (4.1) при  $t \rightarrow \infty$  попадает либо в гетероклиническую структуру, либо стремится к устойчивому субгармоническому решению порядка  $1/3$  (субультрагармонический резонанс порядка  $7/3$ ).

При  $\omega < 1,5$  несимметричные гармонические решения и гетероклинические структуры исчезают и система (4.1) обладает тремя симметричными гармоническими решениями: двумя устойчивыми и одним неустойчивым.

Поведение системы (4.1) в областях ультрагармонических резонансов более высоких четных и нечетных порядков полностью аналогично поведению системы в областях второго и третьего резонансов. На фиг. 4 показаны амплитудо-частотные характеристики системы (4.1) в областях четвертого и пятого ультрагармонических резонансов (кривые 1-5 соответствуют  $A_j$  ( $j=1-5$ ), а кривая 6 соответствует  $A_0$ ).

На фиг. 1-4 неустойчивым решениям соответствуют пунктирные кривые, а устойчивым — сплошные.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Loud W. S. Nonsymmetric periodic solutions of certain second order nonlinear differential equations.— J. Different. Equat., 1969, v. 5, No. 2, p. 352-368.
2. Kronauer R. E., Musa S. A. Necessary conditions for subharmonic and superharmonic oscillations in Weakly-nonlinear systems.— Quart. Appl. Math., 1966, v. 24, No. 2, p. 153-160.



3. *Musa S. A., Kronauer R. E.* Sub- and superharmonic synchronization in weakly nonlinear systems: integral constraints and duality.— *Quart. Appl. Math.*, 1968, v. 25, No. 4, p. 399–414.
4. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.
5. *Тондл А.* Нелинейные колебания механических систем. М.: Мир 1973. 334 с.
6. *Szemplinska-Stupnicka W.* Higher harmonic oscillations in heteronomous nonlinear systems with one degree of freedom.— *Internat. J. Nonlinear Mech.*, 1968, v. 3, No. 1, p. 17–30.— Рус. перев.: *Механика: Сб. перев. иностр. статей*, 1969, т. 118, № 6, с. 11–23.
7. *Cesari L.* Functional analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations.— *Contrib. to Different. Equat.*, 1963, v. 1, No. 2, p. 149–187.
8. *Urabe M.* Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems.— *Arch. Rational Mech. and Analysis*, 1965, v. 20, No. 2, p. 120–152.— Рус. перев.: *Механика: Сб. перев. иностр. статей*, 1966, т. 97, № 3, с. 3–34.
9. *Urabe M., Reiter A.* Numerical computation of nonlinear forced oscillations by Galerkin's procedure.— *J. Math. Anal. and Applic.*, 1966, v. 14, No. 1, p. 107–140.
10. *Stokes A.* On the approximation of nonlinear oscillations.— *J. Different. Equat.*, 1972, v. 12, No. 3, p. 535–558.
11. *Лешуец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 387 с.
12. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.—Л.: Наука, 1964. 368 с.
13. *Shinohara Y.* A geometric method for the numerical solution of nonlinear equations and its application to nonlinear oscillations.— *Publ. Res. Inst. Math., Sci.*, 1972, v. 8, No. 1, p. 1–9.
14. *Неймарк Ю. И.* Метод точечных преобразований в теории нелинейных колебаний. I—III.— *Изв. вузов. Радиофизика*, 1958, т. 1, № 1, с. 41–66; № 2, с. 95–117; № 5–6, с. 146–165.
15. *Мадорский В. М.* Быстросходящиеся итерационные процессы для решений нелинейных уравнений.— *Докл. АН БССР*, 1976, т. 20, № 3, с. 203–204.
16. *Мадорский В. М., Силаев Н. В.* Об одном сверхлинейном процессе для решения нелинейных уравнений.— *Изв. АН БССР, сер. физ-матем. наук*, 1978, № 5, с. 46–50.
17. *Halanay A.* Differential equations. Stability, oscillations, time lags. New York—London: Acad. Press, 1966. 528 p.

Москва

Поступила в редакцию  
3.V.1979